FUNCIONES CONTINUAS.

La mayor parte de las funciones que manejamos, a nivel elemental, presentan en sus gráficas una propiedad característica que es la continuidad.

La continuidad de una función definida en un intervalo significa que pequeñas variaciones en el original *x* ocasionan pequeñas variaciones en la imagen *y* y no un salto brusco de su valor.

Intuitivamente esto significa una variación suave de la función sin saltos bruscos que rompan la gráfica de la misma.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

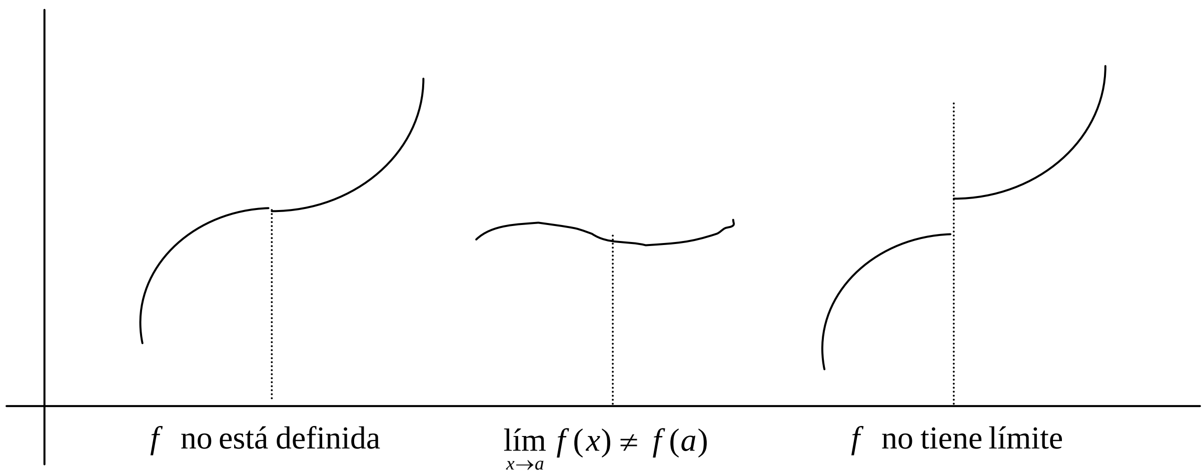
Una función es continua en un punto $x = a$ si existe límite de la función en él y coincide con el valor que toma la función en dicho punto, es decir:

$$f \text{ es continua en } x = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La continuidad de una función f en el punto $x = a$ implica que se cumplan las tres condiciones siguientes:

1. Existe el límite de la función *f(x)* en $x = a$.
2. La función está definida en $x = a$; es decir, existe *f(a)*
3. Los dos valores anteriores coinciden.

Por tanto, una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de estas tres condiciones. En este caso (si no se cumple alguna de las condiciones) diremos que la función es discontinua en dicho punto. En caso de que no se cumpla la segunda condición, la función no estaría definida en el punto $x = a$ y no podríamos hablar ni de continuidad ni discontinuidad en dicho punto.



f no está definida en $x = a$ | $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ | f no tiene límite en $x = a$

Ejemplos:

- La función $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ ¿es continua en el punto $x=3$?

Veamos si se cumplen las tres condiciones anteriores:

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{3+2}{3-2}=5$
2. $f(3)=\dfrac{3+2}{3-2}=5$
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Por tanto, *f(x)* es continua en el punto $x=3$.

- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, estudiar la continuidad de dicha función en $x=1$.

Veamos si se cumplen las condiciones necesarias:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1+1}{1}=2$
2. $f(1)=\dfrac{1^2-1}{1^2-1}$ $\Rightarrow$ no existe, pues se anula el denominador.
3. El $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $f(1)$ no son iguales porque $f(1)$ no existe y, en consecuencia, no se pueden comparar.

Por tanto, al no estar definida la función en el punto $x=1$ no podemos hablar de la continuidad en dicho punto.

- **Dada la función** $f(x)=\begin{cases}3x+5 & si\ \ x<-1\\ -2 & si\ \ x=-1\\ 3+x & si\ \ x>-1\end{cases}$**, estudiar la continuidad de dicha función en** $\boldsymbol{x=-1}$

Seguiremos el mismo proceso que en los ejemplos anteriores:

1. Estudiamos la existencia del $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

   Como en el punto $x=-1$ la función experimenta un cambio de definición, para estudiar la existencia de dicho límite, tendremos que calcular los límites laterales de la función en el punto. Por tanto:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(3x+5)=2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(3+x)=2$$

   En consecuencia, existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ pues los límites laterales son iguales.

