MATRICES Y DETERMINANTES.

INTRODUCCIÓN.

Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1.850 introducidas por el inglés James Joseph Silverton. El desarrollo de la teoría se debe al matemático y astrónomo irlandés Hamilton en 1.853 y al inglés Cayley. Este último introdujo la notación matricial para un sistema lineal de ecuaciones.

Además de su utilidad para estudiar sistemas aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, etc.

La utilización de las matrices constituye una parte esencial en los lenguajes de programación ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores en tablas organizadas en filas y columnas. La utilización de bases de datos implican el empleo de operaciones con matrices que estudiaremos en este tema.

DEFINICIÓN DE MATRIZ. TERMINOLOGÍA BÁSICA.

Una MATRIZ es un conjunto de números reales ordenados en filas y columnas de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En forma abreviada se escribe $\left(a_{ij}\right)$ mientras que $\boldsymbol{a_{ij}}$ representa un elemento cualquiera de la matriz (el elemento que está en la fila ***i*** y la columna ***j***).

EJEMPLO.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3/4 & -1 & -1/3 & 2 \\ 0 & 5 & 2/5 & -2 \end{pmatrix}$$

es una matriz que tiene tres filas y cuatro columnas: $m = 3$ y $n = 4$.

Llamamos **DIMENSIÓN** de una matriz al producto indicado del número de filas por el número de columnas: $\boldsymbol{m \times n}$ y podemos escribir de forma abreviada $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$

En el ejemplo anterior, la dimensión es 3×4.

IGUALDAD DE MATRICES.

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan igual posición son iguales.

$$\boldsymbol{A = B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{dim}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{B}) \\ \boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}} \end{cases}$$

EJEMPLO.

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 3 & b \\ 4 & c & 2 \end{pmatrix}$ serán iguales si $a = 2$, $b = 1$, $x = 4$ y $c = 1$.

TIPOS DE MATRICES.

Dependiendo de la forma que tengan las matrices o como son sus elementos, podemos distinguir algunos tipos particulares de matrices:

- **MATRIZ FILA** es aquella que tiene una sola fila: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$
- **MATRIZ COLUMNA** es aquella que tiene una sola columna: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$
- **MATRIZ CUADRADA** es la que tiene igual número de filas que de columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En caso contrario se llama **RECTANGULAR:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En una matriz cuadrada, el conjunto formado por los elementos a_{ii} se llama **DIAGONAL PRINCIPAL** y el conjunto de los elementos a_{ij} tal que $\boldsymbol{i + j = n + 1}$, se llama **DIAGONAL SECUNDARIA**.

$$\underset{\text{Diagonal PRINCIPAL}}{\begin{pmatrix} a_{11} & \Theta & \Theta & \cdots & \Theta \\ \Theta & a_{22} & \Theta & \cdots & \Theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{Diagonal SECUNDARIA}}{\begin{pmatrix} \Theta & \Theta & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \Theta & \Theta & \cdots & a_{2,n-1} & \Theta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \Theta & \cdots & \cdots & \Theta \end{pmatrix}}$$

- **MATRIZ TRASPUESTA.**

Dada una matriz A se llama **traspuesta de** $\boldsymbol{A}$ y se representa por $\boldsymbol{A^t}$**,** a la matriz que se obtiene de $\boldsymbol{A}$ cambiando filas por columnas o viceversa.

Ejemplo: Si $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 5\\ 1 & 7\end{pmatrix}$

Es evidente que si A es de dimensión $m\times n$, $\boldsymbol{A^t}$ es de dimensión $n\times m$.

- **MATRIZ NULA**. Es aquella en la que todos sus elementos son nulos. También se llama matriz cero y se representa por **0**.

Para matrices cuadradas:

- **MATRIZ DIAGONAL** es aquella que tiene todos sus elementos nulos salvo los de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

- **MATRIZ ESCALAR** es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$$

- **MATRIZ UNIDAD o IDENTIDAD** es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

- **MATRIZ TRIANGULAR** es aquella en la que todos los elementos por encima (o debajo) de la diagonal principal son nulos.

