Matrices

Matrices de números reales. Definiciones

Def.- Consideremos el cuerpo (cuerpo es un conjunto de números donde se puede sumar, restar, multiplicar y dividir) de los números reales R. Una matriz de números reales de orden “mxn” (se lee ”m” por “n”) es una tabla de “mxn” números ordenados en “m” filas y en “n” columnas de la siguiente forma

$$A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ fila 2} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\uparrow \text{Columna 2} & \end{array}$$

Donde los a_{ij} son números reales, el subíndice i (el 1º) indica la fila donde está colocado el número a_{ij}, y el subíndice j (el 2º) indica la columna donde está colocado el elemento a_{ij}. Es como si jugáramos al juego de los barquitos, fila i, columna j.

** La matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 3x4. Veamos algunos elementos

$a_{23}=3$ (elemento que está en la fila 2 y la columna 3)

$a_{34}=5$; $a_{12}=2$, $a_{32}=-1$ etc...

Def.- *Matriz fila* es la que tiene una sola fila

** (1 3 -4 5) esta es de orden 1x4

Def.- *Matriz columna* es la que tiene una sola columna

** $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ esta es de orden 3x1

Def.- *Una matriz escalonada por filas* es una matriz tal que en cada fila el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que en la fila anterior.

** $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz escalonada de orden 4x5

Def.- Una *matriz cuadrada* es la que tiene igual número de filas que de columnas.

** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 4x4. Se suele decir que es de orden 4

** (3) es una matriz cuadrada de orden 1x1.

Def.- *Dos matrices $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{mxn}$ son iguales* sii tienen el mismo orden y son iguales los elementos colocados en el mismo sitio, es decir $a_{ij}=b_{ij}$.

Def.- La *matriz opuesta* a la matriz $A=(a_{ij})$ es aquella que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de la matriz $A=(a_{ij})$, y se escribe –A y es $-A=(-a_{ij})$

** $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $-A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Def.- Dada una matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ se define su *matriz traspuesta* que se escribe A^t como la matriz $A^t=(a_{ji})_{nxm}$, es decir la matriz que se obtiene cambiando sus filas por sus columnas.

Nota.- Si A es de orden mxn su traspuesta A^t es de orden nxm.

** A=$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; A^t=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Def.- La *matriz nula* O_{mxn} es la que tiene todos sus elementos nulos, es decir O_{mxn}=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}_{mxn}$

Def.- Dada la matriz cuadrada de orden n A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, se llama *diagonal principal* a los elementos de la forma a_{ii} (unir extremo superior izquierda con extremo inferior derecha). Se llama *diagonal secundaria* a los elementos de la forma a_{ij} con i+j=n+1 (unir extremo superior derecha con extremo inferior izquierda).

Def.- Una *matriz cuadrada* de orden n decimos que es *triangular superior* sii todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son ceros.

** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es triangular superior de orden 3.

Def.- Una *matriz cuadrada de orden n decimos que es triangular inferior* sii todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son ceros.

** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior de orden 3.

Def.- Una *matriz cuadrada de orden n decimos que es diagonal* sii todos los elementos que no están en la diagonal principal son ceros.

** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz diagonal de orden 3.

Def.- Una matriz cuadrada de orden n en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos es la *matriz identidad* ó *unidad* de orden n, y se escribe I_n.

** I_n=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_n$ matriz identidad de orden n, (1) matriz identidad de orden 1, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad de orden 2, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad de orden 3.

Def.- Una *matriz* cuadrada de orden n decimos que es *simétrica* sii coincide con su traspuesta, es decir A=A^t.

** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -7 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz simétrica de orden 3.

Def.- Una *matriz* cuadrada de orden n decimos que es *antisimétrica ó hemisimétrica* sii coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir A= -A^t.

** A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica porque A^t=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y – A^t=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir A= -$A^t$.

Operaciones con matrices
- Suma
Def.- Dadas dos matrices del mismo orden mxn $A=(a_{ij})$ y $B(b_{ij})$, se define su suma, que se indica A+B como la matriz de orden mxn que se obtiene al sumar los elementos de A y de B que se encuentran en el mismo lugar, es decir $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$.

** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 & 3-1 \\ -2+2 & 1+1 & 4+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma
Si A, B, C, O son matrices de orden "mxn" siendo O la matriz nula tenemos:
1) *Asociativa* A+(B+C)=(A+B)+C
2) *Conmutativa* A+B=B+A
3) *Elemento neutro* A+O=O+A=A, siendo O la matriz nula
4) *Elemento opuesto* Dada la matriz A, existe su opuesta –A, tal que A+(-A)=(-A)+A=O
Nota.- También se verifica la siguiente propiedad $(A+B)^t=A^t+B^t$.

** Calcula $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

- Producto de un número real por una matriz
Def.- Dada la matriz de orden "mxn" $A=(a_{ij})$ y el número real λ, se define el producto del número λ por la matriz A como una nueva matriz de orden "mxn" que se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz A por el número λ, es decir $\lambda\,.A=(\lambda.a_{ij})$

** $3\,.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$

Propiedades del producto de un número por una matriz
Si A y B son matrices de orden "mxn" y λ, μ, y 1 son números reales entonces se verifican las propiedades:
1) *Distributiva respecto a la suma de matrices* $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
2) *Distributiva respecto a la suma de números (escalares)* $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
3) *Pseudoasociativa o falsa asociativa* $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$,
4) *Elemento unidad* Existe el número $1\in\Re$ tal que 1.A=A.
Nota.- Otra propiedad es $(\lambda.A)^t=\lambda.A^t$.

** Calcula $-2.\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 4 & -1 \\ 8 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\right]=$

** Calcula la matriz A en los siguientes casos

a) $A=7.\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-6.\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}-3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

b) $A-2.\begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}-\left[5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-2.\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

c) $14.A=3.\left[\begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}-2.\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+6.\begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Producto de matrices. Potencias
Nota.- Para poder multiplicar las matrices A y B en el orden A.B el número de columnas de A tiene que coincidir con el número de filas de B, y la matriz resultante del producto tiene por orden filas de la 1ª matriz, columnas de la 2ª matriz, es decir $A_{mxn}\cdot B_{nxp}=C_{mxp}$.
Def.- Dadas las matrices $A_{mxn}=(a_{ij})$ y $B_{nxp}=(b_{ij})$, se define su producto $A\cdot B$ como la matriz $C_{mxp}=(c_{ij})$ con $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+......+a_{in}b_{nj}$, es decir para obtener el elemento c_{ij}

del producto se multiplica término a término los elementos de la fila i de la matriz A por los elementos de la columna j de la matriz B y se suman.

** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, como la 1ª es de orden 2x**3** y la 2ª de orden **3**x1 podemos multiplicarlas y el producto es de orden 2x1, es decir $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x1+0x0+1x2 \\ 2x1+1x0+5x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, como la 1ª es de orden 2x**2** y la 2ª de orden **2**x3 podemos multiplicarlas y el producto es de orden 2x3, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x4+0x0 & 2x(-1)+0x3 & 2x2+0x(-2) \\ 1x4+5x0 & 1x(-1)+5x3 & 1x2+5x(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 4 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

** $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}$, como la 1ª es de orden 2x**1** y la 2ª de orden **1**x2 podemos multiplicarlas y el producto es de orden 2x2, es decir $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x4 & 3x(-2) \\ 5x4 & 5x(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$

** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, como la 1ª es de orden 1x**3** y la 2ª de orden **3**x1 podemos multiplicarlas y el producto es de orden 1x1, es decir $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$=(2x2+5x1+(-7)x3)=(-12) que es un número.

Propiedades del producto de matrices (suponiendo que se pueda multiplicar)

1) *Asociativa* A·(B·C)= (A·B)·C

2) *Distributiva* A·(B+C)= A·B+A·C y (A+B)·C= A·C+B·C

3) *Elemento unidad por la derecha y por la izquierda* I·A=A y A·I'=A

Nota.- I coincide con I' solamente sí la matriz A es cuadrada. La matriz I es la matriz identidad

4) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

5) *No verifica la propiedad conmutativa* es decir A·B≠B·A en general

** A=$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si hacemos A·B nos sale una matriz 1x1, y si hacemos B·A nos sale una matriz 3x3 que son distintas.

6) *No verifica la propiedad simplificativa* es decir de A·B=A·C no podemos afirmar que B=C.

** A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; A.B =$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$; A.C =$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$ y B≠C

Nota.- No se verifican las igualdades $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, pues en general AB≠BA. Tampoco se verifica en general $(A-B)(A+B)=A^2 - B^2$, por la misma razón de antes.

