PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES.

Una serie de aspectos de la gráfica de una función vistos anteriormente (monotonía, máximos y mínimos) y otros que veremos posteriormente, pueden estudiarse fácilmente mediante derivadas. La mayor parte de las funciones elementales con las que trabajamos son derivables en casi todos los puntos de su dominio; es por esto por lo que en el presente tema trataremos de caracterizar dichos conceptos mediante derivadas.

FUNCIONES MONÓTONAS.

Recordemos que una función es monótona cuando es creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente.

Sea f una función definida de D en R y sea a un punto perteneciente a D.

$$f \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \textit{creciente} \\ \textit{estrictamente creciente} \\ \textit{decreciente} \\ \textit{estrictamente decreciente} \end{array} \right\} \text{en } a \in D \iff \forall x \in V(a,r): \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Tratemos ahora de caracterizar esta monotonía para funciones derivables.

De la tasa de variación media (T.V.M.) que aparece en la definición de la monotonía, podemos pasar a la derivada sólo con tomar límites. A partir de aquí, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA.

Sea f una función derivable en un punto $a \in D$. Si $f'(a) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en el punto a.

Demostración.

Puesto que existe $f'(a)$ y es positiva, entonces existirá el límite de la tasa de variación media y también será positivo:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

Teniendo en cuenta la relación entre el límite y el signo de una función: "Si una función tiene límite en un punto y es distinto de cero, entonces existe un entorno del punto en el que los valores que toma la función tienen el mismo signo que el límite". Entonces:

$$\exists V(a,r) \quad \text{en el que} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

y, por tanto, la función *f* es estrictamente creciente en *a*.

Un teorema análogo podríamos enunciar para el decrecimiento estricto.

Sea f una función derivable en un punto $a \in D$. Si $f'(a) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en el punto a.

La demostración de este teorema se haría de forma similar a la del anterior para funciones estrictamente crecientes.

Teniendo en cuenta los teoremas anteriores, para estudiar la monotonía de una función sólo tendremos que calcular su derivada y buscar los intervalos dónde ésta sea positiva (función estrictamente creciente) y dónde sea negativa (función estrictamente decreciente).

Si $f' > 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en el intervalo.

Si $f' < 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en el intervalo.

En los puntos cuya derivada es nula no se puede afirmar nada, ya que la función puede ser creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas. El siguiente criterio nos ayuda a estudiar este caso:

Sea $x = a$ un punto donde una función f tiene derivadas hasta el orden $2n+1$ (orden impar) en un entorno de dicho punto y que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2n}(a) = 0$.

Si $f^{(2n+1}(a) > 0$, entonces la función es estrictamente creciente en $x = a$.
Si $f^{(2n+1}(a) < 0$, entonces la función es estrictamente decreciente en $x = a$.

EJEMPLOS.

1. Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 4$.

Calculamos la derivada de la función dada: $f'(x) = 2x$.
Entonces:

- Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
- Si $x = 0$ no se puede afirmar nada.

2. Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = e^x$.

La derivada de la función dada es $f'(x) = e^x$.

Para cualquier valor $x \in R$ se verifica que $e^x > 0$. Luego, $f'(x) > 0$ en toda la recta real y nuestra función será creciente en todo su dominio.

3. Estudiar la monotonía de la función $f(x) = Lx$.

Calculamos su derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Como la función logarítmica sólo está definida para valores de $x > 0$, tendremos que $f'(x) > 0$ y la función será estrictamente creciente en todo su dominio.

4. Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x^3$.

Su derivada es $f'(x)=3x^2$. Por tanto, la función es estrictamente creciente para cualquier $x\neq 0$. En $x = 0$ no se puede aplicar el criterio anterior y tendremos que ver cual es la primera derivada que no se anula en él.
Tenemos que $f'(0)=f''(0)=0$ y $f'''(0)=6$. Aplicando el criterio segundo, como la primera derivada que no se anula en el punto $x = 0$ es de orden impar y es positiva, la función es estrictamente creciente en dicho punto y, por tanto, en todo *R*.

5. Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

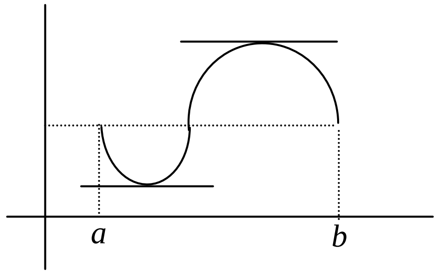
Puesto que el denominador siempre es positivo, el signo de la derivada depende exclusivamente del signo del numerador. Como éste se anula en los puntos $\left\{\begin{matrix} x=-4 \\ x=0 \end{matrix}\right\}$, el dominio se nos divide en los siguientes trozos: $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$.
Estudiemos el signo de la función derivada en cada uno de los intervalos obtenidos:
$\forall x\in(-\infty,-4): f'(x)>0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,-4)$.
$\forall x\in(-4,-2): f'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-4,-2)$.
$\forall x\in(-2,0): f'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-2,0)$.
$\forall x\in(0,+\infty): f'(x)>0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

TEOREMA DE ROLLE.

Si una función *f* verifica que:

- continua en un intervalo cerrado $[a,b]$
- derivable en el intervalo abierto (a,b)
- $f(a)=f(b)$: toma valores iguales en los extremos del intervalo

entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.



Geométricamente, este teorema expresa la existencia de un punto $c\in(a,b)$ tal que la recta tangente en $(c, f(c))$ es paralela al eje *OX*.

En el caso particular en que $f(a)=f(b)=0$, el teorema de Rolle podría enunciarse como sigue:

Entre cada dos raíces de una función derivable existe al menos una raíz de la función derivada.

A partir de este enunciado se podrá deducir cierta información sobre el número de raíces reales de una función f cuando conozcamos las de f':

- Si f' no tiene raíces reales, el número máximo de raíces de f será uno.
- Si f' tiene una raíz real, el número máximo de raíces de f será dos.
- Y así sucesivamente.

EJEMPLOS.

1. **Dada la función $f(x)=|x|$, comprobar que condiciones del teorema de Rolle se verifican en el intervalo $[-a,a]$.**

   Sabemos que la función valor absoluto es continua en todo su dominio R y, por tanto, también será continua en el intervalo $[-a,a]$.
   Por otra parte, también sabemos que la función valor absoluto no es derivable en el punto $x=0,$ ya que sus derivadas laterales son $f'(0^-)=-1$ y $f'(0^+)=1.$ En consecuencia, no será derivable en cualquier intervalo que contenga al punto $x=0,$ en particular, en nuestro intervalo $(-a,a)$.
   Además, se verifica que $f(-a)=f(a)$ ya que dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.
   Se cumplen las hipótesis primera y tercera (continuidad en el cerrado y toma valores iguales en los extremos del intervalo) y no se cumple la segunda (derivabilidad en el abierto). Al no cumplirse todas las hipótesis, no se cumplirá la tesis.

