FUNCIONES DERIVABLES. PROPIEDADES.

TASA DE VARIACION MEDIA.

Dada una función $y = f(x)$ se llama **TASA DE VARIACIÓN** o **INCREMENTO de *f*** a la variación que experimenta *f* cuando la variable independiente pasa de "a" a "$a + h$".

$$\Delta f(a,h) = f(a+h) - f(a)$$

Por el mismo motivo h recibe el nombre de incremento de x o variación de x.

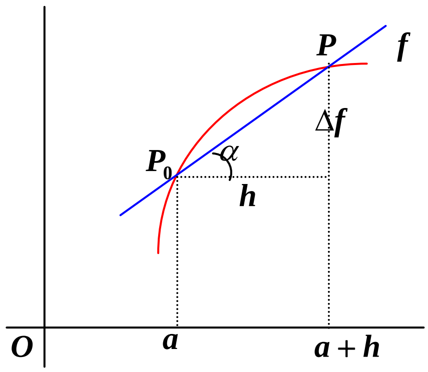
Esta tasa de variación o incremento de una función nos da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece la función en un intervalo, aunque no es lo suficientemente precisa.

Para tener una idea más exacta necesitaríamos conocer cuanto crece la función por cada unidad que crece la variable x. Este dato más preciso es la tasa de variación media.

La **TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.)** nos viene dada por el cociente incremental siguiente:

$$T.V.M. = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y significa la variación relativa de f con relación a x en el intervalo $[a, a+h]$.



Gráficamente:

La tasa de variación media es la pendiente de la recta que pasa por los puntos *P* y *P'*.

DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

El límite

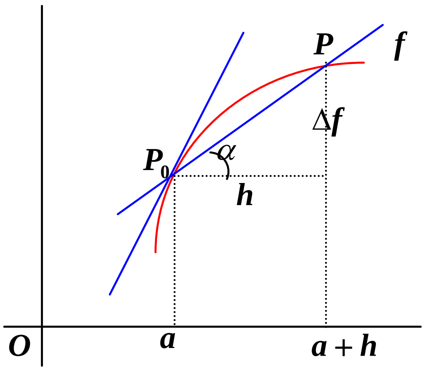
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(a,h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si existe y es finito, recibe el nombre de **DERIVADA** de la función en el punto "a" y representa la variación de la función *f* en el punto $x = a$. Se representa por $f'(a)$.

Si en la definición anterior hacemos $a + h = x \Rightarrow h = x - a$: cuando h tiende a cero, entonces x tiende a "a" y la derivada de la función en el punto a nos queda de la forma:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Geométricamente, si vamos acercando el punto P hacia el punto P_0 (h tiende a cero), la recta



secante se transforma en tangente a la gráfica de la función. En consecuencia, **la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = a$.**

$$m_t = f'(a)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$ nos viene dada por:

$$y - f(a) = f'(a).(x - a)$$

NOTA: Para calcular la ecuación de la recta tangente utilizamos la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m.(x - x_1)$

La normal a una curva en un punto P es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, la pendiente de la normal será $m_N = -\dfrac{1}{f'(a)}$ y la ecuación de la normal nos viene dada por:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

EJEMPLOS.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Calculamos la derivada de la función dada en el punto que nos indican. Aplicando la propia definición tendremos:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2^3 + 3.2^2 h + 3.2h^2 + h^3) - 2^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.2^2 h + 3.2h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h.(3.2^2 + 3.2h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} (3.2^2 + 3.2h + h^2) = 3.2^2 = 12$$

En consecuencia, $f'(2) = 12 \Rightarrow m_t = f'(2) = 12$ y $m_N = -\dfrac{1}{f'(2)} = -\dfrac{1}{12}$

Una vez que hemos obtenido las pendientes de las rectas tangente y normal a la curva, podemos escribir sus ecuaciones, utilizando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

Si tenemos en cuenta que el punto de tangencia tiene por coordenadas $\mathbf{(2, f(2)) \equiv (2, 8)}$, las ecuaciones de las rectas pedidas son:

Ecuación de la recta tangente: $y-8=12.(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=2x-16$

Ecuación de la recta normal: $y-8=-\dfrac{1}{12}\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=-\dfrac{1}{12}\cdot x+\dfrac{49}{6}$

2. **Dada la parábola de ecuación $y=x^2-8x+12$, hallar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas.**

Calculamos la derivada de la función dada en un punto cualquiera x:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2-8x+12)-(x^2-8x+12)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2-8x-8h+12)-(x^2-8x+12)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-8h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h.(2x+h-8)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-8)=2x-8$$

Como la tangente es paralela al eje de abscisas, las dos rectas tendrán igual pendiente: si tenemos en cuenta que la pendiente del eje de abscisas es igual a cero, al igualar la derivada a cero nos queda:

$$m_t = f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x-8=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

Obtenida la abscisa del punto de tangencia, la ordenada correspondiente del punto la obtenemos sustituyendo en la función: $f(4)=4^2-8.4+12=-4$

En consecuencia, el punto de tangencia tiene por coordenadas $(4, -4)$.