7) *El producto de dos matrices puede ser la matriz nula O sin que lo sean ninguna de las dos* es decir puede ser A·B=O con A≠O y B≠O , siendo O la matiz nula. (Se suele decir que el *producto de matrices es singular no regular*)

** A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

** Resolver el sistema $\begin{cases} 5X+3Y=A \\ 3X+2Y=B \end{cases}$ con A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Calcula después X^2+Y^2.

Def.- En el conjunto de las matrices cuadradas podemos definir las potencias de una matriz de la siguiente forma:

$A^2=A\cdot A$

$A^3=A\cdot A\cdot A$

....

$A^n=A\cdot A\cdots\cdot$(n-veces)$\cdots A$

** Calcula A^2, A^3, y A^{10} con A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

** Calcula A^2, A^3, .. A^n con A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sale $A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

** Calcula A^2, A^3, .. A^n con A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sale $A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

** (Selectividad). Comprueba que $A^3+I_3=O_3$, con A=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Con la igualdad anterior calcula A^{10}, A^{100}.

Def.- Una matriz A es ortogonal sii $A.A^t=I$.

** Comprueba que A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, es ortogonal.

** Comprobar si A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Propiedades de la trasposición de matrices

a) $(A^t)^t=A$

b) $(A+B)^t=A^t+B^t$.

c) $(k\cdot A)^t=k\cdot A^t$

d) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

Matriz inversa

Nota.- Las matrices inversas *solo existen para las matrices cuadradas*.

Def.- Dada una matriz cuadrada A de orden n, si existe otra matriz cuadrada de orden n B tal que AB=BA=I, siendo I la matriz identidad de orden n se dice que la matriz A es regular o inversible, y a la matriz B se le llama matriz inversa de A y se escribe A^{-1}. Es decir $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

Def.- Si una matriz cuadrada no admite inversa, es decir no es regular se dice que es singular.

Teorema.- La matriz inversa de una matriz cuadrada A si existe es única.

Propiedades

1) $(A^{-1})^{-1}=A$

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

3) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

4).- Una *matriz* cuadrada A decimos que es *ortogonal* sii su traspuesta coincide con su inversa, es decir $A^t = A^{-1}$.

Calculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Nota.- Para calcular la inversa de la matriz A por este método se pone a la derecha de la matriz A la matriz identidad del mismo orden en la forma (A_n | I_n), y le aplicamos las transformaciones elementales por filas entre matrices hasta obtener (I_n | B_n). Si lo conseguimos la matriz B es la inversa de la matriz A. Si al hacer este proceso alguna de las filas de la matriz A se anula, la matriz A no tiene inversa y es una matriz singular.

Nota.-Recuerdo que las transformaciones elementales por filas entre las matrices eran:

(a) Cambiar de orden las filas de la matriz.
(b) Multiplicar una fila de una matriz por un número distinto de cero.
(c) Suprimir una fila que sea combinación lineal de las demás.
(d) Suprimir una fila de ceros.
(e) Sustituir una fila por la suma de ella más otra multiplicada por un número cualquiera
(f) Sustituir una fila por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente multiplicador de la fila sustituida sea un número distinto de cero.

** Calcula la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} 1^a(-1) \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \text{No toco} \\ 2^a+1^a(-3) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \text{No toco} \\ 2^a/(7) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right)\begin{matrix} 1^a+2^a(2) \\ \text{No toco} \end{matrix} \rightarrow$$, luego la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ es A^{-1}=$\begin{pmatrix} -1/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

También se pude calcular utilizando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$, si se conocen los determinantes

** Calcula la matriz inversa de A=$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es $\left[\begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right]$, B=$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ es $\left[\begin{pmatrix} -3 & 9/2 & -1 \\ -6 & 8 & -1 \\ 4 & -11/2 & 1 \end{pmatrix}\right]$,

C=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\right]$

Nota.- También se pude calcular utilizando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$, si se conocen los determinantes. Desde hace dos años (2009-2010) los alumnos de la Comunidad Autónoma Andaluza no tienen necesidad de conocer los determinantes en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Vamos a realizarlo con una matriz de orden 2x2

La matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si su determinarte |A| =$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$= a.d – b.c (producto de los elementos de la diagonal principal menos producto de los elementos de la diagonal secundaria) es distinto de cero, la matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$, donde |A| es el determinante de A, A^t es su matriz traspuesta (cambiar filas por columnas) y $Adj(A^t)$ es la matriz adjunta de la traspuesta.

En el caso de una matriz cuadrada de orden 2x2 indico las diferentes matrices.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; y la inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t) = \frac{1}{|A|}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

** Inversa de $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como |A| = 4.2 – 1.0 = 8 ≠ 0, existe su matriz inversa que es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$.