2. **Dada la función $f(x)=x^2-4x+1$ ¿verifica las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo [1,3]? En caso afirmativo, encontrar el valor $c\in(1,3)$ donde se anula la derivada.**

   Como la función dada es una función polinómica, será continua y derivable en todo el conjunto de números reales y, en particular, será continua en el cerrado **[1,3]** y derivable en el abierto (1,3). Además, $\boldsymbol{f(1)=-2}$ **y** $\boldsymbol{f(3)=-2}$**:** toma valores iguales en los extremos del intervalo.
   Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle y, en consecuencia, se cumplirá también la tesis:

$$\boldsymbol{\exists c\in(1,3)\,/\,f'(c)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(c)=2c-4=0 \quad\Rightarrow\quad c=2\in(1,3)}$$

   Luego el punto intermedio donde se anula la derivada de nuestra función es $c = 2$.

3. **Demuestra que la función $f(x)=x^3+x+1$ tiene como máximo una raíz real.**

   Supongamos lo contrario de lo que queremos demostrar, es decir, nuestra función tiene más de una raíz real (por ejemplo, dos: a y b, tales que $a < b$).

   Estas dos raíces determinan un intervalo $[a,b]$, en el cual es continua nuestra función al ser polinómica. Por el mismo motivo será derivable en el abierto (a,b).

   Además, como hemos considerado que a y b son raíces de nuestra función se cumple que $f(a)=f(b)=0.$

   En consecuencia, se estarían cumpliendo las hipótesis de Rolle y, por tanto, se tendrá que cumplir la tesis: deberá existir un punto $c\in(a,b)\,/\,f'(c)=0$

   Si intentamos calcular el punto intermedio, tendremos:

$f'(c)=0 \Rightarrow 3c^2+1=0 \Rightarrow c^2=-\frac{1}{3} \Rightarrow$ no podremos encontrarlo, lo que supone una contradicción. Por tanto, la suposición hecha inicialmente es falsa y nuestra función no puede tener más de una raíz real.

4. **Demuestra que la ecuación $e^x = x+1$ tiene únicamente una raíz real en $x = 0$.**

Consideremos la función asociada a nuestra ecuación $\boldsymbol{f(x)=e^x-x-1}$ y supongamos que, además de la raíz dada, tiene otra raíz $\boldsymbol{x=x_0}$**.** Estas dos raíces nos determinan un intervalo $[x_0,0]$ o $[0,x_0]$.

En cualquiera de estos intervalos, la función *f* es continua en el cerrado y derivable en el abierto, respectivamente, puesto que es suma de funciones continuas y derivables en todo *R*.

Además, toma valores iguales en los extremos del intervalo: $f(0)=f(x_0)=0$

En consecuencia, se estarían cumpliendo las hipótesis de Rolle y, por tanto, se tendrá que cumplir la tesis: deberá existir un punto $c \in (0,x_0)\,/\,f'(c)=0$

Si intentamos calcular el punto intermedio, tendremos:

$f'(c)=0 \Rightarrow e^c-1=0 \Rightarrow e^c=1 \Rightarrow c=0 \quad \Rightarrow$ lo que supone una contradicción, ya que el punto cero no pertenece al intervalo abierto $(0,x_0)$. Por tanto, la suposición hecha inicialmente es falsa y nuestra función no puede tener más que una raíz real, $x = 0$.

5. **Demostrar que la derivada de la función $f(x)=x(x-a)(x-b)(x-c)$ tiene al menos tres raíces reales y encontrar los intervalos en que se encuentran. (Sin calcular la derivada de *f*).**

La función *f* dada es una función continua y derivable en todo el conjunto de números reales y, por tanto, será continua en cualquier intervalo cerrado de *R* y derivable en el abierto de los mismos extremos.

Si consideramos los ceros de la función f $[x=0,\ x=a,\ x=b,\ x=c]$, éstos nos determinarán tres intervalos: $[0,a]$, $[a,b]$ y $[b,c]$ siendo f continua en cada uno de ellos y derivable en el abierto correspondiente. Como se verifica que toma valores iguales en los extremos de cada intervalo, pues todos ellos son ceros de la función, se estarían cumpliendo en cada intervalo las hipótesis de Rolle y, en consecuencia, se cumpliría también la tesis: en cada intervalo tendríamos un cero para la función derivada de *f* (tres ceros).

6. **Indica si es aplicable el Teorema de Rolle a la función**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } 1 \le x < 3 \\ 7-x & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}}$$

- **Continuidad en el cerrado [1,5].**

La función *f* está definida en los intervalos (1,3) y (3,5) mediante funciones afines, continuas en R y, en consecuencia, en dichos intervalos. Por tanto la función *f* será continua en ellos.

Estudiamos la continuidad en el punto *x* = 3 donde existe un cambio de definición de *f*:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x+1) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(7-x) = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4 = f(3)$$

Por tanto, la función *f* es continua en (1,5) y nos faltaría por estudiar la continuidad lateral en los extremos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2 = f(1) \;\Rightarrow\; f \text{ es continua a la derecha en } x = 1.$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}(7-x) = 2 = f(5) \;\Rightarrow\; f \text{ es continua a la izquierda en } x = 5.$$

Por tanto, la función *f* es continua en el cerrado [1,5].

- **Derivabilidad en el abierto (1,5).**

  La función *f* es derivable en los intervalos (1,3) y (3,5) por estar definida mediante funciones afines, derivables en *R*. Estudiamos la derivabilidad en el punto $x = 3$:

$$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x+1)-4}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} 1 = 1$$

$$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} \frac{(7-x)-4}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3-x}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} (-1) = -1$$

  Por tanto, las derivadas laterales en el punto $x = 3$ son distintas y la función no sería derivable en ese punto $\Rightarrow$ *f* no es derivable en el abierto (1,5).

- **Toma valores iguales en los extremos:** $f(1) = f(5) = 2$

  Al no cumplirse todas las hipótesis (no es derivable en el abierto), tampoco se cumplirá la tesis y no existirá ningún punto en el abierto donde se anule la derivada de la función.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE (DE LOS INCREMENTOS FINITOS)

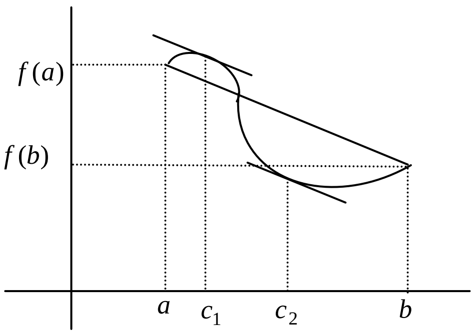
Este teorema generaliza el teorema de Rolle. Su enunciado es el siguiente:

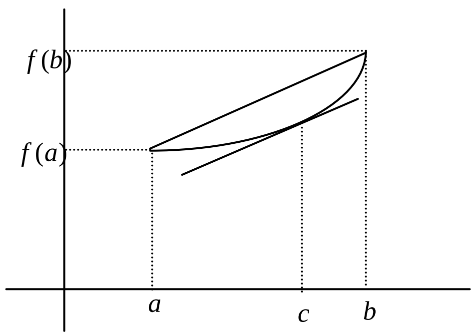
Si *f* es una función

- **continua en un intervalo cerrado $[a,b]$**
- **derivable en el intervalo abierto (a,b)**

entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)}$

o también $\boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$





Geométricamente podemos interpretarlo de la siguiente forma:

- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$
- $f'(c)$, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(c, f(c))$.

Si se verifica el teorema del valor medio, estos dos valores serán iguales y las dos rectas serán paralelas por tener la misma pendiente.

