PROGRAMACIÓN LINEAL

Nota.- Un problema de programación lineal consiste en determinar los posibles valores óptimos (máximos o mínimos absolutos) de una función de dos variables $F(x,y) = ax + by$ con a y b son números reales, llamada ***función objetivo***, sabiendo que se cumplen una serie de restricciones (inecuaciones).

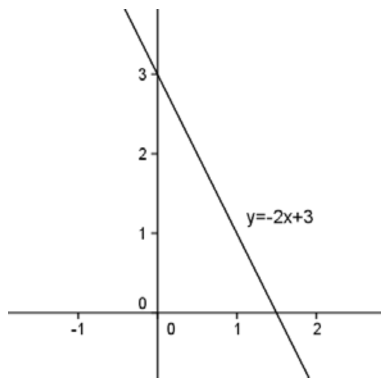
Nota. Normalmente se utilizarán inecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas $cx + dy \geq e$ ó $cx + dy \leq e$, con c, d y e números reales.

Nota.- Recordamos que para resolver una inecuación con dos incógnitas, se despeja la incógnita "y", obteniéndose una expresión del tipo "$y \leq mx + n$" ó "$y \geq mx + n$", con m y n números reales.

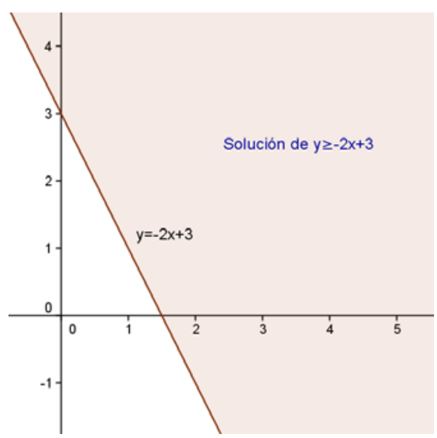
Dibujamos a continuación la recta $y = mx + n$, y en el caso de $y \leq mx + n$, la solución de la inecuación es toda la región del plano que está por debajo de la recta $y = mx + n$ (incluyendo la recta si en la desigualdad está el igual) o la región del plano que está por encima de la recta $y = mx+n$ (incluyendo la recta si en la desigualdad está el igual) si tenemos $y \geq mx + n$.

No olvidar que $x = 0$ es el eje OY. Si tenemos $x \geq 0$, la solución será el semiplano que está a la derecha del eje OY.

Ejemplo:
Resolver la inecuación $2x + y \geq 3$
Convertimos la desigualdad en igualdad $2x + y = 3$, despejemos "y" y dibujamos dicha recta.
La recta es $y = -2x + 3$, cuya gráfica es:



De la inecuación $2x + y \geq 3$, tenemos $y \geq -2x +3$, por tanto la solución de dicha inecuación es todo el semiplano que está por encima de la recta $y = -2x + 3$ (incluyendo la recta, porque en la desigualdad tenemos el igual =)

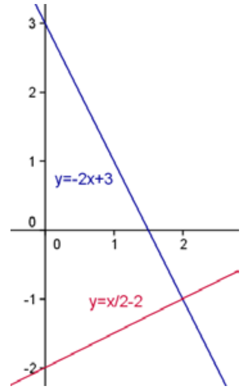


Def.-. Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos o más inecuaciones de dicho tipo.

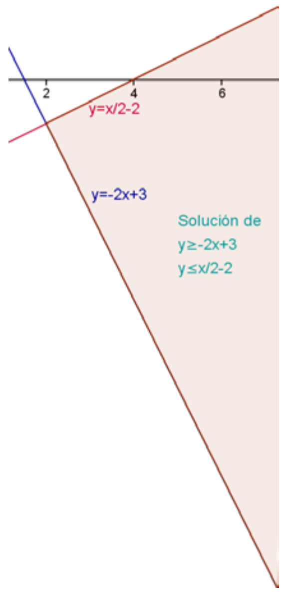
Def.- La solución de un sistema de inecuaciones de dos incógnitas es la solución común a todas las inecuaciones del sistema.

Ejemplo:
Resolver el sistema de inecuaciones $2x + y \geq 3$; $x – 2y \geq 4$.

Convertimos las desigualdades en igualdades 2x + y = 3, x – 2y = 4; despejemos "y" de cada una de ellas, y dibujamos las rectas obtenidas.
La gráfica de las rectas y = -2x + 3   e   y = x/2 – 2 es:



De las inecuaciones "2x + y≥ 3" y "x – 2y ≥ 4", obtenemos "y ≥ -2x +3" y "y≤ x/2 – 2" (observa que si la "y" lleva signo "-" delante al despejar cambia la desigualdad), por tanto la solución del sistema de inecuaciones es la solución común de cada inecuación, es decir el semiplano que hay por encima de la recta "y = -2x +3" junto con el semiplano que hay por debajo de la recta "y = x/2 – 2". Por tanto la solución del sistema "y ≥ -2x +3" y "y≤ x/2 – 2", es la siguiente (incluyendo las rectas, porque en ambas desigualdades tenemos el igual =)