  Triangular superior si son nulos los elementos situados por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

  Triangular inferior si son nulos los elementos situados por encima de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Las matrices triangulares se utilizan en la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

- **MATRIZ SIMÉTRICA:** es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta, es decir, $A = A^t \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ i, j$
- **MATRIZ ANTISIMÉTRICA:** es una matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir, $A = -A^t \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\ i, j$

OPERACIONES CON MATRICES.

SUMA DE MATRICES.

Dadas dos matrices $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ y $\boldsymbol{B = (b_{ij})}$ de la misma dimensión, se define la suma $\boldsymbol{A + B}$ como otra matriz $\boldsymbol{C = (c_{ij})}$ de igual dimensión que los sumandos y donde $\boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

PROPIEDADES:

1. **Asociativa**: $\boldsymbol{A + (B + C) = (A + B) + C}$
2. **Conmutativa:** $\boldsymbol{A + B = B + A}$
3. **Elemento neutro o nulo:** $\boldsymbol{A + 0 = 0 + A = A}$
4. **Elemento simétrico u opuesto:** Dada una matriz A se define la matriz opuesta $(-A)$ como aquella que se obtiene de A cambiando el signo a todos sus elementos y se verifica que $\boldsymbol{A + (-A) = (-A) + A = 0}$.

   Dos matrices son opuestas cuando su suma es la matriz nula.

   Esta última propiedad nos permite definir la **DIFERENCIA** de matrices de la siguiente manera:

   Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de igual dimensión, se define la diferencia $A–B$ como $\boldsymbol{A - B = A + (-B)}$ y su término general será: $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

NOTA: La suma y diferencia de matrices no se puede definir si sus dimensiones son distintas.

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO.

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real k, se define el producto $\boldsymbol{k \cdot A}$ como otra matriz B de igual dimensión que A y cuyo término general nos viene dado por $\boldsymbol{b_{ij} = k \cdot a_{ij}}$.

Esto nos quiere decir que ***para multiplicar un numero por una matriz se multiplican todos y cada uno de los elementos de la matriz por dicho número***.

PROPIEDADES:

1. **Distributiva para la suma de matrices**: $\boldsymbol{k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B}$
2. **Distributiva para la suma de números reales**: $\boldsymbol{(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A}$
3. **Pseudoasociativa**: $\boldsymbol{k \cdot (h \cdot A) = (k \cdot h) \cdot A}$
4. **Elemento neutro:** $\boldsymbol{1 \cdot A = A}$ (El 1 es el elemento unidad de los números reales).

Por tanto, el conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las operaciones que acabamos de definir tiene estructura de ***espacio vectorial real***.

PRODUCTO DE MATRICES.

El producto de matrices es un poco más complicado que las operaciones anteriores. Vamos a empezar multiplicando dos matrices particulares: una matriz fila de dimensión $(1\times n)$ y una matriz columna $(n\times 1)$.

El producto de una matriz fila $(1\times n)$ por una matriz columna $(n\times 1)$ es un número que se obtiene multiplicándolas término a término y sumando los resultados de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 5\cdot 3 + 3\cdot 2 = -5 - 8 + 15 + 6 = 8$$

Observemos que si el número de columnas de la matriz fila no coincide con el número de filas de la matriz columna, estas matrices no podríamos multiplicarlas.

Este producto vamos a utilizarlo para definir el producto de dos matrices:

Sean dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$, se define el producto $A\cdot B$ como otra matriz C cuyos elementos se obtienen de la siguiente forma:

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

es decir, el elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B.

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nj}$$

Debemos observar que para poder multiplicar dos matrices el número de filas de la matriz A debe ser igual al número de columnas de la matriz B.

La matriz producto tiene tantas filas como la matriz A y tantas columnas como la matriz B.

PROPIEDADES.

1. **Asociativa:** $\boldsymbol{A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C}$
2. **No verifica la propiedad conmutativa**: en general, $\boldsymbol{A\cdot B\neq B\cdot A}$
3. **Si *A* es una matriz de orden *n*, se verifica que**: $\boldsymbol{A\cdot I_n=I_n\cdot A=A}$
4. **Distributiva:** $\boldsymbol{A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C}$

Con estas propiedades y las vistas anteriormente para la suma, **{ $M_n(\mathbb{R})$, +, · }** tiene estructura de ***anillo unitario no conmutativo***.