También podemos justificar el teorema del valor medio por la siguiente interpretación física:

- Si f(t) es el espacio recorrido por un móvil, entonces
$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = f'(t) \quad \text{con} \quad t \in [t_1, t_2]$$
el primer miembro representa la velocidad media con que se ha desplazado el móvil entre los instantes t_1 y t_2. El teorema del valor medio nos viene a decir que en algún momento, la velocidad instantánea es igual a la velocidad media.

EJEMPLOS.

1. **Aplicar el teorema del valor medio, si es posible, a la función $f(x)=x^2-3x+2$ en $[-2,-1]$. Calcular el valor correspondiente de *c*.**
Puesto que la función *f* es una función cuadrática será continua en $[-2,-1]$ y derivable en el abierto $(-2,-1)$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange y, en consecuencia, se debe cumplir la tesis; es decir:
$$\exists c \in (-2,-1) / \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{6-12}{-1+2} = 2c-3 \;\Rightarrow\; -6 = 2c-3 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{3}{2}$$
Podemos observar como el punto $c = -\dfrac{3}{2} \in (-2,-1)$.

2. **Comprueba si la función $f(x)=|x-2|$ verifica las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[0,3]$ y en caso afirmativo, encuentra el punto intermedio.**
La expresión analítica de la función dada será:
$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$
La función *f* es continua para valores mayores y menores que 2, puesto que está definida mediante funciones afines, continuas en *R*. Veamos si es continua en el punto $x = 2$:
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$
Por tanto, *f* es continua en *R* y, en consecuencia, en el intervalo $[0,3]$.
La función *f* es derivable para valores mayores y menores que 2, puesto que está definida mediante funciones afines, derivables en *R*. Veamos si es derivable en el punto $x = 2$:
$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(+1)=+1$$

Como las derivadas laterales en el punto $x=2$ son distintas la función no es derivable en dicho punto ni en cualquier intervalo abierto que lo contenga, en particular, en el intervalo (0,3).
En consecuencia, la función *f* no verifica las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[0,3]$ y, por tanto, no se verificará la tesis de dicho teorema (no existirá punto intermedio donde se cumpla la tesis).

3. Calcula *a* y *b* para que

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} ax-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-b & \text{si } x\geq 4\end{cases}}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2,6]$ ¿Dónde cumplirá la tesis?

La función *f* es continua y derivable para valores menores que 4 por estar definida como función afín y para valores mayores que 4 por estar definida como función cuadrática.

Para que sea continua en el punto 4 se tendrá que verificar:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x)&=\lim_{x\to 4^-}(ax-3)=4a-3\\ \lim_{x\to 4^+} f(x)&=\lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-b)=24-b\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4a-3=24-b\Rightarrow 4a+b=27$$

La función derivada de *f* será:

$$f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x<4 \\ -2x+10 & si \quad x>4\end{cases}$$

Para que sea derivable en el punto 4 se tendrá que verificar:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f'(x)&=\lim_{x\to 4^-} a=a\\ \lim_{x\to 4^+} f'(x)&=\lim_{x\to 4^+}(-2x+10)=-8+10=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2$$

Como para que sea derivable en $x = 4$, antes debe ser continua en él, las dos condiciones deben verificarse simultáneamente: resolviendo el sistema formado por ellas obtendremos los valores de los parámetros.

$$\left.\begin{aligned}4a+b&=27\\ a&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=19\end{cases}$$

Para estos valores de los parámetros, la función

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<4\\ -x^2+10x-19 & \text{si } x\geq 4\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}2 & si \quad x<4\\ -2x+10 & si \quad x\geq 4\end{cases}$$

es continua y derivable en todo *R* y, en consecuencia, continua en [2,6] y derivable en (2,6). Se cumplen las condiciones del teorema del valor medio y, por tanto, también se cumplirá la tesis:

$$\exists c\in(2,6)/\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=f(c)\Rightarrow\frac{5-1}{4}=f'(c)\Rightarrow f'(c)=1$$

Si $f'(c)=1$, c no puede ser menor que 4, puesto que para estos puntos la derivada de la función es constante y es igual a 2. En consecuencia, deberá estar en los mayores que 4:

$$f'(c)=1 \quad \Rightarrow \quad -2c+10=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{9}{2}\in(2,6)$$

que es el punto buscado.

OBSERVACIÓN.

- Si en la tesis del teorema del valor medio hacemos: $b-a=h \;\Rightarrow\; b=a+h$ y como $a<c<a+h \;\Rightarrow\; c=a+\theta\cdot h$ donde θ es un número comprendido entre 0 y 1.

  La fórmula de Lagrange se escribe entonces de la forma:

  $$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta\cdot h)\cdot h \quad \Rightarrow \quad f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta\cdot h)\cdot h \qquad 0<\theta<1$$

  y recibe el nombre de **Fórmula de los Incrementos Finitos**. Esta fórmula nos da el valor de la función en un entorno del punto $x = a$.

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

- **FUNCIONES CONSTANTES.**

  Sea una función f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)=0$ en todos los puntos de (a,b), entonces *f* es constante en $[a,b]$.

  Demostración.

  Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1<x_2$ de $[a,b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1,x_2]$ y, por tanto, su tesis:

  $$\exists c\in(x_1,x_2)\,/\,f(x_2)-f(x_1)=f'(c).(x_2-x_1)$$

  Como el punto $c\in(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$, entonces $f'(c)=0$ y, en consecuencia,

  $$f(x_2)-f(x_1)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)=f(x_1)$$

  Luego la función toma el mismo valor en dos puntos cualesquiera del intervalo $[a,b]$ y, por tanto, es constante en $[a,b]$.

- **FUNCIONES CRECIENTES.**

  Sea una función *f* continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)>0$ en todos los puntos de (a,b), entonces *f* es creciente en el intervalo $[a,b]$.

  Demostración.

  Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1<x_2$ de $[a,b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1,x_2]$ y, por tanto, su tesis:

  $$\exists\, c\in(x_1,x_2)\ /\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

  Como el punto $c\in(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$, entonces $f'(c)>0$ y, en consecuencia,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2)-f(x_1)>0 \quad \text{ya que} \quad x_1<x_2$$

Como los puntos x_1, x_2 son dos puntos cualesquiera del intervalo $[a,b]$, la función f es creciente en el intervalo $[a,b]$.

TEOREMA DE CAUCHY.

Este teorema es una generalización del Teorema del Valor Medio y tiene gran interés por sus aplicaciones.

Si f y g son dos funciones

- **continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$,**
- **derivables en el intervalo abierto (a,b),**
- **$g(a) \neq g(b)$ y**
- **$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$**

entonces, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

NOTA: Se puede observar que cuando $g(x)=x$, el teorema de Cauchy se reduce al teorema del valor medio.

EJEMPLOS.

1. **Comprueba si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x-3$ en el intervalo $[0,3]$ y, en caso afirmativo, hallar el valor del punto intermedio c.**

   Tanto la función cúbica como la función afín son continuas y derivables en todo R y, por tanto, continuas en [0,3] y derivables en (0,3).

   Se cumplen las hipótesis del Teorema de Cauchy y, en consecuencia, se cumplirá la tesis:

   $$\exists c \in (0,3) / \frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{27-0}{0-(-3)} = \frac{3c^2}{1} \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

   De los dos valores obtenidos, el que verifica la tesis (pertenece al intervalo (0,3)) es el punto $c=+\sqrt{3}$.