2. $f(-1)=-2$
3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$

Luego la función es discontinua en el punto $x=-1$.

- **Dada la función** $f(x)=\begin{cases}3x-2 & si\ \ x<2\\ 5 & si\ \ x=2\\ 3-x & si\ \ x>2\end{cases}$ **, estudiar la continuidad de dicha función en $x = 2$.**

Seguiremos el mismo proceso que en los ejemplos anteriores:

1. Estudiamos la existencia del $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

   Como en el punto $x = 2$ la función experimenta un cambio de definición, para estudiar la existencia de dicho límite, tendremos que calcular los límites laterales de la función en el punto. Por tanto:

   $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4$$

   $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3-x) = 1$$

   En consecuencia, no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ pues los límites laterales son distintos.

2. $f(2) = 5$

Luego la función es discontinua en el punto $x = 2$.

Si tenemos en cuenta la definición métrica de límite podemos escribir:

$$f \text{ es continua en } x=a \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ /\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

CONTINUIDAD LATERAL.

Si nos restringimos a los valores que la función toma a la derecha o a la izquierda del punto $x = a$, se habla entonces de continuidad lateral a la derecha o a la izquierda del punto a.

Continuidad a la izquierda:

La función $f(x)$ es continua a la izquierda en el punto $x = a$ cuando el límite a la izquierda en dicho punto coincide con el valor que toma la función en el mismo.

$$f \ \textit{ es continua en } \ x=a^- \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad a la derecha:

La función $f(x)$ es continua a la derecha en el punto $x = a$ cuando el límite a la derecha en dicho punto coincide con el valor que toma la función en el mismo.

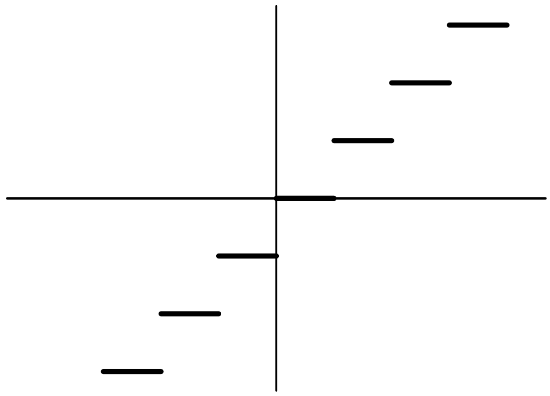
$$f \ \textit{ es continua en } \ x=a^+ \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Es evidente que si una función es continua por la derecha y por la izquierda en un punto, entonces es continua en dicho punto.

EJEMPLOS.

- **Estudiar la continuidad de la función** $f(x) = Ent(x) = [x]$ **(función parte entera de un número) en cualquier punto de abscisa entera.**

Si tenemos en cuenta la gráfica de la *función parte entera*



podemos observar que en cualquier punto de abscisa entera "n" se verifica

1. $f(n) = Ent(n) = [n] = n$
2. $\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} Ent(x) = n - 1$

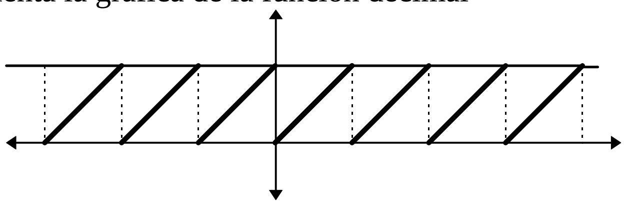
   $\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} Ent(x) = n$

Por tanto, no existe $\lim_{x \to n} Ent(x)$ por ser los límites laterales distintos.

En consecuencia, la función $f(x) = Ent(x) = [x]$ no es continua en ningún punto de abscisa entera.

- **Estudiar la continuidad de la función** $f(x) = Dec(x) = Mant(x)$ **(función decimal) en cualquier punto de abscisa entera**.

Si tenemos en cuenta la gráfica de la función decimal



podemos observar que :

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} Dec(x) = 1$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} Dec(x) = 0$$

Por tanto, no existe $\lim_{x \to n} Dec(x)$ por ser los límites laterales distintos.

En consecuencia, la función $f(x) = Dec(x) = Mant(x)$ no es continua en ningún punto de abscisa entera.

CONSECUENCIAS DE LA CONTINUIDAD EN UN PUNTO.