Ejercicios.

- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}$

  Calcular:

1. $A+B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-4\\5&0\end{pmatrix}$

2. $A-B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4\\-1&2\end{pmatrix}$

3. $2\cdot A+3\cdot B=2\cdot\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-8\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0\\9&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-8\\13&-1\end{pmatrix}$

4.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+(-4)\cdot3&3\cdot0+(-4)\cdot(-1)\\2\cdot2+1\cdot3&2\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-12&0+4\\4+3&0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&4\\7&-1\end{pmatrix}$$

5. $B\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+0\cdot2&2\cdot(-4)+0\cdot1\\3\cdot3+(-1)\cdot2&3\cdot(-4)+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-8\\7&-13\end{pmatrix}$

Observando los resultados de los productos $\boldsymbol{A\cdot B}$ y $\boldsymbol{B\cdot A}$ podemos ver como el producto de matrices no es conmutativo.

6. La matriz ***X*** tal que $\boldsymbol{3A-X=2B}$

Operamos sin sustituir las matrices y despejando ***X*** nos queda: $\boldsymbol{X=3\cdot A-2\cdot B}$

Entonces, una vez despejada la matriz *X*, sustituyendo las matrices *A* y *B* y operando, nos queda:

$$X=3\cdot\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-12\\6&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\6&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-12\\0&5\end{pmatrix}$$

- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}\quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $$A+B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&5\\4&2&2\\6&1&6\end{pmatrix}$$

b) $$2\cdot A-B^t=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&4&6\\4&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-2\\1&4&7\\0&5&-3\end{pmatrix}$$

c) $$A.B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+4&1+0-1&4+0+5\\2+6+12&1+0-3&4-2+15\\4+6+4&2+0-1&8-2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&9\\20&-2&17\\14&1&11\end{pmatrix}$$

d) $$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+8&0+2+8&2+3+4\\3+0-2&0+0-2&3+0-1\\4-1+10&0-2+10&4-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&10&9\\1&-2&2\\13&8&6\end{pmatrix}$$

e) $$A^t\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3+8&1+0-2&4-1+10\\0+6+8&0+0-2&0-2+10\\2+9+4&1+0-1&4-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-1&13\\14&-2&8\\15&0&6\end{pmatrix}$$

f) $$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+4&2+6+12&4+6+4\\1+0-1&1+0-3&2+0-1\\4-0+5&4-2+15&8-2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&20&14\\0&-2&1\\9&17&11\end{pmatrix}$$

g) $$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}6&0&9\\20&-2&17\\14&1&11\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}6&20&14\\0&-2&1\\9&17&11\end{pmatrix}$$

Si observamos los dos últimos resultados, veremos que son iguales y, en consecuencia, llegamos a la siguiente conclusión: $\boldsymbol{(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t}$

Además, es evidente que se verifica que $\boldsymbol{(A^t)^t=A}$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

El determinante de una matriz A cuadrada es un número que se obtiene a partir de los elementos de la matriz.

Se representa por $|A|$ o $\det(A)$.

Veamos como calculamos determinantes sencillos para después dar el salto a otros de orden superior:

Determinante de orden dos.

Sea la matriz cuadrada de dimensión 2×2 dada por $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Definimos el determinante de A de la siguiente forma:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$

Determinante de orden tres.

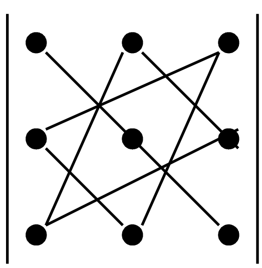
Es un número asociado a una matriz 3×3 calculado de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

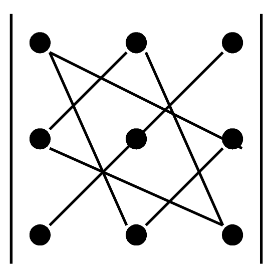
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos observar que en cada producto hay un factor por cada fila y columna; además la mitad de los productos tienen signo más y la otra mitad signo menos.