2. **Repetir el ejercicio anterior para las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.**

   Las funciones seno y coseno son continuas y derivables en todo R y, por tanto, continuas en $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ y derivables en $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.

   Se cumplen las hipótesis del Teorema de Cauchy y, en consecuencia, se cumplirá la tesis:

$$\exists c \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right) / \frac{f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{6})}{g(\frac{\pi}{3})-g(\frac{\pi}{6})}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos c}{-\operatorname{sen} c} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\operatorname{ctg} c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1=-\operatorname{ctg} c \Rightarrow \operatorname{ctg} c=1 \Rightarrow c=\frac{\pi}{4}$$

REGLA DE L'HÔPITAL.

DEFINICION.-

Se dice que una función $y=f(x)$ presenta en $x=a$ una forma indeterminada, cuando no se puede saber si tiene límite en dicho punto sin hacer un estudio especial de ese límite.

Los casos de límite indeterminado que se nos pueden presentar son:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Al presentarse alguna de estas situaciones, es conveniente transformar la expresión de la función en otra equivalente a la que puedan aplicarse las reglas conocidas, o en caso contrario, calcularlo directamente.

Para funciones derivables el Teorema de L'Hôpital nos facilita el cálculo de límites indeterminados.

REGLA DE L'HÔPITAL.

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno de a y tales que $f(a)=g(a)=0$, entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

La demostración de este teorema tiene su fundamento en el Teorema de Cauchy.

La regla de L'Hôpital también se puede aplicar cuando $x\to\infty$, pues haciendo el cambio de variable $x=\frac{1}{y}$ estaríamos en el caso anterior.

Es válida la misma regla cuando $f(x)$ y $g(x)$ tienden a ∞ cuando $x\to a$.

EJEMPLOS.

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}$

  Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{6x+2}{2x-1}=\frac{6.2+2}{2.2-1}=\frac{14}{3}$$

A veces es necesario aplicar más de una vez la regla de L'Hôpital para quitar la indeterminación:

- $\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}=\frac{(2-0)e^0-0-2}{0^3}=\frac{0}{0}$

  Entonces:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}=\{aplicando\ \ L'Hôpital\}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(2-x)e^x-1}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

  Nuevamente aplicaríamos la regla de L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-xe^x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^x-xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{6x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}$$

  Aplicamos, otra vez, la regla de L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-xe^x}{6}=\frac{-e^0-0.e^0}{6}=-\frac{1}{6}$$

Para las otras indeterminaciones tendríamos:

- **Límites de la forma $0\cdot\infty$**

  Suponiendo que $f\to 0$ y $g\to\infty$, se efectúa el cambio $f\cdot g=\frac{f}{1/g}$ con el que pasaríamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$ y, entonces, aplicaríamos la regla de L'Hôpital.

  También se puede hacer $f\cdot g=\frac{g}{1/f}$ y nos quedaría la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

  <u>Ejemplo:</u>

  $\lim_{x\to 0} x.Lx=0.L0=0.\infty$

  Efectuando cualquiera de las transformaciones anteriores, nos queda:

  $$\lim_{x\to 0} x.Lx=\lim_{x\to 0}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

  Aplicando L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0} x.Lx=\lim_{x\to 0}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

- **Límite de la forma $\infty-\infty$.**

  Si suponemos que f y g tienden a ∞ para estudiar el límite de $f-g$ podemos hacer el cambio: $f-g=f\cdot(1-\frac{g}{f})$ que suele ser un límite más fácil de calcular.

  <u>Ejemplo:</u>

  $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\infty-\infty$

En este caso, nos resulta más cómodo efectuar la diferencia para pasar a la indeterminación $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ y aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x.\operatorname{sen} x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x.\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x + x\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x - x\operatorname{sen} x}=$$

$$=\frac{-\operatorname{sen} 0}{2.\cos 0 - 0.\operatorname{sen} 0}=\frac{0}{2}=0.$$

- **Límites de la forma $\mathbf{1^{\infty}}$, $\mathbf{\infty^{0}}$, $\mathbf{0^{0}}$.**

Para quitar este tipo de indeterminación se suele utilizar la expresión: $\boldsymbol{f^{g}=e^{g\cdot Lf}}$ pasando así a alguna de las indeterminaciones anteriores.

<u>Ejemplo:</u>

- $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=1^{\infty}}$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}.L(\cos 2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3.L(\cos 2x)}{x^2}}=e^{\left\{\frac{0}{0}\right\}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{-2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-6\operatorname{tg} 2x}{2x}}=e^{\left\{\frac{0}{0}\right\}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-6.2(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{2}}=e^{\frac{-6.2(1+0)}{2}}=e^{-6}$$

- $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=\infty^{0}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cdot L\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cdot(-Lx)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-Lx}{1/\operatorname{tg} x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-Lx}{\operatorname{ctg} x}}=e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}}=e^{\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1}}=e^{0}=1.$$

<u>EJERCICIOS.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-\frac{1}{3}x^3}{x-\operatorname{tg} x}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x^2}\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{Lx}-\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to\infty}(Lx)^{1/e^x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos xL(\operatorname{tg} x)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}\qquad \lim_{x\to\infty}x.L\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sqrt[x]{a-1}\right)\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos 2x}-\frac{\operatorname{tg} x}{1-\frac{4x}{\pi}}\right)$$

PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN (MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS).

Consideremos una función $f : D \longrightarrow R \;\; / \;\; x \in D \longrightarrow f(x) \in R.$

- Decimos que f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D.$
- Decimos que f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D.$
- Decimos que f tiene un máximo relativo en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D.$
- Decimos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D.$

Una función puede tener varios máximos o mínimos relativos o carecer de ellos. Todo máximo (mínimo) absoluto es al mismo tiempo relativo, pero no al contrario.

La palabra relativo indica que se compara el valor $f(x)$ con los valores que toma la función en un entorno de x_0, mientras que los máximos y mínimos absolutos se refieren a todo el dominio.

Los máximos y mínimos relativos reciben el nombre de **PUNTOS CRÍTICOS, PUNTOS ESTACIONARIOS o EXTREMOS.**

El estudio de los extremos de una función es, en general, un problema complicado ya que no existen métodos generales para calcularlos. Sin embargo, para funciones derivables podemos hallarlos mediante un procedimiento bastante sencillo como veremos a continuación:

TEOREMA.

Sea $f : D \longrightarrow R$. Si f alcanza un extremo en $x_0 \in D$ y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

En efecto, si $f'(x_0)$ no se anula en x_0, $f'(x_0) \neq 0$, entonces la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el punto x_0 y no podría cumplirse la condición de máximo o mínimo.

Geométricamente, esta condición expresa que la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la gráfica de la función f es paralela al eje de abscisas, aunque puede suceder que exista tangente horizontal en un punto sin que exista máximo o mínimo.

Este teorema nos permite calcular los puntos donde puede haber un máximo o un mínimo, sin más que resolver la ecuación $f'(x_0) = 0$. Obtenidos estos puntos, los siguientes criterios nos ayudan a decidir si en ellos existe un máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas.

CRITERIO 1: Variación de la función en un entorno del punto.