1. **Si una función es continua en un punto, entonces tiene límite en dicho punto.**

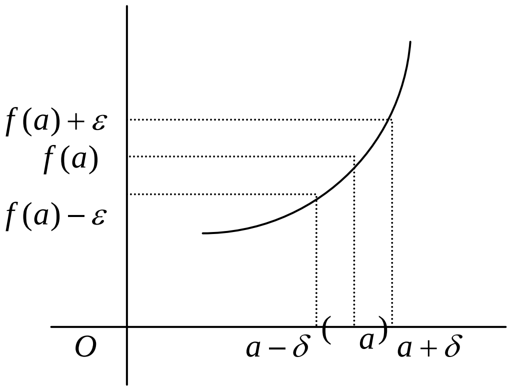
   Esta propiedad es consecuencia directa de la definición de la continuidad.

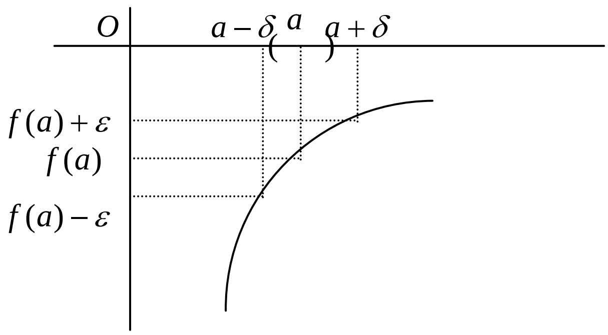
2. **Continuidad y acotación.**

   Si una función es continua en un punto $x = a$, entonces está acotada en ese punto, es decir, existe un entorno simétrico de $x = a$ en el que la función está acotada.

3. **Continuidad y signo de una función.**

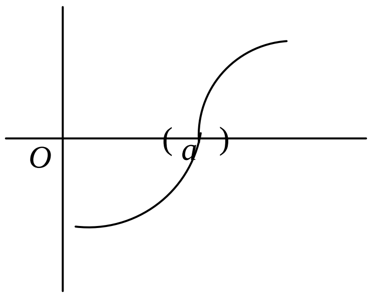
   Si f es continua en un punto $x = a$ y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de $x = a$ en el cual los valores de f tienen el mismo signo que $f(a)$.

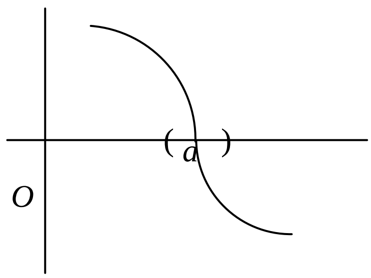




4. **Continuidad y anulación de una función.**

   Si una función es continua en un punto $x = a$ y toma valores positivos y negativos en cualquier entorno simétrico de $x = a$, la función se anula en él.





DISCONTINUIDADES.

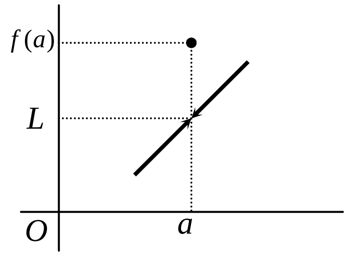
Una función es continua en un punto $x = a$ si, y solo si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si esto no se cumple por alguno de los motivos apuntados anteriormente, diremos que la función es discontinua en dicho punto.

Una función es discontinua en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor que toma la función en el punto.

Para la clasificación de las discontinuidades tendremos en cuenta la existencia o no de los límites laterales en el mismo.

Discontinuidad evitable.



Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama ***verdadero valor*** de la función en el punto.

Para evitar la discontinuidad de la función definimos una nueva a partir de la que tenemos, de la siguiente manera:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & si\ \ x \neq a \\ L & si\ \ x = a \end{cases}$$

es decir, definimos la nueva función igual que la función que tenemos en todos los puntos donde no hay problema y en el punto donde presenta la discontinuidad le asignamos el valor del límite.

Ejemplo:

- Hallar el verdadero valor de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en el punto $x = 3$.

Si observamos la función, resulta que no está definida en el punto $x = 3$ pero si calculamos el límite de la función en ese punto, obtenemos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$$

que sería el verdadero valor de la función en ese punto. La nueva función

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & si\ \ x \neq 3 \\ 1 & si\ \ x = 3 \end{cases}$$

sería continua en el punto $x = 3$.

Discontinuidad inevitable.

Una función tiene una ***discontinuidad inevitable*** en un punto cuando no existe límite de la función en dicho punto.