Para recordar estos productos que nos dan el valor del determinante de orden 3, se utiliza la siguiente regla:



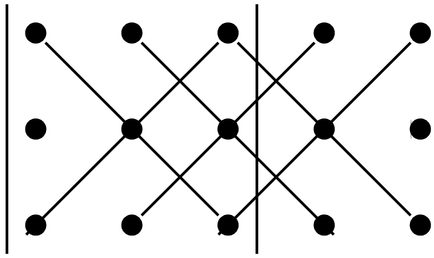
PRODUCTOS CON SIGNO +



PRODUCTOS CON SIGNO −

Esta regla se conoce con el nombre de **Regla de SARRUS**.

Otra forma de recordar los productos del desarrollo de un determinante de orden tres seria la siguiente:



Diagonales de izquierda a derecha: +

Diagonales de derecha a izquierda: –

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 3 + (-6)\cdot(-2)\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot(-2)\cdot 1 - (-6)\cdot 3\cdot 3 =$$

$$= 45 + 12 + 12 - 12 + 10 + 54 = 121$$

Propiedades de los determinantes.

1. El determinante de una matriz cuadrada A es igual que el determinante de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

Esta propiedad nos indica que todo lo que pudiéramos decir para filas, también sería válido para las columnas.

2. Si permutamos entre sí dos filas (o columnas) de una matriz, el determinante cambia de signo, sin variar su valor absoluto.

3. Si todos los elementos de una fila (o columna) de una matriz cuadrada son ceros, el determinante de dicha matriz es cero.

4. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante vale cero.

5. Si una matriz cuadrada tiene dos filas (o columnas) proporcionales, su determinante vale cero.

6. Si los elementos de una fila (o columna) de un determinante se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

7. Si una fila (o columna) de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más filas (o columnas), entonces el determinante de la matriz vale cero.

8. El determinante de una matriz cuadrada no cambia si se sustituye una fila (o columna) por una combinación lineal de ella con las restantes filas (o columnas).
Aplicando esta propiedad de forma reiterada, el determinante de una matriz cuadrada se puede convertir en otro del mismo valor que el dado, de tal forma que, todos los elementos de una fila (o columna) elegida, sean cero, excepto uno de ellos.

9. El determinante de una matriz triangular o diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

10. Si cada elemento de una fila (o columna) de una matriz cuadrada se escribe como suma de dos sumandos, el determinante de dicha matriz es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas (o columnas), salvo la que se haya descompuesto, en la que el primer determinante tiene los primeros sumandos y el segundo determinante los segundos sumandos.

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Sea A una matriz cuadrada de orden n y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Se llama **MATRIZ COMPLEMENTARIA** del elemento a_{ij} a la matriz que resulta de A al suprimir la fila i y la columna j (la fila y la columna en la que se encuentra dicho elemento).

Se designa por M_{ij} y, evidentemente, será una matriz de orden $n-1$.

Se llama **MENOR COMPLEMENTARIO** del elemento $a_{ij} \in A$ al determinante de la matriz complementaria.

Se llama **ADJUNTO** del elemento a_{ij}, y lo representaremos por A_{ij}, al menor complementario del elemento a_{ij} multiplicado por ± 1 según que la suma de los subíndices del elemento sea par o impar, es decir $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$

En consecuencia, el adjunto de un elemento es el menor complementario de ese elemento afectado del signo **+ ó −,** según la posición que ocupe el elemento en la matriz.

Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna.

Consideremos el desarrollo del determinante de orden 3:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Si sacamos factor común los elementos de una fila o columna (p.e. los elementos de la primera fila) nos queda:

$$|A| = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + a_{12} \cdot (a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = (\clubsuit)$$

El contenido de cada uno de los paréntesis del desarrollo anterior coincide con el desarrollo de un determinante de orden 2 y podríamos expresarlo de la forma:

$$(\clubsuit) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Este resultado podemos generalizarlo para el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden de la siguiente forma:

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$$

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Con esta regla se rebaja el orden del determinante que se quiere calcular a una unidad menos. Para evitar muchos cálculos conviene que la fila o la columna por la que desarrollemos tenga el mayor número de ceros posibles y, si no es así, se pueden hacer por el método de reducción aplicando las propiedades de los determinantes.