DERIVADAS LATERALES.

Puesto que la derivada de una función en un punto la definimos mediante el límite de una función (TVM) en un punto $x = a$, podemos considerar la existencia de límites laterales en dicho punto. Aparece así el concepto de derivadas laterales.

Derivada por la izquierda.

Se llama derivada por la izquierda de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

La derivada por la izquierda en el punto $x = a$ se representa por $f'(a^-)$

Derivada por la derecha:

Se llama derivada por la derecha de la función f en el punto $x = a$ al siguiente límite, si es que existe:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

La derivada por la derecha en el punto $x = a$ se representa por $f'(a^+)$.

Evidentemente, una función es derivable en un punto sí, y sólo sí, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales son iguales.

Si las derivadas laterales existen pero no coinciden, se debe a que la función tiene un ***punto anguloso***. Este es el caso de la función $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ que en el punto $x = 0$ tiene por derivadas laterales $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = +1$.

DERIVABILIDAD EN UN INTERVALO.

Una función es derivable en un intervalo abierto (a,b) si es derivable en cada uno de sus puntos.

Una función es derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es derivable en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a,b) y derivable por la derecha en $x = a$ y por la izquierda en $x = b$.

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

La derivabilidad es una propiedad de las funciones más restrictiva que la continuidad, ya que existen funciones continuas que no son derivables.

La implicación de que una función derivable es continua se demuestra en el siguiente

TEOREMA.

"Si una función es derivable en un punto (derivada finita), entonces es continua en dicho punto"

Demostración:

Sabemos que una función es continua en un punto a si

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = 0$$

En nuestro caso, tendremos que demostrar cualquiera de estos resultados:

$$\lim_{h\to 0}\left[f(a+h) - f(a)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Sin embargo, el recíproco de este teorema no es cierto: Una función continua en un punto no es necesariamente derivable en dicho punto.

Esto podemos verlo fácilmente estudiando la función $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$.

En efecto, esta función es continua en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Como $f(0) = 0$, entonces f es continua en $x = 0$.

Veamos ahora la derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = +1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

Por tanto, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

En consecuencia, las funciones derivables forman un subconjunto de las funciones continuas.

LA FUNCION DERIVADA.

Hasta ahora sólo hemos estudiado la derivada de una función en un punto y el resultado es un número real por tratarse de un límite.

Si una función f es derivable en un subconjunto D' de su dominio D ($D' \subseteq$ D), podemos definir una nueva función que asocie a cada elemento de D' su derivada en ese punto:

$$D' \xrightarrow{f'} R \;/\; x \in D' \xrightarrow{f'} f'(x) \in R$$

Esta nueva función así definida recibe el nombre de **FUNCIÓN DERIVADA** o, simplemente, **DERIVADA** y se representa por f'.

A partir de la función derivada primera se puede definir, si existe, también su derivada que recibe el nombre de ***derivada segunda*** y se representa por f''.

Análogamente se definirían la derivada tercera, cuarta, quinta,..., n-ésima, y se representarían por $\boldsymbol{f'''(x),\ f^{(4}(x),\ f^{(5}(x),\ \dots,\ f^{(n}(x)}$

Otras formas de representar las derivadas son:

$$\boldsymbol{Df,\ D^2 f,\ D^3 f,\ \dots,\ D^n f}$$

$$\boldsymbol{\frac{df}{dx} = f',\ \frac{d^2 f}{dx^2} = f'',\ \dots,\ \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n}}$$

REGLAS DE DERIVACION.

Aplicando la definición de derivada a las cuatro operaciones definidas entre funciones (adición, multiplicación, producto por un número y composición) obtenemos las reglas de derivación de ellas. Aplicando la misma definición a algunas funciones elementales obtenemos también fórmulas de derivación para ellas.

Estos resultados, de todos conocidos, los reunimos en la siguiente tabla:

- Reglas de Derivación:

OPERACIONES	REGLA
SUMA Y DIFERENCIA	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
PRODUCTO	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
COCIENTE	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
Producto por un número	$(k.f)' = k.f'$
COMPOSICIÓN	$(g \circ f)' = g'(f(x)).f'(x)$

A modo de ejemplo, podríamos comprobarlas con la suma y diferencia:

Suponiendo que las funciones *f* y *g* sean derivables, tenemos:

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \pm g)(x+h) - (f \pm g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \pm [g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x) \pm g'(x)$$

Derivadas de Funciones Elementales:

TIPOS	FORMAS	
	SIMPLES	COMPUESTAS
Constante: $f(x)=k$	$f'(x)=0$	
F. Identidad: $f(x)=x$	$f'(x)=1$	
Potencial	$Dx^n = n.x^{n-1}$	$Df^n = n.f^{n-1}.f'$
Potencial	$Dx^\alpha = n.x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R$	$Df^\alpha = n.f^{\alpha-1}.f', \quad \alpha \in R$
Logarítmico	$D(Lx)=\frac{1}{x}$	$D(Lf)=\frac{f'}{f}$
	$D\log_a x = \frac{1}{x}\cdot \log_a e$	$D\log_a f = \frac{f'}{f}\cdot \log_a e$
Exponencial	$D(e^x)=e^x$	$D(e^f)=f'.e^f$
	$D(a^x)=a^x.La$	$D(a^f)=f'.a^f.La$
Potencial-exponencial	$D\, f^g = g.f^{g-1}.f' + g'.f^g.Lf$	
Raíz Cuadrada	$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\sqrt{f} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$
Seno	$D\,\text{sen}\, x = \cos x$	$D\,\text{sen}\, f = f'\cdot \cos f$
Coseno	$D\cos x = -\text{sen}\, x$	$D\cos f = -f'\cdot \text{sen}\, f$
Tangente	$D\,\text{tg}\, x = 1+\text{tg}^2 x$	$D\,\text{tg}\, f = f'.(1+\text{tg}^2 f)$
	$D\,\text{tg}\, x = \sec^2 x$	$D\,\text{tg}\, f = f'.\sec^2 f$
	$D\,\text{tg}\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D\,\text{tg}\, f = \frac{f'}{\cos^2 f}$
Cotangente	$D\text{ctg}\, x = -(1+\text{ctg}^2 x)$	$D\text{ctg}\, f = -f'.(1+\text{ctg}^2 f)$
	$D\text{ctg}\, x = -\text{cosec}^2 x$	$D\text{ctg}\, f = -f'\cdot \text{cosec}^2 f$
	$D\text{ctg}\, x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$	$D\text{ctg}\, f = -\frac{f'}{\text{sen}^2 f}$
Arco seno	$D\,\text{arcsen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\,\text{arcsen}\, f = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco coseno	$D\,\text{arccos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\,\text{arccos}\, f = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
Arco tangente	$D\,\text{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\,\text{arctg}\, f = \frac{f'}{1+f^2}$
Arco cotangente	$D\,\text{arcctg}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$	$D\text{arcctg}\, f = -\frac{f'}{1+f^2}$

- Dada la función $f : R \longrightarrow R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 6x, & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Determina los puntos en los que la función *f* es derivable y en cada uno de ellos calcula su derivada.

- Nuestra función *f* es una función definida a trozos en cada uno de los cuales está definida como una función cuadrática o como función lineal. Tanto una como la otra son funciones continuas y derivables en todo *R* y, por tanto, en el trozo en el que están definidas.
  En consecuencia, la función *f* es continua y derivable en $R - \{0,3\}$ por serlo las funciones mediante las que está definida.
  Estudiemos la continuidad y la derivabilidad de la función *f* en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.
- **En $x = 0$:**
  Como en este punto hay un cambio de definición de la función, para estudiar la existencia de límite en él tendremos que calcular los límites laterales de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

  Por otra parte, $f(0) = 0$ y la función sería continua en el punto $\boldsymbol{x = 0}$**.**

  Estudiemos la derivabilidad: tendremos que calcular las derivadas laterales

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

- **En $x = 3$.**

  Continuidad: operamos de igual manera que en $x = 0$**.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2) = 9 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(6x) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \text{ no existe } \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

  Por tanto, la función no es continua en $x = 3$ (presenta en este punto una discontinuidad inevitable de salto finito) y, en consecuencia, será no derivable en él.

- La derivada de la función *f* nos vendría dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x, & \text{si } x<0 \\ 0, & \text{si } x=0 \\ 2x, & \text{si } 0<x<3 \\ 6, & \text{si } 3<x \end{cases}$$

- **Dada la función $f: R \to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} (x-1)+\cos(x-1) & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$**

Determinar los puntos en los que *f* es continua y los puntos en los que *f* es derivable.

<u>Continuidad:</u>

Para valores menores y mayores que 1, la función es continua pues está definida mediante funciones continuas en todo el conjunto de números reales y tienen sentido las operaciones.

Estudiamos la continuidad en el punto $x = 1$, empezando por calcular los límites laterales de la función en dicho punto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[(x-1)+\cos(x-1)\right]=(1-1)+\cos(1-1)=\cos 0=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}1=1$$

Al ser los límites laterales iguales, la función tiene límite en el punto $x = 1$ y es igual a 1.

Por otra parte, $f(1)=(1-1)+\cos(1-1)=\cos 0=1$

Entonces, se verifica que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ y la función es continua en el punto x=1.