Podemos distinguir dos casos:

- *Que existiendo los límites laterales, éstos son finitos y distintos.*
  En este caso la discontinuidad evitable se denomina de **salto finito**, siendo el salto la diferencia entre los límites laterales de la función en el punto.

Salto = $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$

Geométricamente, el salto es la altura que hay que subir (salto positivo) o bajar (salto negativo) en el punto $x = a$ al recorrer la gráfica de la función de izquierda a derecha.

- *Que alguno o los dos límites laterales sea infinito.*

  En este caso la discontinuidad inevitable se denomina de **salto infinito.**

<u>Ejemplo</u>

• Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si \;\; x \leq 1 \\ 3-2x & si \;\; x > 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

Para estudiar la continuidad en el punto $x = 1$, analizamos si se verifican los tres puntos de los que hablamos con anterioridad:

1. La función está definida en el punto $x = 1$: $f(1) = 4$
2. Estudiamos la existencia del límite en $x = 1$, para lo cual tenemos que recurrir a calcular los límites laterales en él puesto que en dicho punto existe un cambio de definición de la función

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x+1) = 4 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3-2x) = 1$$

Al ser los límites laterales distintos, la función no tiene límite en dicho punto.

En consecuencia, en $x = 1$, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito:

$$\textbf{salto} = \lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3$$

Si observamos los valores de los límites laterales, vemos que el límite a la izquierda coincide con el valor que toma la función en el punto, por lo que la función tiene una continuidad lateral a la izquierda en el punto $x = 1$.

<u>CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.</u>

Una función es continua en un intervalo abierto (a,b) si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

Una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) y, además, es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*.

Igualmente podemos definir la continuidad en los intervalos semiabiertos:

Una función es continua en un intervalo $(a,b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) y, además, es continua a la izquierda en *b*.

Una función es continua en un intervalo $[a,b)$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b) y, además, es continua a la derecha en *a*.

Ejemplo.

1. La función $f(x) = x^2$ es continua en todo su dominio *R* y, por tanto, en cualquier intervalo abierto de *R*.
2. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está definida en el punto *x* = 0: su dominio de definición es

$$Dom(f) = R - \{0\} = R^*$$

Para cualquier intervalo abierto (a,b) que no contenga el 0, *f*(*x*) es continua en todos sus puntos y diremos que la función es continua en el intervalo abierto (a,b), p.e. (3,5). Sin embargo, no será continua en cualquier intervalo que contenga a dicho punto, p.e., $(-a,a)$.

Continuidad y operaciones.

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones y de los límites, podemos deducir las siguientes propiedades:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, entonces la función $(f+g)(x)$ es continua en $[a,b]$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, entonces la función $(f\cdot g)(x)$ es continua en $[a,b]$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, y $g(x)$ no se anula en $[a,b]$, entonces la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en $[a,b]$.

- Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces $(\alpha\cdot f)(x)$ es continua en $[a,b]$, para todo $\alpha\in$ R.

- Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $g(x)$ es continua en $f([a,b])$, entonces la función $(g\circ f)(x)$ es continua en $[a,b]$.

- La función “valor absoluto” es continua en todo $\Re$

En resumen:

Las operaciones con funciones continuas tienen como resultado otra función continua, siempre que tenga sentido la operación.

Ejemplo.-

Las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x + 2$ son funciones continuas en todo el conjunto de números reales R; en consecuencia, las funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = x^2\cdot(3x+2)$$

son continuas en R. Sin embargo, la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2+1}{3x+2}$ no es continua en R ya que en el punto $x=-\frac{2}{3}$ no está definida.

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES MÁS USUALES.

1. **La función constante $f(x) = k$ es continua en *R*.**

En efecto, sea un número cualquiera $a\in$ ***R*** y estudiemos la continuidad de la función constante en dicho punto:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} k = k = f(a)$$

Por tanto, la función es continua en el punto $a\in$ ***R*** y como "*a*" es un número real cualquiera, la función es continua para cualquier valor real, es decir, es continua en ***R***.

2. **La función identidad $f(x) = x$ es continua en *R*.**

En efecto, sea un número cualquiera $a\in$ ***R*** y estudiemos la continuidad de la función identidad en dicho punto:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x = a = f(a)$$

Por tanto, la función es continua en el punto $a\in$ ***R*** y como "*a*" es un número real cualquiera, la función es continua para cualquier valor real, es decir, es continua en R.

