Funciones

Definiciones

Def.- Sean A y B $\subset$ R una función real de variable real es toda aplicación:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x)=y \ , \end{aligned}$$

es decir es una relación que a cada todos los elementos "x" del primer conjunto A le hace corresponder un único elemento del segundo conjunto B. La función se puede dar mediante una tabla de valores, una gráfica o una fórmula.

♦♦ A cada persona se le hace corresponder su DNI (si es aplicación)
♦♦ A cada persona se le asocian sus coches (no es aplicación, puede tener mas de uno)

Nota.- Al conjunto A se le llama ***dominio*** (nos será más adelante muy útil para ver la **continuidad** global) de la función f, y se suele escribir Dom(f) (es el conjunto de valores que puede tomar la x. Se mira en abscisas OX).
Al conjunto B se le llama recorrido de la función, y se suele escribir Im(f) ó Re(f) (es el conjunto de valores que puede tomar f(x). Se mira en ordenadas OY).
A la "x" se le llama variable independiente, y a "f(x)" se le llama variable dependiente (depende de la "x", y a veces se escribe "y")
Def.- La gráfica de una función y=f(x) es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) [puntos del plano cartesiano] donde x es un punto de su dominio (abscisa) e y = f(x), es decir el valor de la función en el punto x.
Def.- Dos funciones

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} g: C &\longrightarrow D \\ x &\longrightarrow g(x) \end{aligned}$$

Diremos que son iguales sii tienen el mismo dominio (A=C), el mismo recorrido (B=D) y la misma expresión (f(x)=g(x)).

** Las funciones

$$\begin{aligned} f: R &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow f(x)=2x+1 \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} g: [0,2] &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow g(x)=2x+1 \end{aligned}$$

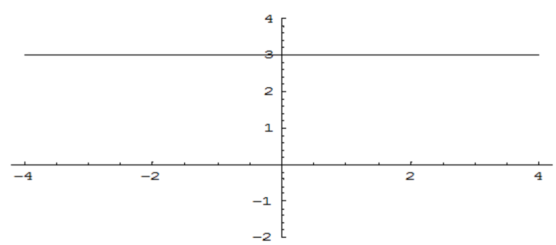
Son distintas puesto que tienen distinto dominio (la primera es una recta y la segunda es un segmento)

Nota.- Normalmente cuando nos den una función solo nos darán su expresión analítica f(x) (su fórmula) y se supondrá que su dominio y su recorrido son los mayores posibles.

Ejemplos de funciones

1) ***Funciones constantes***

Son de la forma f(x)=k con k$\in$R.
Su dominio es R
Su recorrido o Im(f) = {k}
Su gráfica es una *recta paralela* (y = nº) al eje de abscisas OX.
♦♦ f(x)=3



Nota.- También existen las rectas verticales (x = nº**)**, que son paralelas al eje OY.

2) ***<u>Función lineal o de proporcionalidad directa</u>***

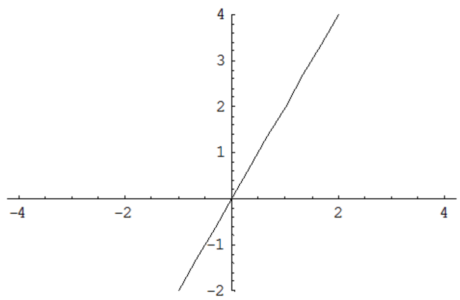
Son de la forma $f(x)=ax$ con $a \in R$.

Su dominio es R

Su recorrido o Im(f) = R

Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas, (con dos puntos es suficiente para dibujarla). Al número “a” se le llama pendiente de la recta (es la inclinación

♦♦ $f(x)= 2x$



Nota.- La recta y = x es la bisectriz (recta que divide en dos partes iguales un ángulo) del I y III cuadrante

Nota.- La recta y = - x es la bisectriz del II y IV cuadrante

3) ***<u>Funciones afines</u>***

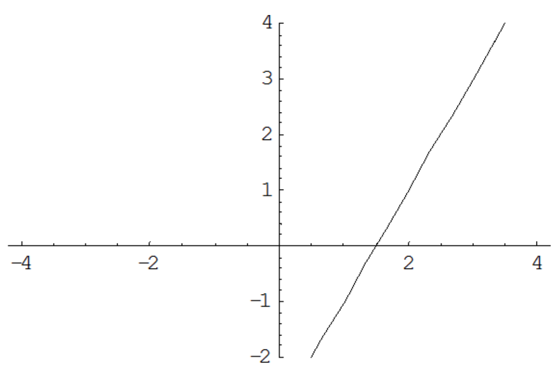
Son de la forma $f(x) = ax + b$ con $a, b \in R$.