EJEMPLO:

- Calcular el siguiente determinante desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 2\cdot 7 + 3\cdot(-2) = 5 - 14 - 6 = -15$$

- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{\, 4C \leftarrow 4C - 2\cdot 1C \,\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} =$$

Hemos reducido el determinante de orden 4 a otro de orden 3. Llegados aquí, tenemos dos posibilidades: desarrollar este determinante de orden 3 directamente, aplicando la regla de Sarrus o seguir la reducción igual que antes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -12 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sustituimos:} \\ 2F \leftarrow 2F + 1F \\ 3F \leftarrow 3F - 1F \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-11) = 11$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Sustituimos:} \\ 2F \leftarrow 2F + 1F \\ 3F \leftarrow 3F + 1F \\ 4F \leftarrow 4F + 1F \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

Como nos ha quedado una matriz triangular, su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal y nos queda:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$$

- Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} Sustituimos: \\ 2F \leftarrow 2F - 1F \\ 3F \leftarrow 3F - 1F \\ 4F \leftarrow 4F - 1F \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x-3 & 3-x & 0 & 0 \\ x-3 & 0 & 3-x & 0 \\ x-3 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (x-3)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} Sustituimos: \\ 4C \leftarrow 4C + 1C \end{Bmatrix} = (x-3)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & x & x & x+3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-3)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & x & x+3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} Sustituimos: \\ 1C \leftarrow 1C + 3C \end{Bmatrix} = (x-3)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2x+3 & x & x+3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)^3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2x+3 & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)^3 \cdot (-2x-3-x) = (x-3)^3 \cdot (-3x-3) = -3 \cdot (x-3)^3 \cdot (x+1)$$

- Calcular los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

- Obtener, simplificando, el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

- Calcular por transformaciones elementales (sin utilizar la regla de Sarrus) y justificando los pasos), el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

- Hallar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

- Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

- Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcular:

$$\begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix}$$

DETERMINANTE DEL PRODUCTO DE MATRICES.

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. El determinante de la matriz producto $A \cdot B$ es igual al producto de los determinantes de ambas matrices:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

MATRIZ INVERSA: CÁLCULO.

Matrices regulares y singulares.

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es **REGULAR** si su determinante es distinto de cero, es decir:

$$\boldsymbol{A} \ \textbf{es regular} \quad \Leftrightarrow \quad |A| \neq \mathbf{0}$$

Si su determinante es cero, se dice que es **SINGULAR**.

$$\boldsymbol{A} \ \textbf{es singular} \quad \Leftrightarrow \quad |A| = \mathbf{0}$$

Ejemplo:

- Comprobar si son regulares o singulares las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta.

Dada una matriz cuadrada A de orden $\boldsymbol{n}$, se llama **MATRIZ ADJUNTA** de A, y se representa por (***Adj A***), a la matriz que se obtiene de A sustituyendo cada elemento por su adjunto:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Como ya hemos visto, se verifica que la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos es igual al determinante de la matriz.

Sin embargo, la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de una fila (o columna) paralela a ella es igual a cero, ya que sería igual al desarrollo de un determinante que tendría dos filas (o columnas iguales).

Aplicando estas dos afirmaciones podríamos demostrar que el producto de una matriz cuadrada por la traspuesta de su adjunta es una matriz escalar con valor constante igual al determinante de la matriz.

Ejemplo:

- Calcular las matrices adjuntas de las matrices del ejercicio anterior.
- Comprobar que $A \cdot (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$

Matriz inversa.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se llama **MATRIZ INVERSA** de A a otra matriz de orden n, que representaremos por A^{-1}, que verifica que $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$.

No todas las matrices tienen inversa. Para que una matriz $\boldsymbol{A}$ admita inversa tiene que ser regular.