3. **La función potencial $f(x) = x^n$, $n\in$N, es continua en *R*.**

Si tenemos en cuenta que $f(x)=x^n = x\cdot x\cdot \cdots^{(n)}\cdots \cdot x$, la función potencial es un producto de n funciones continuas y, por tanto, será otra función continua.

4. **La función polinómica $f(x)=a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1}+ \cdots + a_1\cdot x + a_0$, $a_i\in$*R*, es una función continua en *R*.**

La función polinómica está formada por la suma de un número finito de productos de una función constante por una función potencial: si tenemos en cuenta que el producto de funciones continuas es otra función continua y la suma de funciones continuas también es continua, la función polinómica será continua en todo ***R***.

5. **La función racional $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo su dominio, es decir, en todo *R* menos en aquellos valores que anulen el denominador.**

El dominio de la función racional está formado por todos los números reales que no anulan el denominador de la fracción:

$$Dom(f) = R - \{x\in R / Q(x)=0\}$$

Entonces, $\forall a\in Dom(f)$ se verifica que:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}=f(a)$$

y la función es continua en $a \in Dom(f)$ y como a es un punto cualquiera del dominio, será continua en éste.

EJERCICIOS.

1. Representar la función siguiente e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

2. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = sig(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2} \qquad f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ \ x < 0 \\ x+1 & si\ \ x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & si\ \ x \le 2 \\ 2x-6 & si\ \ x > 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ \ x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si\ \ x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \in \left]-4,-2\right[\\ 1+3x & \text{si } x \in [-2,1] \\ x^2 & \text{si } x \in \left]1,5\right] \end{cases} \qquad f(x) = |x^2 - 1| \qquad f(x) = x \cdot |x|$$

5. Probar que la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ no es continua en $x = 1$ e indicar que tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\le 0 \\ x+2a & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad\qquad f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

7. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=x-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-x}$ y decir si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

8. Dada la función $f: R\to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)+\cos(x-1), & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}, & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Determinar los puntos en los que la función f es continua.

9. Estudiar la continuidad de la función $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por

$$f(x)=\left|2x-|3-2x|\right|$$

y representarla gráficamente.

10. Consideremos la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{Ln(x)}, & \text{si } x\ne 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

donde $Ln(x)$ denota el logaritmo neperiano de x,

a) Determinar el dominio de definición de la función f.
b) Determinar el conjunto de puntos en el que f es continua.
c) Determinar las asíntotas de f.

11. Una función continua definida para todo x real en el intervalo $(-1,1)$ está definida por $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ si $x\ne 0$. Hallar, razonadamente, el valor de $f(0)$.

Del conocimiento de la continuidad en un intervalo cerrado se obtienen importantes resultados. Las hipótesis de los teoremas que veremos más adelante exigen la continuidad de la función en un intervalo cerrado $[a,b]$; si esta continuidad deja de cumplirse en un sólo punto del intervalo, las tesis de los teoremas pueden no ser ciertas.

EJEMPLO:

1. La función $f(x) = \text{sen}(x)$ es continua en toda la recta real y, en consecuencia, en cualquier intervalo abierto o cerrado de la misma.
2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en cualquier intervalo que contenga al cero, ya que en dicho punto la función no está definida.
3. La función definida por $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ no es continua en el intervalo $[0,3]$ ya que los límites laterales en $x = 1$ son distintos.

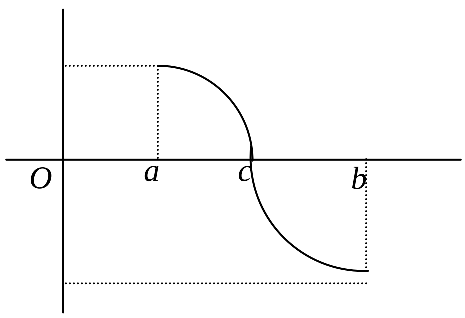
PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

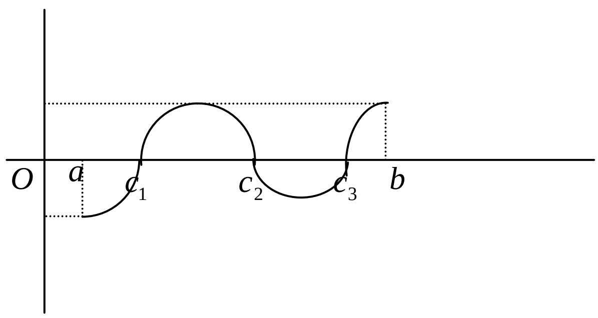
1. TEOREMA DE BOLZANO. (Teorema de las raíces)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que f(c) = 0.

$$\left. \begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ / \ f(c) = 0$$

Geométricamente este teorema nos viene a decir que la gráfica de la función f corta en algún punto al eje de abscisas ya que pasa de un punto situado por encima de él a otro que se encuentra debajo o recíprocamente.