Por tanto, el dominio de continuidad de la función *f* es *R.*

<u>Derivabilidad:</u>

Para valores menores y mayores que 1, la función es derivable pues está definida mediante funciones derivables en todo el conjunto de números reales.

La derivada de la función para valores distintos de 1 es

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\operatorname{sen}(x-1) & \text{si } x<1 \\ \dfrac{(x-1)\cos(x-1)-\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad de la función en el punto $x = 1$ calculando los límites laterales de $f'(x)$ en $x = 1$:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[1-\operatorname{sen}(x-1)\right]=1-\operatorname{sen}(1-1)=1-\operatorname{sen}0=1$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cos(x-1)-\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cos(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left[\cos(x-1)-1\right]}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos(x-1)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2\operatorname{sen}^2\dfrac{x-1}{2}}{x-1}=$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-2\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2\cdot\frac{(x-1)^2}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{x-1}{2}\right) = 0$$

En consecuencia, las derivadas laterales en el punto $x = 1$ son distintas y la función no sería derivable en dicho punto.

El dominio de derivabilidad de la función ***f*** sería $\boldsymbol{R - \{1\}}$**.**

- **Estudia, según los valores del parámetro *a*, la continuidad y derivabilidad de la función $\boldsymbol{f : R \to R}$ definida por**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } \; x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } \; x > 2 \end{cases}}$$

Para cualquier valor distinto de 2, la función *f* está definida como función cuadrática en cada uno de los segmentos, para cualquier valor del parámetro *a*. Como las funciones cuadráticas son continuas y derivables en todo *R*, también lo serán en cualquier intervalo abierto de *R* y, por tanto, la función *f* será continua y derivable, para cualquier valor del parámetro *a*, en $R - \{2\}$.

Estudiemos la continuidad de *f* en el punto 2:

Para que sea continua tiene que existir límite en el punto 2 y, para ello, los límites laterales tienen que ser iguales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2 + ax) = 4 + 2a$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(a - x^2) = a - 4$$

Igualando estos límites laterales obtenemos:

$$4 + 2a = a - 4 \quad \Rightarrow \quad a = -8$$

En consecuencia, la función sería continua en el punto 2 si $a = -8$. Para este valor del parámetro la función nos queda de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & \text{si } \; x \le 2 \\ -8 - x^2 & \text{si } \; x > 2 \end{cases}$$

y su derivada, salvo en el punto 2, es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8 & \text{si } \; x < 2 \\ -2x & \text{si } \; x > 2 \end{cases}$$

Calculamos la derivada en el punto 2:

$$\left.\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-}(2x - 8) = -4 \\ f'(2^+) &= \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+}(-2x) = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^-) \Rightarrow \exists f'(2) = -4$$

La función es derivable en el punto $x = 2$.

- En resumen:

Si $a \neq -8,$ la función es continua y derivable en $R - \{2\}$.

Si $a = -8,$ la función es continua y derivable en R.

RELACIÓN DE PROBLEMAS.

1. Hallar la ecuación de la tangente a las curvas en los puntos que se indican:
   $f(x)=3x^2+8$ en el punto $P(1,11)$.
   $f(x)=x^5+1$ en el punto $P(0,1)$
   $f(x)=3^{2x^2+1}$ en el punto de abscisa $x=0$.
   $f(x)=x.e^x$ en el punto de abscisa $x=0$.
2. Escribid la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x\cdot y=1$ en el punto de abscisa $x=3$.
3. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?
4. Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$.
5. Buscar los puntos de la curva $y=x^4-7x^3+13x^2+x+1$ que tienen la tangente formando un ángulo de 45º con el eje de abscisas.
6. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le 1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$ Dibujar la gráfica.
7. Demostrar que la función $f(x)=|x-2|$ no puede tener tangente en el punto de abscisa $x=2$
8. Dada la función $f(x)=x\cdot|x|$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Representar gráficamente los resultados.
9. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=(1-|x|)^2$ en el intervalo $[-1,1]$.
10. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=|\cos x|$ en el intervalo $[0,\pi]$.
11. Halla la derivada de la función
$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot \text{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$
    ¿Es f' continua en $x=0$? ¿Es f' derivable en $x=0$?
12. Calcula *m* y *n* para que la función
$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+m & \text{si } x\le 1\\ -x^2+nx & \text{si } x>1\end{cases}$$
    sea derivable en todo *R*.
13. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y, en caso de no sean derivables en algún punto, dar el valor de sus derivadas laterales:
$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{si } x<3\\ x^2-x+3 & \text{si } x\ge 3\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\le 1\\ 2x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$
14. Consideremos la función $f(x)=x\cdot g(x)$. Sabiendo que $g(x)$ es continua en 0, probar que $f(x)$ es derivable en 0 y calcular su derivada. (No se puede suponer que g es derivable; puede no serlo).