Sea x_0 un punto donde puede existir un máximo o un mínimo relativo. Se trata de estudiar el comportamiento de la función en un entorno del punto:

Consideremos un valor $h > 0$ suficientemente pequeño. Si se verifica que

- $f(x_0 \pm h) \leq f(x_0)$, **entonces la función tiene un máximo relativo en** $x = x_0$.
- $f(x_0 \pm h) \leq f(x_0)$, **entonces la función tiene un mínimo relativo en** $x = x_0$.

Este criterio es la aplicación directa de la definición de máximo y mínimo relativo y, dada su generalidad, puede aplicarse a puntos en los cuales no exista derivada de la función.

CRITERIO 2: Variación de la derivada primera en el entorno del punto.

Sea x_0 un punto donde la función puede alcanzar un máximo o un mínimo y $h > 0$ un valor suficientemente pequeño:

- **Si** $f'(x_0 - h) > 0$ **(*f* creciente a la izquierda de** x_0**) y** $f'(x_0 + h) < 0$ **(*f* decreciente a la derecha de** x_0**), entonces la función alcanza un máximo relativo en** $x = x_0$.
- **Si** $f'(x_0 - h) < 0$ **(*f* decreciente a la izquierda de** x_0**) y** $f'(x_0 + h) > 0$ **(*f* creciente a la derecha de** x_0**), entonces la función alcanza un mínimo relativo en** $x = x_0$.

CRITERIO 3: Valor de la derivada segunda en el punto.

Sea $f: D \longrightarrow R$ **y** x_0 **un punto de *D*. Si** $f'(x_0) = 0$ **y** $f''(x_0) < 0$ **(**$f''(x_0) > 0$**), entonces *f* posee en** $x = x_0$ **un máximo (mínimo) relativo.**

En efecto, si $f''(x_0) < 0$, la función f' es estrictamente decreciente en el punto x_0 y como en ese punto se anula f', a la izquierda será positiva y a la derecha, negativa. Por tanto, a la izquierda de x_0 la función *f* será estrictamente creciente y a la derecha de x_0 será estrictamente decreciente por ser f' negativa. En consecuencia, la función tendrá un máximo relativo en el punto $x = x_0$.

Si $f''(x_0) < 0$, la demostración es análoga.

Si $f''(x_0) = 0$, no puede aplicarse el criterio anterior y debemos recurrir a criterios anteriores o aplicar el siguiente criterio general

CRITERIO 4: Criterio de Taylor.

Sea x_0 un punto del dominio de la función *f*. Consideremos que *f* es derivable hasta el orden 2n (orden par) en un entorno de dicho punto y, además, se verifica que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1}(x_0) = 0$$

Entonces,

- Si $f^{(2n}(x_0) < 0$, la función alcanza un máximo relativo en $x = x_0$.
- Si $f^{(2n}(x_0) < 0$, la función alcanza un mínimo relativo en $x = x_0$.

EJEMPLOS.

1. **Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^4 - 2x^3$.**

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ y vemos donde se anula

$$4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0(doble) \\ 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para estudiar cuales corresponden a máximos y cuales corresponden a mínimos aplicaremos el criterio de la derivada primera con lo que al mismo tiempo se estudian los intervalos de crecimiento o decrecimiento. El único punto donde la función derivada cambia de signo es $x = \frac{3}{2}$ y este punto descompone el dominio en dos intervalos $(-\infty, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, +\infty)$.

En $(-\infty, \frac{3}{2})$ se verifica que $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

En $(\frac{3}{2}, +\infty)$ se verifica que $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

En consecuencia, en el punto $x = \frac{3}{2}$ la función *f* tiene un mínimo relativo.

NOTA: Decimos que en el punto $x = 0$ la función derivada no cambia de signo porque en él tiene un cero doble con lo que cambiaría dos veces de signo y se quedaría con el mismo signo que tenía antes de 0.

2. **Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x.Lx$.**

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 1.Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1$

Anulamos la función derivada para calcular donde la función tiene los posibles extremos:

$$Lx + 1 = 0 \Rightarrow Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Para determinar si este punto que anula la derivada corresponde con un máximo o un mínimo, aplicaremos en este caso el criterio de la derivada segunda. Empezaremos calculándola:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Si sustituimos el valor que anula la derivada primera nos encontraremos que: $f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$ y, por tanto, la función tiene un mínimo en $x = e^{-1}$.

3. **Determina el parámetro *k* para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + k$ sea igual a 8.**

Calculamos el punto donde la función tendrá el extremo; este punto tendrá que anular la derivada de función: $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Como nos dicen que el valor mínimo es 8, tendremos: $f(-1) = 8 \Rightarrow 1 - 2 + k = 8 \Rightarrow k = 9$

En consecuencia, nuestra función será: $f(x) = x^2 + 2x + 9$

4. Obtener los parámetros *a* y *b* para que la función $f(x)=x^2+ax+b$ alcance un mínimo en el punto $P(-1,2)$.

Puesto que en el punto *P* la función alcanza un mínimo, el punto *P* pertenece a la gráfica de la función y se verificará que $f(-1)=2 \Rightarrow 1-a+b=2 \Rightarrow -a+b=1$

Por otra parte, por ser un extremo de función (mínimo) se tendrá que anular la función derivada en él: $f'(-1)=0 \Rightarrow \{f'(x)=2x+a\} \Rightarrow -2+a=0 \Rightarrow a=2$

Resolviendo el sistema formado por las condiciones obtenidas, nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} -a+b=1 \\ a \quad\;\; =2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}\right.$$

Por tanto, la función buscada será: $f(x)=x^2+2x+3$

5. Determina todas las funciones *f* de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *con* $a\neq 0$, y que verifican $f'(-1)=f'(1)=0$.

¿Alguna de las funciones determinadas anteriormente verifica $f(0)=f(1)=0$? Razona las respuestas.

Calculamos la derivada de la función dada $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ y aplicamos las condiciones impuestas por el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1)=3a-2b+c \\ f'(1)=3a+2b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema obtenido:

$$\left.\begin{array}{r} 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6a+2c=0 \Rightarrow 3a+c=0 \Rightarrow c=-3a \\ 3a-2b-3a=0 \Rightarrow \quad -2b=0 \Rightarrow b=0 \end{array}\right.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la función dada, obtenemos:

$$f(x)=ax^3-3ax+d \quad con \;\; a\neq 0,$$

que sería la expresión de todas las funciones que cumplen la condición impuesta.

- **Veamos si alguna función de esta familia verifica que $f(0)=f(1)=0$.** Podríamos tener un doble camino para comprobar esto:
  - Aplicando **directamente** las condiciones obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=d \\ f(1)=a-3a+d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d=0 \\ a-3a+d=0 \Rightarrow -2a=0 \Rightarrow a=0 \end{array}\right.$$

    Al obtener que a = 0, entramos en una contradicción ya que *a* era distinto de cero. Por tanto, no hay ninguna función de las encontradas que verifique que $f(0)=f(1)=0$.

  - Aplicando el **Teorema de Rolle**: *f* es continua en [0,1] y derivable en (0,1). Además, $f(0)=f(1)=0$. Se cumplen las hipótesis de Rolle, luego se debe cumplir la tesis, es decir, $\exists c\in(0,1) / f'(c)=0$

    Esto no sería posible ya que los únicos puntos donde se anula la derivada de *f* son –1 y 1 y estos puntos no pertenecen a (0,1). En consecuencia, no existe ninguna función de las encontradas que verifique que $f(0)=f(1)=0$.