$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y la inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nota.- Ya es necesario utilizar matrices y grafos, aunque no haya puesto nada en estas notas.

Sistemas de ecuaciones lineales

Def.- Se llama sistema lineal de “m” ecuaciones con “n” incógnitas a toda expresión del tipo

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

en donde x_1, x_2, ..., x_n son las incógnitas, los números reales a_{ij} con $\begin{cases} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$ son los coeficientes de las incógnitas y los números b_i con $1 \le i \le m$ son los términos independientes.

Nota.- La matriz asociada al sistema

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{es} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots & \ldots.. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Def.- Una solución del sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas (I), es una n-tupla (n números ordenados) (α_1, α_2, ..., α_n) que al sustituirla respectivamente por x_1, x_2, ..., x_n, hacen ciertas todas las ecuaciones del sistema lineal (I), es decir verifica

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots.. a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots.. a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots.. a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Def.- Resolver un sistema es averiguar si tiene o no soluciones, y en caso afirmativo determinarlas todas.

Def.- Un sistema se dice que es compatible sii admite al menos una solución, por el contrario se dice que es incompatible si no admite ninguna solución. Un sistema compatible (tiene solución) se dice que es determinado sii tiene solución única, y un sistema compatible se dice que es indeterminado sii admite infinitas soluciones (dependen de un número o de varios números llamados parámetros).

Def.- Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas decimos que es homogéneo sii todos los términos independientes son cero, es decir es una expresión del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nota.-Cualquier sistema homogéneo es siempre compatible, pues por lo menos tiene siempre la solución trivial $\overset{\text{n veces}}{(0,0,0\ldots\ldots..,0)}$.

Def.- En el sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

llamaremos diagonal principal del sistema a la línea que une los coeficientes que tienen los subíndices iguales a_{11}, a_{22},...., a_{ii}, etc.

Análogamente se llama diagonal principal de la matriz asociada al sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$, a la línea que une los términos a_{11}, a_{22},...., a_{ii}, etc.

** Matriz asociada al sistema $\begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & -3y & +4z & = & 6 \\ x & -y & +z & = & 1 \end{cases}$

** Sistema correspondiente a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Sistemas equivalentes

Def.- Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas, aunque tengan distinto número de ecuaciones, se dice que son equivalentes sii tienen las mismas soluciones, es decir cada solución de uno lo es del otro y recíprocamente

** El sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$ es equivalente al sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$, porque tienen la misma solución (x,y)=(1,4) (comprobarlo).

Teorema.- Dado un sistema lineal, las siguientes transformaciones realizadas en él dan lugar a otro sistema lineal equivalente a él (es decir tiene las mismas soluciones):

(a) Cambiar de orden las ecuaciones del sistema.

(b) Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

(c) Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás (que se obtenga a partir de las demás multipiclándolas por ciertos números y sumándolas),

(d) Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número cualquiera.

(e) Sustituir una ecuación del sistema por una combinación lineal de ella y de las restantes siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida sea distinto de cero.

Consecuencia.- Cada una de las transformaciones anteriores que dan lugar a sistema lineales equivalentes, determina una transformación en la matriz asociada al sistema lineal.

Las transformaciones que podemos utilizar en las matrices asociadas para dar lugar a sistemas equivalentes son las siguientes:

(a) Cambiar de orden las filas de la matriz.

(b) Multiplicar una fila de una matriz por un número distinto de cero.

(c) Suprimir una fila que sea combinación lineal de las demás.

(d) Suprimir una fila de ceros.

(e) Sustituir una fila por la suma de ella mas otra multiplicada por un número cualquiera

(f) Sustituir una fila por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente multiplicador de la fila sustituida sea un número distinto de cero.

Nota.- Estas transformaciones entre las matrices son muy importantes, pues las utilizaremos para resolver sistemas de ecuaciones, calcular el rango de un conjunto de vectores, el rango de una matriz. Calcular determinantes etc..

Resolución de sistemas. Método de Gauss (Gauss-Jordan)

Nota.- Recuerdo que resolver un sistema es determinar si tiene o no solución y en caso afirmativo determinar todas las soluciones.