La demostración de este teorema sería la siguiente:

Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, y consideremos el punto medio del intervalo $[a,b]$: $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Si la función se anula en este punto, el teorema estará demostrado. En caso contrario, en uno de los dos intervalos en que se descompone el inicial, la función toma valores de signo opuesto en los extremos. Sea I_1 este intervalo. Si la función f no se anula en el punto medio de este intervalo, se construye otro intervalo I_2 tal que la función tome valores de signo opuesto en los extremos.

Repitiendo sucesivamente esta operación, obtenemos una sucesión $\{I_n\}$ de intervalos encajados

$$[a,b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

tales que la amplitud de cada uno es la mitad del anterior y en los extremos de cada intervalo la función f toma valores de signo opuesto. Cuando "n" crece indefinidamente, la amplitud de los intervalos convergerá a cero y nos definirá un punto que llamaremos "c".

Veamos que $f(c) = 0$:

Si $f(c) \neq 0$, por ser f continua en el punto c habría un entorno de c en el cual la función tomaría el mismo signo que $f(c)$. Sin embargo dentro de ese entorno habría intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, para los cuales se estaría verificando que la función toma valores de signo opuesto en los extremos, en contra de que la función tiene el mismo signo que $f(c)$.

En consecuencia, ***f*** **se anula en el punto *x* = *c*.**

El teorema de Bolzano nos sirve de gran ayuda en la comprobación de la existencia de ceros en una función y en su localización: *Si la función **f** es continua y conseguimos encontrar dos puntos en los cuales la función toma valores de signo opuesto, por el teorema de Bolzano podemos afirmar que en el intervalo que dichos puntos determinan existe al menos un cero de la función.*

2. Teorema de los valores intermedios.(Darboux)

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y k es un número comprendido entre los valores f(a) y f(b), entonces existe al menos un punto interior c del intervalo en el que f(c) = k.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \;/\; f(c) = k$$

Este teorema es consecuencia del anterior y lo podríamos demostrar sin más que considerar una nueva función $g(x) = f(x) - k$ que cumpliría las condiciones del teorema de Bolzano:

- $g(x)$ es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de dos funciones continuas en $[a,b]$.
- Supuesto que $f(a) < f(b)$, entonces:

$$g(a) = f(a) - k < 0 \qquad g(b) = f(b) - k > 0$$

Se verifican, por tanto, las hipótesis del teorema de Bolzano y, en consecuencia, también se verificará la tesis, es decir:

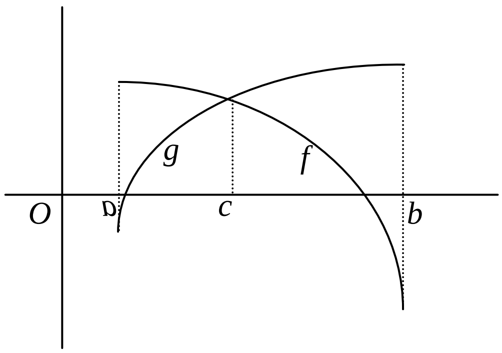
$$\exists\, c \in (a,b) \,/\, g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(c) = f(c) - k = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = k$$

El teorema de los valores intermedios nos viene a decir que si la función ***f*** es continua en $[a,b]$, entonces ***f*** toma cualquier valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

Otra consecuencia del teorema de Bolzano sería la siguiente:

3. ***Si f y g son funciones continuas en el intervalo*** $[a,b]$ ***y se verifica que*** $f(a) < g(a)$ ***y*** $f(b) > g(b)$***, entonces existe un número*** $c \in (a,b)$ ***tal que*** $f(c) = g(c)$**.**

Geométricamente esto significaría que las gráficas de las funciones ***f*** y ***g*** se cortan en el punto $c \in (a,b)$.



4. Continuidad y acotación.

Una función puede ser continua en un intervalo abierto o semiabierto y no estar acotada, como ocurre en el caso de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo (0,1].

Sin embargo, si el intervalo es cerrado, la función estará acotada y existirá una banda limitada por dos rectas $y = k$ e $y = k'$ que contendrá la gráfica de la función.

Este resultado podemos enunciarlo de la siguiente forma:

Teorema.