OPTIMIZACION DE FUNCIONES.

El cálculo de máximos y mínimos mediante derivadas permite resolver de una manera sencilla muchos problemas en los que se trata de optimizar una función.

Para resolverlos seguiremos el siguiente esquema general:

- Mediante los datos del problema se construye la función que hay que maximizar o minimizar. La mayor parte de las veces nos quedará en función de dos o más variables.
- Si la función tiene más de una variable debemos relacionar éstas dos ecuaciones a fin de conseguir expresar la función inicial utilizando una sola variable.
- Se calculan los máximos y mínimos de esta función.
- Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.

EJEMPLOS.

1. **Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.**

   Supongamos que los números buscados son x e y. Se tendrá que verificar que

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ P(x,y)=x.y=\text{máximo} \end{array}\right\}$$

   Entonces, despejamos una de las dos variables y sustituimos en la función a optimizar, quedándonos ésta en función de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ P(x,y)=x.y=\text{máximo} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=20-x \\ P(x)=x.(20-x) \Rightarrow P(x)=20x-x^2 \end{array}\right.$$

   Obtenida la función a optimizar dependiendo de una sola variable, buscaremos los extremos de esta función:

$$P'(x)=20-2x \Rightarrow 20-2x=0 \Rightarrow x=\frac{20}{2}=10$$

   Por último, comprobamos si este valor corresponde con un máximo o con un mínimo:

   $P''(x)=-2 \Rightarrow P''(10)=-2<0$

   Luego, para el valor $x = 10$, la función alcanza un máximo y los dos números en los que se puede descomponer el número 20 de forma que el producto de ellos sea máximo serán $x = 10$ e $y = 10$.

2. **Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es de 40 m**

   El mayor rectángulo es el de mayor área. Si suponemos que las dimensiones del rectángulo son x e y, tendríamos:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Perímetro}: & 2x+2y=40 \\ \textit{Área}: & S(x,y)=x.y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=20 \\ S(x,y)=x.y \end{array}\right.$$

   Operando igual que en el ejercicio anterior, obtenemos: despejamos una de las dos variables y sustituimos en la función a optimizar, quedándonos ésta en función de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ S(x,y)=x.y=\text{máximo}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=20-x \\ S(x)=x.(20-x) \Rightarrow P(x)=20x-x^2 \end{cases}$$

Obtenida la función a optimizar dependiendo de una sola variable, buscaremos los extremos de esta función:

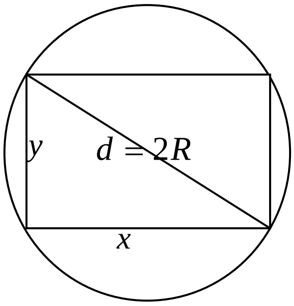
$$S'(x)=20-2x \Rightarrow 20-2x=0 \Rightarrow x=\frac{20}{2}=10$$

Por último, comprobamos si este valor corresponde con un máximo o con un mínimo:

$S''(x)=-2 \Rightarrow S''(10)=-2<0$

Luego, para el valor $x = 10$, la función alcanza un máximo y el rectángulo buscado es un cuadrado de lado 10 m.

3. **De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, calcular las dimensiones del que tenga área máxima. Razona el proceso.**



Suponiendo que las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia son x e y, el área de dicho rectángulo nos vendrá dada por: $S(x,y)=x.y$

La relación entre las dos variables habrá que buscarla a través del diámetro de la circunferencia, ya que éste con los lados del rectángulo forma un triángulo rectángulo:

$$x^2+y^2=4R^2$$

Operaremos como en los casos anteriores: en la relación entre las dos variables despejaremos una de ellas para dejar la función a optimizar dependiendo de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4R^2 \\ S(x,y)=x.y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{4R^2-x^2} \\ S(x)=x\cdot\sqrt{4R^2-x^2} \end{cases}$$

Calculamos la derivada primera y vemos donde se anula:

$$S'(x)=\sqrt{4R^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{(\sqrt{4R^2-x^2})^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0 \Rightarrow 4R^2-2x^2=0 \Rightarrow 2R^2-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2R^2}=\pm R\sqrt{2}$$

Veamos que valor corresponde con el máximo: calculamos la derivada segunda de la función:

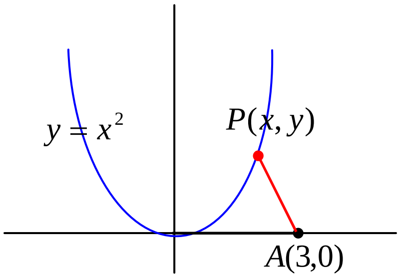
$$S''(x)=\frac{-4x\sqrt{4R^2-x^2}-(4R^2-2x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}}{(4R^2-x^2)}=\frac{-4x\sqrt{4R^2-x^2}+\dfrac{2x(2R^2-x^2)}{\sqrt{4R^2-x^2}}}{(4R^2-x^2)}$$

Sustituyendo en esta derivada los valores que anulaban la derivada primera obtenemos:

$$S''(R\sqrt{2})<0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo} \quad \text{y} \qquad S''(-R\sqrt{2})>0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo}$$

Por tanto, para obtener área máxima el valor de x deberá ser $x = R\sqrt{2}$ que sustituido donde tenemos despejada la variable y obtenemos $y = R\sqrt{2}$.

4. **Determina el punto de la curva cuya ecuación es $y = x^2$ que está más cerca del punto $A = (3,0)$.**



Consideremos que el punto de la curva que está más cerca de A es el punto $P(x, y)$ que por ser de la curva verificará su ecuación, es decir que $y = x^2$.

Por otra parte, como es el que está más cerca de A, la distancia entre ellos tiene que ser mínima (la menor posible):

$$d(A,P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \equiv \text{mínima} \Rightarrow \quad d(A,P) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las dos variables nos queda:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d'(x) = \frac{2(x-3) + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}$$

Anulamos la derivada: $\dfrac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0 \Rightarrow (x-3) + 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \text{ no tiene solución real.} \end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$d''(x) = \frac{(1+6x^2)\sqrt{(x-3)^2 + x^4} - (2x^3 + x - 3)\dfrac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}}{(x-3)^2 + x^4}$$

En el punto $x = 1$: $\quad d''(1) = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow$ corresponde con un mínimo.

En consecuencia, el punto de la curva dada que está más cerca de A es el punto $P(1,1)$.

5. **Demuestra que la suma de un número real positivo no nulo y su inverso es mayor o igual que 2.**

Sea x un número real positivo no nulo y sea f la función definida de la forma $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Si queremos demostrar que los valores que toma esta función son mayores o iguales que 2, quiere decir que el valor mínimo que toma la función es 2. Veamos que verdaderamente es así y para ello calcularemos, primeramente, donde alcanza el valor mínimo y si éste es igual a 2:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hemos encontrado dos valores que anulan la derivada de la función de los cuales eliminamos el valor negativo ya que *x* era un número real positivo. Para el valor $x = 1$ veamos que signo tiene la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{tiene un mínimo.}$$

El valor que toma la función para $x = 1$ será: $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ que es el valor mínimo que toma la función.

Ejercicios.

1. Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.
2. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3.600 m de superficie para poderlo cercar mediante una valla de longitud mínima.
3. Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular con perímetro de 20 m ¿Cuál será el radio que da el parterre de área máxima? ¿Cuál será la amplitud en radianes del sector?
4. La curva $y = \sqrt{1 + t^2 - t}$ representa un río. En el punto $P(2,0)$ hay una ciudad desde la que se desea construir una tubería rectilínea hasta el río.
   ¿En qué punto *Q* del río debe terminar la tubería para que ésta sea lo más corta posible? Comprueba que en dicho punto *Q* la tubería es perpendicular al río.
5. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?
6. Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. Cuál debe ser el radio de la base?
7. Hallar el punto de la parábola $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto $P(4,0)$ sea mínima.

Máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, sin ramas infinitas.

El problema general suele adoptar la siguiente forma:

¿Para qué valor de *x* la función *f*(*x*) definida en el intervalo $[a,b]$ toma el valor máximo o mínimo?

Un aspecto a tener en cuenta es si *f* tiene alguna rama infinita en $[a,b]$, es decir, si hay algún punto $c \in [a,b]$ para el cual se verifica que $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$. En este caso, lógicamente, no hay máximo o mínimo.

Consideremos que no se da este caso. Entonces el máximo absoluto estará entre los máximos relativos y éstos sabemos que son puntos donde se anula la derivada de la función, puntos sin derivada o los extremos del intervalo.

En consecuencia, para obtener el máximo absoluto de una función $y = f(x)$ en $[a,b]$, comprobaremos primeramente que no existen ramas infinitas de la función en dicho intervalo y después obtendremos:

- Puntos donde se anule la derivada resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.
- Puntos donde la función no es derivable o no es continua.
- Extremos *a* y *b* del intervalo.

Una vez obtenidos todos estos puntos, calculamos el valor de la función en cada uno de ellos. El mayor será el máximo absoluto de la función en el intervalo.

Para el mínimo absoluto procederemos de forma análoga.

EJEMPLOS.

1. Determina el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo [0,2].
2. Calcula los máximos y mínimos de la función $f(x) = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$ en el intervalo [0,2π].
3. Sea la función $f : R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = |x+2| \cdot |x-2|$

   Determina los puntos donde *f* es derivable y halla sus máximos y mínimos locales.
4. Sea la función $f : R \longrightarrow R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot |x|, & \text{si} \quad x \le 1; \\ x, & \text{si} \quad 1 < x \le 2; \\ 4 - x, & \text{si} \quad 2 < x. \end{cases}$$

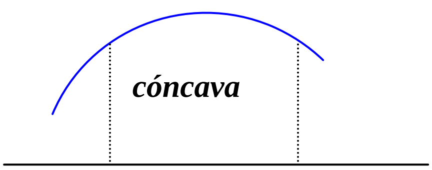
   Halla los puntos en los que *f* es derivable.
   Estudia si existen los máximos y mínimos relativos de f y, si existen, determínalos.

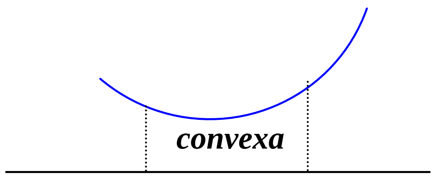
CURVATURA. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

La idea de lo que, en la vida real, llamamos cóncavo o convexo es muy clara:

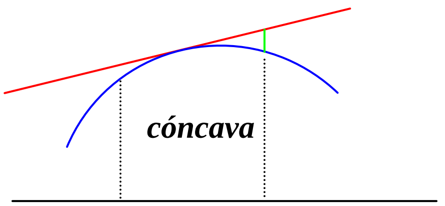
cóncavo $\longleftrightarrow$ ***hueco*** **convexo** $\longleftrightarrow$ ***abultado***

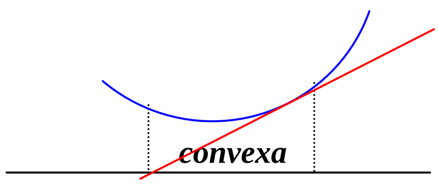
En el momento de aplicar estos conceptos a una curva, habrá que adoptar algún criterio para mirar la curva: adoptaremos el criterio de mirar la curva desde abajo, desde la parte inferior del eje de ordenadas *OY*.





Para caracterizar la concavidad o la convexidad de una función en un punto, *a*, vamos a estudiar el comportamiento de la curva con respecto a las tangentes en cada uno de los puntos del dominio de la función.





Podemos observar que las curvas cóncavas están por debajo de la tangente, mientras que las convexas están por encima. Esto quiere decir que la concavidad o convexidad de una función dependerá del signo de la diferencia

ordenada de la curva – ordenada de la tangente

en las proximidades de a; es decir,

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]$$

A partir de aquí podemos dar la siguiente definición:

Una función $y=f(x)$ derivable en a, es **cóncava en a**, si se verifica que

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]<0$$

En caso de que la diferencia sea positiva se dice que la función es **convexa.**

La derivada primera y segunda de la función *f*, si es que existen, nos permiten estudiar la concavidad o convexidad de la función *f*, tal como se indica en los siguientes criterios:

CRITERIO 1. ***Derivada primera.***

Sea *f* una función derivable en el intervalo *I*:

- Si f' es creciente en el intervalo *I*, la función *f* es convexa en *I*.
- Si f' es decreciente en el intervalo *I*, la función *f* es cóncava en *I*.

Utilizando el criterio para que f' sea creciente o decreciente, obtenemos el siguiente

CRITERIO 2: ***Derivada segunda.***

Sea *f* una función con derivada segunda en el intervalo *I*.

- Si $f''<0$ en el intervalo *I*, la función *f* es cóncava en *I*.
- Si $f''>0$ en el intervalo *I*, la función *f* es convexa en *I*.

En los puntos en los que la derivada segunda es 0 no se puede afirmar nada del comportamiento de la función.

Si $f'(x)=0$ se utiliza el criterio de Taylor para máximos y mínimos, y si $f'(x)\neq 0$ el criterio siguiente:

CRITERIO 3: ***Criterio de Taylor***.

Sea a un punto donde la función *f* puede ser cóncava o convexa. Supongamos que f es derivable hasta el orden 2*n* (orden par) en un entorno de *a* y, además, que

$$f'(x)\neq 0 \quad \text{y} \quad f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(2n-1}(a)=0$$

- Si $f^{(2n}(a)<0,$ entonces la función es cóncava en *a*.
- Si $f^{(2n}(a)>0,$ entonces la función es convexa en *a*.

EJEMPLOS.

Estudia la curvatura de las siguientes funciones:

$f(x)=x^2-1$ $\quad f(x)=4-x^2$ $\quad f(x)=x^4-6x^2$ $\quad f(x)=x^5$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ $\quad f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

$f(x) = x \cdot Lx$ $\qquad f(x) = \dfrac{Lx}{x}$ $\qquad f(x) = x.e^x$ $\qquad f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Los puntos de inflexión tienen un comportamiento similar respecto de la curvatura que los máximos y mínimos relativos respecto de la monotonía de una función.