Su dominio es R

Su recorrido o Im(f) = R

Su gráfica es una recta, (con dos puntos es suficiente para dibujarla). Al número “a” se le llama pendiente de la recta (es la inclinación de la recta sobre la horizontal, eje de abscisas) y al número “b” se le llama ordenada en el origen (si x=0, origen resulta que $f(0)=a.0+b=b$)

♦♦ $f(x)= 2x-3$

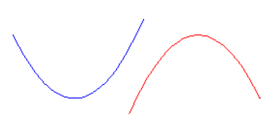


4) ***<u>Funciones cuadráticas</u>***

Son de la forma $f(x)=ax^2 +bx + c$ con $a, b, c \in R$.

Su dominio es $\Re$R

Su recorrido o Im(f) = $(-b/a, +\infty)$ si $a > 0$ ó $(-\infty, - b/a)$ si $a < 0$



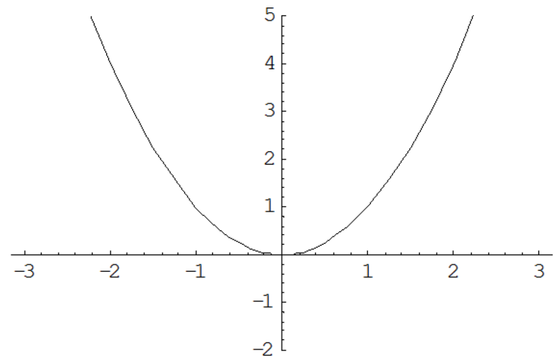
Su gráfica es una *parábola* como las dibujadas azul o roja

<u>Nota</u>.- Para dibujar una parábola $f(x)=ax^2 +bx + c$, hemos de determinar su vértice. La abscisa del vértice es x =-b/2ª, y el vértice de la parábola es el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, sus cortes con los ejes (si hacemos x=0 nos salen los cortes con ordenadas que siempre existe, y si hacemos f(x)=0 y resolvemos la ecuación nos salen los cortes con abscisas, si los hay pues puede haber dos, uno o ninguno). Si nos hacen falta mas valores de “x” le damos un par de valores a la “x” pero a izquierda y derecha de la abscisa del vértice V, x=-b/2a. Con las ramas hacia arriba (color azul) o hacia abajo (color rojo) según sea “a>0” o “a<0”, siendo “a” el número que multiplica a x^2.

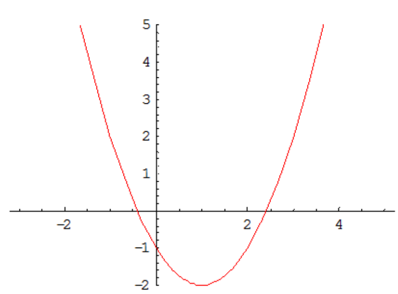
♦♦ $f(x) = x^2 = ax^2 + bx + c$, de donde a = 1, b = 0 y c = 0
Vértice V(-b/2a, f(-b/2a)) = (0, 0)
x = -b/2a = 0/-2 = 0
$f(-b/2a) = f(0) = 0^2 = 0$
Cortes con los ejes
Para x = 0 , f(0) = 0 → punto (0,0)
Para f(x) = 0, $x^2 = 0$, x = 0 → punto (0,0)
Como a = 1 > 0 las ramas de la parábola van hacia arriba.
Como solo nos ha salido un punto le damos algunos en una tabla a izquierda y derecha del vértice.