Si f es continua en $[a,b]$ ***entonces está acotada en dicho intervalo.***

Demostración.

Para demostrar este teorema utilizaremos el método de los intervalos encajados y procederemos por reducción al absurdo, es decir, supondremos que la función no está acotada en el intervalo $[a,b]$ y llegaremos a una contradicción. Por tanto, llegaremos a la conclusión de que la función ***f*** tiene que estar acotada en el intervalo $[a,b]$.

En efecto, si *f* no está acotada en $[a,b]$, tampoco lo estará en una de sus dos mitades :

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

Vamos a llamar $\left[a_1,b_1\right]$ al subintervalo en el que se verifica esto y procedamos, en él, de la misma forma que en $\left[a,b\right]$. Repitiendo la operación sucesivamente obtenemos una sucesión de intervalos encajados

$$\left[a,b\right]\supset\left[a_1,b_1\right]\supset\left[a_2,b_2\right]\supset\ \cdots\ \supset\left[a_n,b_n\right]\supset\ \cdots$$

donde cada uno de ellos tiene de amplitud la mitad del anterior y en cada uno de los cuales la función no está acotada. Cuando n crece indefinidamente, la amplitud de los intervalos convergerá a cero y esta familia de intervalos encajados nos definirá un punto c:

$$a\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le c\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1\le b$$

En un entorno de este punto c se produce la contradicción: Por ser f continua en dicho punto c debe estar acotada en $E(c,\delta)$ para algún valor de δ y, dentro de ese entorno habrá algún intervalo $\left[a_n,b_n\right]$ en los que habíamos supuesto que f no estaba acotada.

La única forma de que no se produzca esta contradicción es que f esté acotada en el intervalo $\left[a,b\right]$.

Este teorema se utilizaría para demostrar el siguiente

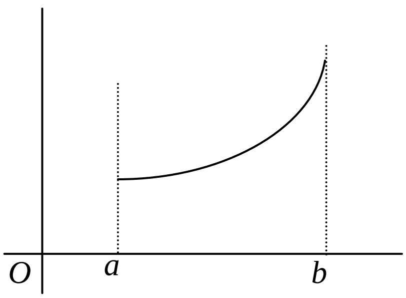
<u>Teorema de Weierstrass.</u>

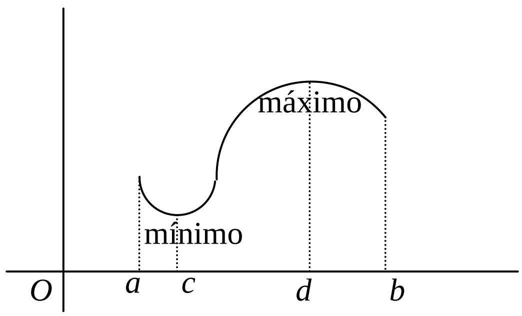
"Una función f continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$ alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo"

Esto significa que existen sendos números c y d del intervalo para los cuales se cumple que:

$$f(d)\le f(x)\le f(c) \qquad \forall x\in\left[a,b\right]$$

Gráficamente:





<u>Demostración.</u>

Sea $A = f([a,b])$ el recorrido de la función. Por ser f una función continua definida en un cerrado, la función estará acotada en él y, por tanto, existirán el extremo inferior ***m*** y el extremo superior ***M*** del conjunto *A*.

Si ***M*** es un valor de la función *f* en el intervalo $[a,b]$, el teorema estaría demostrado y ***M*** sería el máximo de la función en dicho intervalo.

Si ***M*** no es un valor de la función *f* en el intervalo $[a,b]$, el valor $M - f(x) \neq 0$ para todo valor *x* del intervalo $[a,b]$, y la función auxiliar $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ definida en el intervalo $[a,b]$, sería continua en él y, en consecuencia, acotada en dicho intervalo, es decir:

$$\exists K \in R \,/\, g(x) \leq K \quad \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow\; \frac{1}{M - f(x)} \leq K \quad \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x) \leq M - \frac{1}{K} \quad \forall x \in [a,b]$$

Esto nos indicaría que ***M*** no sería extremo superior de *f*, en contra de lo que habíamos supuesto.

Por tanto, existe al menos un valor c del intervalo $[a,b]$, en el cual $f(c) = M$ y, en consecuencia, ***M*** sería máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

De análoga manera podríamos demostrar la existencia del mínimo absoluto.

- **Si $g(x)$ es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2 - 1}$?**

La función $f(x)$ dada es un cociente de dos funciones polinómicas, continuas ambas en todo el conjunto de números reales. Por tanto, $f(x)$ será una función continua en todos los puntos en los cuales la operación cociente tenga sentido.