Def.- Un sistema lineal de ecuaciones se dice que es *escalonado* si el primer elemento no nulo de cada fila, llamado cabecera de la fila está mas a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

Def.- Análogamente un *sistema es triangulado* (n=m) si todos los coeficientes que hay por debajo de la diagonal principal (línea que une los términos a_{11}, a_{22},...., a_{ii},) son cero, es decir cada una de las ecuaciones tiene una incógnita menos que la anterior, por tanto tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Nota.- En la practica en vez de utilizar las incógnitas x_1, x_2, x_3, .. x_n, utilizaremos las usuales x, y, z, t etc..

Nota.- La resolución de un sistema escalonado es tremendamente sencilla. De la última ecuación despejamos la incógnita que haya, con ese valor de esa incógnita entramos en la ecuación anterior y obtenemos el valor de la siguiente incógnita. Con los dos valores de las dos incógnita que ya tenemos entramos en la otra ecuación y obtenemos el valor de otra incógnita. Seguimos así hasta que terminemos. Veámoslo con un ejemplo:

** Resolver el sistema

$$x+2y+3z+t=1$$
$$4y-5z+6t=2$$
$$2z+6t=5$$
$$2t=6$$

De la última ecuación tenemos 2t=6, de donde t=6/2=3. Entramos con este valor de t en la ecuación anterior y tenemos 2z+6.(3)=5, operando y despejando resulta z=(- 13)/2.

Con t=3, y z=-13/2 entramos en 4y-5z+6t=2, y tenemos 4y-5(-13/2)+6(3)=2. Operando y despejando obtenemos y= -97/8.

Con t=3, z= -13/2, y= -97/8 entramos en x+2y+3z+ t=1 y tenemos x+2(-97/8) +3(-13/2) +(3)=1. Operando y despejando obtenemos x=163/4.

La solución del sistema es (x,y,z,t)=(163/4, -97/8, -13/2,3)

Def.- El *método de Gauss* para resolver sistemas de ecuaciones lineales consiste en transformar el sistema dado por otro equivalente que sea escalonado, utilizando para ello las transformaciones que dan lugar a sistemas equivalentes.

Nota.- En la `práctica para conseguir un sistema escalonado buscaremos una ecuación que tenga como coeficiente de la “x” un 1 o un –1, sino lo fabricamos. Cuando se tenga se pueden hacer cero todas la “x” de las restantes ecuaciones que se encuentren debajo de la primera. Una vez hecho esto dejamos esta 1ª ecuación quieta y con las restantes buscamos otra que tenga como coeficiente de “y” un 1 o un –1, sino lo fabricamos. Una vez que lo tengamos podemos hacer cero todas la “y” que se encuentran debajo de la 2ª ecuación. Se sigue este proceso hasta que se termine.

En realidad todo esto se hace con la matriz asociada al sistema.

Resumiendo.- Al aplicar el sistema de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales nos puede quedar en el sistema escalonado lo siguiente:

(a) Tantas ecuaciones válidas como incógnitas. En este caso *el sistema tiene solución única* y es **un sistema compatible y determinado**..

(b) Mas incógnitas que ecuaciones. En la última ecuación se pasan las incógnitas sobrantes al 2º miembro, cada una de estas incógnitas sobrantes se les dará un valor de un parámetro. En este caso *el sistema tiene infinitas soluciones* y depende de los parámetros (incógnitas que hemos pasado al 2º miembro) **se dice que el sistema es un sistema compatible e indeterminado**..

(c) Puede aparecernos una ecuación de la forma $0.x_i=k\neq 0$, lo cual es un absurdo, en este caso *el sistema no tiene solución* y se dice **que es un sistema incompatible**.

Veámoslo con ejemplos:

** Resolver el sistema $\begin{cases} x & -y & -2z & = & -1 \\ 2x & -3y & +4z & = & 4 \\ 5x & -y & +3z & = & 16 \end{cases}$. Pasamos a la matriz asociada

Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ 2^a + 1^a \cdot (-2) \\ 3^a + 1^a \cdot (-5) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ \text{No se toca} \\ 3^a + 2^a \cdot (4) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{array}\right)$

Es decir la fila que se multiplica no se toca

Ya tenemos la matriz escalonada, pasamos al sistema escalonado equivalente $\begin{cases} x & -y & -2z & = & -1 \\ & -y & +8z & = & 6 \\ & & 45z & = & 45 \end{cases}$, de donde de la ultima ecuación z=1, entramos en la anterior y obtenemos -y+8(1)=6, de donde y=2. Con z=1 e y=2 entramos en x-y-2z=-1, obtenemos x-2-2=-1 de donde x=3, y la solución del sistema es (x,y,z)=(3,2,1).