Existen varias formas de calcular, si existe, la inversa de una matriz:

- Aplicando la propia definición y resolviendo el sistema que resulta.
- Mediante transformaciones elementales aplicadas a una matriz: **Método de Gauss-Jordan.**

  El método de Gauss-Jordan consiste en realizar operaciones elementales sobre una matriz formada por A y la matriz identidad I $\boldsymbol{(A \mid I)}$, hasta transformarla en $\boldsymbol{(I \mid A^{-1})}$.

- Por determinantes: Según hemos visto, el producto de una matriz cuadrada por la traspuesta de su adjunta es una matriz escalar con elemento constante igual a $|A|$. Podríamos escribir: $\boldsymbol{A \cdot (Adj\ A)^t = |A| \cdot I}$

  Luego, $\boldsymbol{\dfrac{1}{|A|} \cdot \left[A \cdot (Adj\ A)^t\right] = I}$

  En consecuencia, por la definición de la matriz inversa de A, la obtenemos mediante la expresión: $\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (Adj\ A)^t}$.

  Para calcular la matriz inversa por este método daremos los siguientes pasos:

  1. Calculamos el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$. Si éste es igual a cero no existirá matriz inversa.
  2. Calculamos la matriz adjunta de $\boldsymbol{A}$
  3. Trasponemos la matriz anterior: $\boldsymbol{(Adj\ A)^t}$
  4. Dividimos por $\boldsymbol{|A|}$ (dividimos cada uno de los elementos de la matriz).

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Calcula la matriz inversa, si existe, de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MENOR DE UNA MATRIZ.

Dada una matriz $A_{m\times n}$, se llama **SUBMATRIZ** de la matriz A a cualquier matriz que se obtenga de ella suprimiendo ciertas filas y ciertas columnas.

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ si suprimimos la primera fila y la tercera columna, obtenemos $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de dimensión 2×3 que es una submatriz de *A*.

Si suprimimos la tercera fila y la tercera y cuarta columnas, tenemos $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ que es una submatriz cuadrada de orden 2 de la matriz *A*.

En consecuencia, **las submatrices de una matriz *A* podrán ser rectangulares o cuadradas dependiendo de las filas o columnas que suprimamos en la matriz.**

Llamamos **MENOR** de orden *h* de una matriz *A* al determinante de una submatriz cuadrada de dimensión *h*×*h* de la matriz *A*.

Si dicha submatriz está formada por las *h* primeras filas y las *h* primeras columnas de la matriz *A*, el menor se llama **MENOR PRINCIPAL** de la matriz *A*.

En el ejemplo anterior de la submatriz *C*, su determinante es $|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5$ es un menor de orden 2 y, además, principal.

RANGO DE UNA MATRIZ.

Se llama **RANGO** de una matriz al **orden del mayor menor no nulo de la matriz dada**.

Por tanto, si *A* es una matriz de dimensión *m*×*n* y ***h*** es el rango de *A*, quiere decir que existirá algún menor de orden *h* distinto de cero y todos los menores de orden superior $\{h+1, h+2, \ldots\}$ serán nulos.

De otra forma: Si un menor de orden *h* de una matriz *A* es distinto de cero y todos los menores de orden $(h+1)$ que se pueden formar añadiendo una fila ***p*** de la matriz y cada una de las columnas que no figuran en el menor son nulos, entonces dicha fila ***p*** es combinación lineal de las filas de la matriz que intervienen en el menor.

En consecuencia, **el rango de una matriz es el número de filas (o columnas) de la matriz que son linealmente independientes.**

CONSECUENCIAS:

- Si en una matriz *A* se intercambian dos filas (o columnas) se obtiene otra matriz de igual rango que *A*.

- Si una fila (o columna) de la matriz A está formada por ceros, el rango de A es igual al de la matriz que se obtiene de A suprimiendo dicha fila (o columna).
- Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas) de la misma matriz, se puede suprimir dicha fila (o columna) ya que no afecta al rango de la matriz.

CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

Teorema.