Teniendo en cuenta que el polinomio denominador se anula en los puntos $x = 1$ y $x = -1$, la función $f(x)$ es continua en R salvo los puntos $x = 1$ y $x = -1$

$$\text{Dominio de continuidad de } f = R - \{-1, +1\}$$

- **¡¡¡NO!!! Sea f una función de la que se sabe que**

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2},\quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^2},\quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^2},\ \cdots,\quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

para todo número natural n.
Si f es continua en el origen, ¿qué puede asegurarse del valor de f en el origen, $f(0)$?

Si f es continua en el origen, se verificará que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$: el límite de la función en el punto debe coincidir con el valor que toma la función en dicho punto. En consecuencia, calculando el límite de la función cuando $n \to +\infty$, ya que $\dfrac{1}{n} \to 0$, tenemos:

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

En consecuencia, podemos afirmar que $f(0) = 0$.

- **Demostrar que la ecuación $x^3 - 5x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1,2]$.**

La función $f(x) = x^3 - 5x + 3$ es una función continua en todo R y, por tanto, en el intervalo $[1,2]$, por ser polinómica.

Además, se verifica que: $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = +1$

En consecuencia, se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano (tenemos una función continua en un cerrado que toma valores de signo opuesto en los extremos del mismo) y, por tanto, también se cumplirá la tesis:

$$\exists c \in [1,2] / f(c) = 0$$

y nuestra ecuación tiene una solución en el intervalo $[1,2]$.

- **La función** $f(x) = \text{tg}\,x$ **toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

  La función $f(x) = \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ es continua en todo R menos en los puntos en los que se anula la función coseno y, dentro del intervalo dado, existe un punto en el que se anula $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

  En consecuencia, la función tangente no es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

  Se verifica que: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \text{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$

  No se cumplen las hipótesis de Bolzano y, por tanto, tampoco se cumplirá la tesis.

  En consecuencia, no se contradice el teorema ya que si no se cumplen las hipótesis, no se cumplirá la tesis.

- **Sea la función** $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x^2 + x}$. **¿Se puede afirmar que existe al menos un punto c en el intervalo (1,2) tal que** $\boldsymbol{f(c) = 2}$ **?**

  Consideremos la función auxiliar $\boldsymbol{g(x) = f(x) - 2 = x^3 - x^2 + x - 2}$ y veamos si cumple las hipótesis del teorema de Bolzano:

  - ***g*(*x*) es continua** en el intervalo [1,2] ya que al ser polinómica es continua en *R* y, en consecuencia, en el intervalo [1,2].
  - $\left.\begin{array}{l} g(1) = -1 \\ g(2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo.

  Por tanto, ***g*(*x*)** cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Entonces:

  $$\exists\, c \in (1,2) \;/\; g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) - 2 = 0$$

  De donde se deduce que $f(c) = 2$.

EJERCICIOS.

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0,\pi]$.
2. Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna raíz real y localizarla.
3. ¿Es cierto que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene al menos una raíz comprendida entre 1 y 2? Razónese la respuesta y enúnciese el resultado que se utiliza en su resolución.
4. Si el término independiente de un polinomio en x es igual a -5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razonar que hay algún punto del intervalo [0,3] en el que el polinomio toma el valor 2.
5. Se puede afirmar que la ecuación $\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real? Si la respuesta es afirmativa, hallar un intervalo en el cual se encuentre dicha raíz.
6. Si $f(x)$ es una función definida en $[a,b]$, continua en $x = a$ y $x = b$ y tal que $f(a)\cdot f(b) < 0$, ¿podemos asegurar que existe un c del intervalo abierto (a,b) tal que $f(c) = 0$? Razonar la respuesta.
7. Si $f(x)$ es continua en [1,9] y es tal que $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$ ¿podemos asegurar que en estas condiciones la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en [1,9]? Razonar la respuesta.
8. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

   a) ¿Es f continua en (1,2]?

   b) ¿Está acotada en dicho intervalo?

   c) ¿Tiene algún máximo o mínimo absolutos?

   d) ¿Se contradice el Teorema de Weierstrass?
9. Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.
10. Para cada una de las funciones siguientes, indicar si está acotada superior o inferiormente dando una cota. Decid si alcanza su máximo o su mínimo:
    - $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1,1]$
    - $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $[2,5]$
    - $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $[0,2]$
    - $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ en $(-\infty,+\infty)$