Una función *f* tiene un punto de inflexión en *a* si en dicho punto la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

- Si la función pasa de convexa a cóncava diremos que *a* es un punto de inflexión convexo-cóncavo.
- Si la función pasa de cóncava a convexa diremos que *a* es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

Si la función es derivable en *a*, la tangente en "*a*" a la gráfica de la función deja una parte de la gráfica por encima y otra por debajo. Con esto podríamos dar otra definición equivalente para el caso de funciones derivables:

Se dice que una función *f* tiene un punto de inflexión en *a*, si la tangente en el punto $(a, f(a))$ atraviesa la gráfica de la función.

En el caso de que la función *f* sea derivable al menos dos veces, los valores candidatos a puntos de inflexión son aquellos que anulan la segunda derivada, como nos indica el siguiente:

TEOREMA.

Sea $f : D \longrightarrow R$. Si *f* tiene un punto de inflexión en $a \in D$ y *f* es derivable al menos dos veces en *a*, entonces $f''(a) = 0$.

En efecto, si $f''(a) \neq 0$ entonces la función sería estrictamente cóncava o estrictamente convexa en el punto a y no podría cumplirse la condición de punto de inflexión.

Este teorema nos permite hallar los puntos en los que la función f puede tener un punto de inflexión. Las abscisas de estos puntos son las raíces o ceros de la ecuación $f''(x) = 0$.

La condición $f''(a) = 0$ es necesaria para la existencia de un punto de inflexión, pero no es suficiente. Puede ocurrir que $f''(a) = 0$ y que, sin embargo, ese punto no sea de inflexión, como ocurre en la función $f(x) = x^4$ que tiene derivada segunda nula en $x = 0$, y en ese punto la función tiene un mínimo.

Obtenidos los puntos en donde se anula f'', veamos algunos criterios que nos permitirán decidir si se trata de un punto de inflexión cóncavo-convexo o convexo-cóncavo o ninguna de las dos cosas.

CRITERIO 1: **Variación del signo de la derivada segunda.**

Sea $f : D \longrightarrow R$ tal que $f''(a) = 0$.

Si a la izquierda de $x = a$ es $f''< 0$ (función cóncava) y a la derecha de $x = a$ es $f''> 0$ (función convexa), entonces $x = a$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

CRITERIO 2: **Valor de la derivada tercera.**

Sea $f : D \longrightarrow R$ una función derivable al menos hasta el orden tres en $a \in D$.

- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) > 0$, entonces la función tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) < 0$, entonces la función tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo.

Si $f'''(a) = 0$, no puede aplicarse este criterio y tendríamos que aplicar el criterio de la derivada segunda o utilizar una generalización del criterio de la derivada tercera que nos queda como sigue:

CRITERIO 3: **Criterio de Taylor.**

Sea a un punto donde la función f puede tener un punto de inflexión. Supongamos que f es derivable hasta el orden $2n+1$ (orden impar) en un entorno de a y, además, que $f'(a) \neq 0$ y $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2n}(a) = 0.$

- Si $f^{(2n+1}(a) > 0,$ entonces la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo en a.
- Si $f^{(2n+1}(a) < 0,$ entonces la función tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en a.

EJERCICIOS.

1. Calcular los puntos inflexión de las funciones propuestas para estudiar su curvatura.
2. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.
3. ¿Es el punto $x = 0$ un punto de inflexión de la función $f(x) = x^{11}$? Razonar la contestación.
4. Determina a, b, c, d y e de modo que la curva $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tenga un punto crítico en $(1,3)$ y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 2x$ en $(0,0)$.
5. Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las funciones: $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 1$ y $f(x) = e^{-x^2}$
6. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = x \cdot |x|$ y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$, a pesar de que no existe $f''(0)$.

CONSTRUCCIÓN APROXIMADA DE CURVAS.

Aunque la gráfica de una función f es un conjunto de puntos, no es un buen método para representarla obtener indiscriminadamente las coordenadas de muchos puntos de la misma, por los siguientes motivos:

1. Se emplearía mucho tiempo.
2. Los puntos calculados serían insuficientes para dar una idea global de la curva, ya que las partes más interesantes de la misma es probable que se encuentren intercaladas entre ellos o más allá del tramo que hemos estudiado.

Las curvas, en general, presentan algunos detalles interesantes (puntos críticos, ramas infinitas, saltos, inflexiones, simetrías,...) y fuera de ellos se comporta de forma anodina. En consecuencia, para representarlas de una manera eficaz habrá que saber localizar todas las peculiaridades que las caracterizan.

Con todo lo visto anteriormente tenemos los suficientes instrumentos matemáticos para representar cualquier curva dada por su ecuación en forma explícita $y = f(x)$. Poniendo un poco de orden en estos conocimientos para sistematizar la representación de la curva, podemos elaborar el siguiente esquema a seguir:

ESQUEMA A SEGUIR PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Propiedades de *f* obtenidas directamente:

1. **Dominio y Recorrido de la función.**
2. **Simetrías:**
   a) **Simetría respecto del eje *OY*** (función par): $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$
   b) **Simetría respecto del origen *O*** (función impar): $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$
3. **Periodicidad:** $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$ **donde T = periodo**
4. **Puntos de corte con los ejes:**
   a) **Con el eje *OX***: hacemos $y = 0$ (son los ceros de la función)
   b) **Con el eje *OY***: hacemos $x = 0$ y obtenemos un punto único **$(0, f(0))$**
5. **Regiones de existencia (zonas) de la función:**
   a) Intervalos de positividad: $f > 0$
   b) Intervalos de negatividad: $f < 0$
6. **Ramas infinitas: (puntos en el infinito)**
   a) Punto de partida de la gráfica: $(-\infty, ?)$
   b) Punto de llegada de la gráfica: $(+\infty, ?)$
7. **Asíntotas:**
   a) Horizontales
   b) Verticales
   c) Oblicuas
8. **Puntos de discontinuidad.**

Propiedades de *f* obtenidas por las derivadas sucesivas.

9. **Monotonía:**
   a) Intervalos de crecimiento........................ $f' > 0$
   b) Intervalos de decrecimiento.................... $f' < 0$
   c) Puntos críticos (máximos y mínimos)...... $f' = 0$ y $f'' \neq 0$
10. **Curvatura:**
   a) Intervalos de concavidad......................... $f'' < 0$
   b) Intervalos de convexidad......................... $f'' > 0$

c) Puntos de inflexión.................................. $f''=0$ y $f'''\neq 0$

EJERCICIOS.

Representa las siguientes funciones:

- $f(x)=x^3-3x^2+2$
- $f(x)=-x^4+2x^2$
- $f(x)=x^4-4x^2$
- $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$
- $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$
- $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$
- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$
- $f(x)=x\cdot Lx$
- $f(x)=\dfrac{Lx}{x}$
- $f(x)=x.e^x$
- $f(x)=x^{\frac{1}{3}}.e^x$
- $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$

- **PUNTO MÍNIMO.**

Sea $f : D \longrightarrow R$ derivable al menos dos veces en un punto $a \in D$.
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $a \in D$.
Demostración:

Aplicando la definición de derivada tenemos:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h} > 0$$

Entonces,

Si $h < 0 \Rightarrow f'(a+h) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente a la izquierda de a.

Si $h > 0 \Rightarrow f'(a+h) > 0 \Rightarrow f$ es creciente a la derecha de a.

En consecuencia, f tiene un mínimo en $a \in D$.