Def.- Esta solución común es una región del plano que puede ser abierta o cerrada, y que en los problemas de programación lineal se llama **región solución o región factible ó recinto.**

Nota.- En la comunidad Andaluza la región factible suele ser cerrada. Es un conjunto convexo (tomando dos puntos cualesquiera de él el segmento que determinan está también incluido en dicha región)

Def.- Los **vértices** ó **puntos de corte** son las soluciones de cada dos rectas que se obtienen de las inecuaciones, y uniendo los vértices obtenemos segmentos que limitan el conjunto convexo que se denominan **bordes** o **lados** . Los vértices y puntos de los lados que pertenecen a la solución se denominan conjuntamente **puntos extremos.**

Teorema.- El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función objetivo F(x,y) alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo absoluto debe estar situado en algún vértice del recinto ó región factible, por lo cual evaluaremos la función objetivo F(x,y) en los vértices de la región factible. El mayor valor es el máximo y el menor valor es el mínimo.
Si en dos vértices consecutivos se obtiene la misma solución (máxima o mínima) entonces el extremo absoluto de la función objetivo F(x,y) se alcanza en todo el segmento que une ambos vértices (tiene infinitas soluciones).

Nota.- Los problemas de programación lineal nos los pueden dar de dos formas, una de ellas es dándonos la función objetivo y las restricciones analíticamente, y la otra es dárnoslas en forma escrita, para que nosotros obtengamos la función objetivo y las restricciones. Veamos un ejemplo de cada tipo:

Ejemplo 1
Sea el sistema de inecuaciones siguiente: x + y ≤ 600, x ≤ 500, y ≤ 3x, x ≥ 0, y ≥ 0.
a) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.
b) Halle el punto del recinto anterior en el que la función *F*(*x*, *y*) = 38*x* + 27*y* alcanza su valor máximo.

Solución

a)
Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.

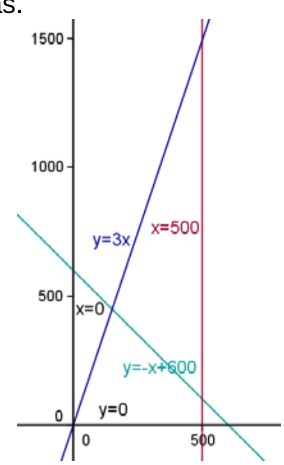
Las desigualdades x + y ≤ 600, x ≤ 500, y ≤ 3x, x ≥ 0, y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

x+y = 600; x = 500 ; y = 3x; y = 0; x = 0,

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente) despejamos las "y" y tenemos

y = 600 - x; x = 500; y = 3x; y = 0; x = 0,

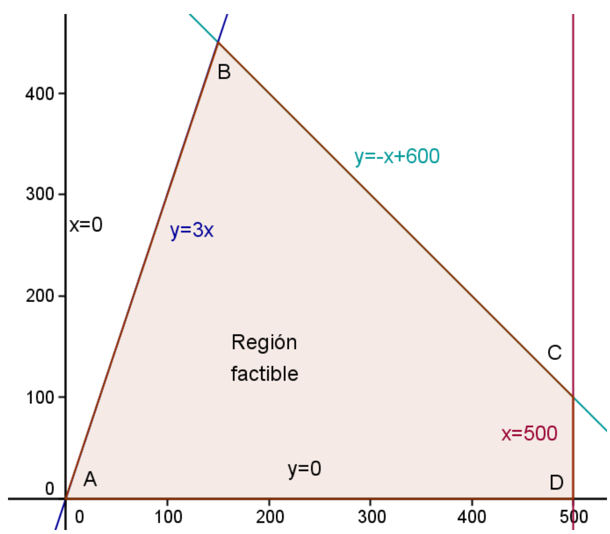
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Fijándonos de nuevo en las desigualdades x+y ≤ 600, x ≤ 500, y ≤ 3x, x ≥ 0, y ≥ 0, y poniéndolas en la forma:

y ≤ -x + 600, x ≤ 500, y ≤ 3x, x ≥ 0, y ≥ 0

Vemos que el recinto o región factible es



Calculamos los vértices A, B, C y D del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x=0 e y=0, obtenemos el punto A(0,0).
De y=3x e y=-x+600, tenemos 3x = -x+600, de donde "4x = 600" luego x = 150 e "y = -150+600 = 450", y el punto de corte es B(150,450)
De x=500 e y =-x+600, tenemos y= -500+600 = 100, y el punto de corte es C(500,100)
De y=500 e y=0, tenemos el punto de corte es D(500,0)
De y=-0'6x+14 y x=0, Tenemos y = 14, y el punto de corte es B(0,14). Luego los vértices de la región factible

son:

A(0,0); B(150, 450); C(500,100) y el D(500,0).

b)

Halle el punto del recinto anterior en el que la función objetivo F(x, y) = 38x + 27y alcanza su valor máximo.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función objetivo F(x,y) alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F(x,y) en los puntos anteriores A(0,0); B(150, 450); C(500,100) y el D(500,0):

F(0,0)= 38(0) + 27(0) =0, F(150, 450)= 38(150) + 27(450) =17850,
F(500,100) = 38(500) + 27(100) = 21700, F(20,0)= 38(500) + 27(0) =19000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función objetivo F(x, y) en la región factible es 21700 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (500,100).