"La condición necesaria y suficiente para que una matriz A de dimensión $m \times n$ tenga rango r es que exista un menor de orden r, extraído de la matriz, distinto de cero y que todos los menores de orden $r + 1$ sean nulos".

$$rango(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\ M_r \neq 0 \\ \forall\ M_{r+1} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta este teorema, para calcular el rango de una matriz podemos seguir los siguientes pasos:

1. La única matriz que tiene rango cero es la matriz nula; cualquier otra matriz tendrá un rango igual o mayor que 1.
2. Se observa a simple vista si existen filas o columnas que sean combinación lineal de otras paralelas a ellas, en cuyo caso se suprimen.
3. Se trata de encontrar, por ser fácil el cálculo, un menor de segundo orden no nulo. Si lo hubiese, podemos afirmar que rango(A) ≥ 2. Si no existe un menor de segundo orden distinto de cero y la matriz no es nula, entonces podemos concluir que rango(A) = 1.
4. Supuesto que rango(A) ≥ 2, añadiremos al menor de segundo orden no nulo que hemos obtenido las filas y columnas restantes para formar menores de tercer orden. Si todos fuesen nulos, podemos afirmar que rango(A) = 2. Si existe un menor de tercer orden distinto de cero, podemos afirmar que rango(A) ≥ 3.
5. De forma análoga se proseguiría hasta que se terminaran las filas y las columnas.

EJEMPLO:

- Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz dada podemos lo siguiente:

a) La tercera fila es igual que la segunda multiplicada por 2.

b) También se verifica que $4F = 1F - 2.(2F)$ y $5F = 1F - 2F$

Por tanto, el rango de la matriz A es igual al rango de la matriz que resulta de A suprimiendo las filas tercera, cuarta y quinta:

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{puesto que el menor de orden 2,} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Puesto que no se trata de la matriz nula, su rango será mayor o igual a uno.

Tomamos un menor de orden dos (el formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas) y vemos si es distinto de cero o no:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13 \neq 0$$

y, por tanto, el rango(A) ≥ 2.

Tomando este menor como base, añadimos la tercera fila y con las distintas columnas vamos formando todos los menores de orden tres que podamos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 - 3 - 8 - 0 - (-2) = -21 \neq 0$$

y, por tanto, el rango(A) ≥ 3.

Pasamos a formar menores de orden cuatro y ver si hay alguno distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Sustituimos}: \\ 2F \leftarrow 2F + 1F \\ \\ 4F \leftarrow 4F - 3\cdot(1F) \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 8 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \textit{Sustituimos}: \\ 2C \leftarrow 2C + 1C \end{array} \right\} = 8\cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot(30 - 6) = 8\cdot 24 \neq 0$$

Como hemos encontrado un menor de orden 4 distinto de cero y no podemos formar menores de orden superior ya que no tenemos más filas, el rango de nuestra matriz será 4: **rango(A) = 4**.

- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Obtener las matrices A y B que verifique el sistema:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Demostrar que $A^2 - A - 2.I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Si A es una matriz cuadrada n×n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad $n \times n$, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

5. Probar que $A^n = 2^{n-1} \cdot A$, siendo A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Calcular por inducción respecto de n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

7. Calcular los valores de t para los que el rango de la siguiente matriz es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

8. Sea A una matriz de orden 3. Demostrar $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas.
Una matriz A se dice que es simétrica si es igual a su traspuesta.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Averiguar para que valores del parámetro λ, la matriz A no tiene inversa. Calcular la inversa cuando $\lambda = 2$.

10. ¿Existe una matriz B tal que el producto $A.B$ sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}?$$

11. ¿Cómo deben ser las matrices rectangulares M y N para que puedan efectuarse las multiplicaciones MN y NM? Razona la respuesta.

12. Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores de $t \in \mathbb{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Para que valores de $t \in R$ existe A^{-1}?

13. Probar que la matriz A tiene inversa y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa:

$$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A - \lambda . I)^2$ sea la matriz nula.

16. Obtener un vector no nulo $\vec{u} = (a,b,c)$, de manera que las matrices siguientes tengan, simultáneamente, rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

17. **(Selectividad - Junio 97)**

Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

se pide:

(1) Estudia si existe y, si es así, calcula la inversa de A.

(2) Estudia si existe y, si es así, calcula la inversa de B.

(3) Determina una matriz X que verifique $\boldsymbol{(2A + I)B = B + AXA}$.