Como la solución es única es un *sistema compatible y determinado*.

** Resolver el sistema $\begin{cases} x & -2y & +z & = & 3 \\ -x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & -3y & +z & = & 2 \end{cases}$. Pasamos a la matriz asociada

Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ 2^a + 1^a \cdot (1) \\ 3^a + 1^a \cdot (-2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ \text{No se toca} \\ 3^a + 2^a \cdot (1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Ya tenemos la matriz escalonada, pasamos al sistema escalonado equivalente $\begin{cases} x & -2y & +z & = & 3 \\ & -y & -z & = & 4 \\ & & -2z & = & 0 \end{cases}$, de donde resolviéndolo obtenemos z=0, y=-4 y x=-5.

La solución del sistema es (x,y,z)=(-5,-4,0), como la solución es única, tenemos un *sistema compatible y determinado* .

** Resolver el sistema $\begin{cases} x & -y & +3z & = & 4 \\ 2x & -y & -z & = & 6 \\ 3x & -2y & +2z & = & 10 \end{cases}$. Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ 2^a + 1^a \cdot (-2) \rightarrow \\ 3^a + 1^a \cdot (-3) \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ \text{No se toca} \\ 3^a + 2^a \cdot (-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Como la tercera fila es de ceros desaparece y el sistema asociado es $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 7z = -2 \end{cases}$. Como tenemos dos ecuaciones solo hay dos incógnitas principales la "x" y la "y", la "z" la pasamos al otro miembro y le damos el valor de un parámetro, es decir hacemos z=λ, con lo cual nos queda y= - 2+7λ, y entrando en la 1ª ecuación y operando obtenemos x=2+4λ. Por tanto la solución del sistema es (x,y,z)=(2+4λ,- 2+7λ,λ) con $\lambda \in \Re$ (λ número real).

Es un sistema que tiene *infinitas soluciones* que dependen del parámetro λ, y es **un sistema compatible e indeterminado** (depende de un parámetro).

** Resolver el sistema $\begin{cases} x+y-z+t=6 \\ -x+3y-2z+2t=-1 \end{cases}$. Matriz asociada $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ 2^a+1^a\cdot(1) \end{array} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right)$. Sistema asociado $\begin{cases} x+y-z+t=6 \\ 4y-3z+3t=5 \end{cases}$.

Como tenemos dos ecuaciones solo hay dos incógnitas principales la "x" y la "y", la "z" y la "t" las pasamos al otro miembro y le damos valores de parámetros, es decir hacemos z=λ y t=μ, con lo cual entrando en la 2ª ecuación y operando obtenemos y=$\frac{5+3\lambda-3\mu}{4}$. Si ahora entramos con los valores de t, z e y en la 1ª ecuación y despejamos la "x" obtenemos x=$\frac{19+\lambda-\mu}{4}$, por tanto las soluciones del sistema son

(x,y,z,t)=($\frac{19+\lambda-\mu}{4}$, $\frac{5+3\lambda-3\mu}{4}$, λ, μ) con λ, $\mu \in \Re$ (λ y μ números reales). Es decir las soluciones dependen de dos parámetros y *tiene infinitas soluciones*. **Es un sistema compatible e indeterminado** (doblemente, porque depende de dos parámetros)

** Resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 4x-2y+6z=9 \\ x-y+z=3 \end{cases}$. Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Cambio } 1^a \\ \text{por } 3^a \end{array} \rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No se toca} \\ 2^a+1^a\cdot(-4) \\ 3^a+1^a\cdot(-2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ 2^a \text{ por } 3^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{No toco} \\ \text{No toco} \\ 3^a+2^a\cdot(-2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Sistema asociado $\begin{cases} x-y+z=3 \\ y+z=-2 \\ 0=1 \end{cases}$. Como vemos la última ecuación es absurda, por tanto *el sistema no tiene solución* y **es un sistema incompatible**.

** Resolver el sistema $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 2x-5y+z=0 \end{cases}$. Como es un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial

(x,y,z)=(0,0,0). Pero no es esta la que buscamos

Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$. Sistema asociado $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$. Dándole el valor z=$\lambda$, obtenemos entrando en la 2ª ecuación y=3λ, y entrando en la 1ª ecuación x=7λ. Por tanto la solución del sistema es (x,y,z)=(7λ, 3λ, λ) con $\lambda \in \Re$ (λ número real). *Tiene infinitas soluciones* que dependen de un parámetro y **es un sistema compatible e indeterminado**.