Ejemplo 2

Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. y el de hortalizas de 3000 euros/ha., no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

Solución

Llamamos "x" al número de hectáreas cultivadas de cereales.
Llamamos "y" al número de hectáreas cultivadas de hortalizas.
Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

Llamamos "x" al número de lotes del tipo A.

	Cereales(x)	Hortalizas(y)	Total
Nº hectáreas	1	1	10
Nº hectáreas		Máximo 5	
Coste ha.	1000	3000	16000
Función Objetivo	2000€	8000€	2000x + 8000y

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

$x + y \le 10$; $y \le 5$; $1000x + 3000y \le 16000$, simplificando $x + 3y \le 16$; $y \ge 0$; $x \ge 0$

La función beneficio es F(x,y) = 2000x + 8000y

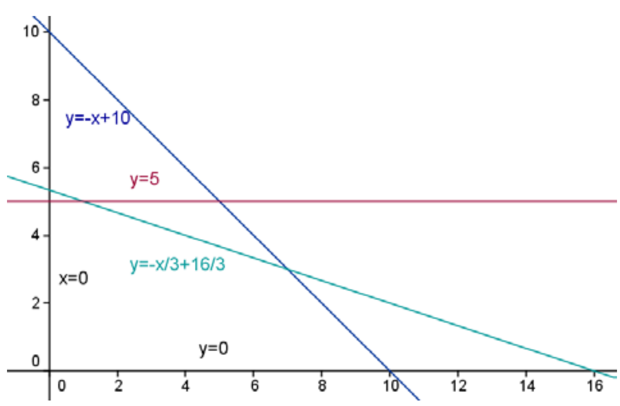
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación

$x + y \le 10$; $y \le 5$; $x + 3y \le 16$; $y \ge 0$; $x \ge 0$

pasamos a la igualdad correspondiente $x + y = 10$; $y = 5$; $x + 3y = 16$; $y = 0$; $x = 0$.
Despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, que en nuestro caso son:

$y = -x + 10$; $y = 5$; $y = -x/3 + 16/3$; $y = 0$ (eje OX); $x = 0$ (eje OY).

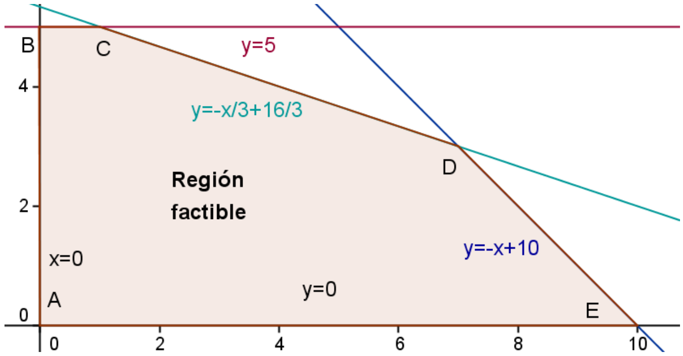
Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades $x + y \le 10$; $y \le 5$; $x + 3y \le 16$; $y \ge 0$; $x \ge 0$, puestas en la forma

$y \le -x + 10$; $y \le 5$; $y \le -x/3 + 16/3$; $y \ge 0$; $x \ge 0$

vemos que la región factible es:



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x=0 e y=0, tenemos el vértice ó punto de corte es A(0,0)
De x=0 e y = 5, tenemos el vértice ó punto de corte es B(0,5)
De y=5 e y=-x/3 + 16/3, tenemos 5=-x/3 + 16/3, es decir 15=-x + 16, de donde x = 1, y el vértice ó punto de corte es C(1,5).
De y=-x/3+16/3 e y=-x + 10, tenemos -x/3+16/3 =-x + 10, es decir -x+16 =-3x + 30, de donde 2x=14, luego x=7. Entrando con este valor en y=-x + 10, tenemos y = -(7)+10=3, y el punto de corte es D(7,3)
De y=0 e y=-x+10, tenemos 0 = -x+10, de donde “x = 10”, y el vértice o punto de corte es E(10,0)

Vemos que los vértices son: A(0,0), B(0,5), C(1,5), D(7,3) y E(10,0).

Consideremos la función objetivo F(x,y) = 2000x + 8000y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función objetivo F(x,y) alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F la función objetivo F(x,y) en los vértices anteriores:

F(0,0) = 2000(0) + 8000(0) = 0, F(0,5) = 2000(0) + 8000(5) = 40000, F(1,5)= 2000(1) + 8000(5) = 42000, F(7,3)= 2000(7) + 8000(3) = 38000, F(10,0)= 2000(10) + 8000(0) =20000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el beneficio máximo es 42000€ (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (1,5), es decir para obtener el mayor beneficio hay que sembrar 1 hectárea de cereales y 5 hectáreas de hortalizas.