x	$f(x) = x^2$
1	1
-1	1
2	4
-2	4

Su gráfica es



♦♦ $f(x) = x^2 – 2x – 1 = ax^2 + bx + c$, de donde a = 1, b = - 2 y c = - 1
Vértice V(-b/2a, f(-b/2a)) = (1, - 2)
x = -b/2a = 2/2 = 1
$f(-b/2a) = f(1) = 1^2 –2 –1 = - 2$
Cortes con los ejes
Para x = 0 , f(0) = - 1 → punto (0, - 1)
Para f(x) = 0, $x^2 – 2x – 1 = 0$, $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \approx 1 \pm 1'414 = 2'414$ y -0’414, luego los puntos de corte son (2’41,0) y (- 0’41, 0)
Como a = 1 > 0 las ramas de la parábola van hacia arriba.
Su gráfica es



5) ***Funciones polinómicas***
Son de la forma $f(x)=ax^n + bx^{n-1} + ... + cx + d$ con a, b, c, d $\in$ R

♦♦ $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 1$, x^3, x^4, x^5….
Su dominio es R

6) ***Funciones racionales***
Son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P(x) y Q(x) funciones polinómicas.
♦♦ $f(x) = (x^2 - 2x + 1)/(x + 2)$
Su dominio es = R - {n^{os} que anulan el denominador} = R - {soluciones de Q(x) = 0}.

Nota.-Si una función racional es cero lo que es cero es el numerador
♦♦ $f(x) =(x^2 - 2x + 1)/(x + 2) \rightarrow$ Dom(f) = R -{soluciones de x+2=0} = $\Re$ - {- 2}
$x + 2 = 0;\ x = - 2$

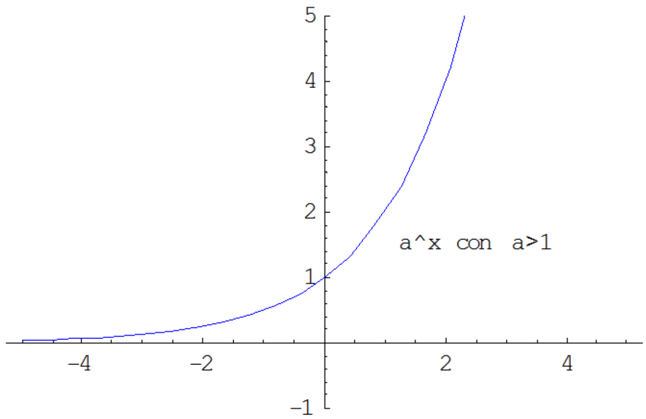
7) *Funciones irracionales*
Son de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ donde g(x) es una función racional
Si "n" es impar Dom(f) = Dom(g) puesto que las raíces impares existen para cualquier número.
Si "n" es par Dom(f) = números "x" tales que $g(x) \geq 0$, puesto que las raíces pares sólo existen para números positivos.
♦♦ $f(x) = \sqrt[2]{24 - 3x}$; $g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x - 3}{4x + 1}}$
Nota.- Hay que recordar como se resolvían inecuaciones de 1er grado y de grado mayor de uno.
Dominio de $f(x) = \sqrt{x+5}$ = n^{os} "x" tales que $x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq - 5$.
Dom(f) = $[- 5, + \infty)$

8) Funciones trascendentes
Son las no algebraicas, es decir no se obtienen como suma, resta, producto, cociente de funciones racionales.
** $f(x) = e^x$; $(x) = a^x$; $f(x) = \ln(x)$, $f(x) = \log(x)$, etc..

Funciones exponenciales
Def.- Las funciones exponenciales son de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, es decir es la función

$$\begin{aligned} f: R &\longrightarrow R_*^+ \\ x &\longrightarrow f(x)= a^x \end{aligned},$$

Propiedades.-
(1) Dominio R (existe para cualquier número "x" y nunca cale 0
(2) Verifican las propiedades de las potencias, es decir:
$a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $a^{x-y} = a^x/a^y$; $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; $(a/b)^x = a^x/b^x$; $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$;
$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^{+x}}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+x}$
(3) Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ siempre es creciente (se dibuja hacia arriba)
(4) su gráfica es:

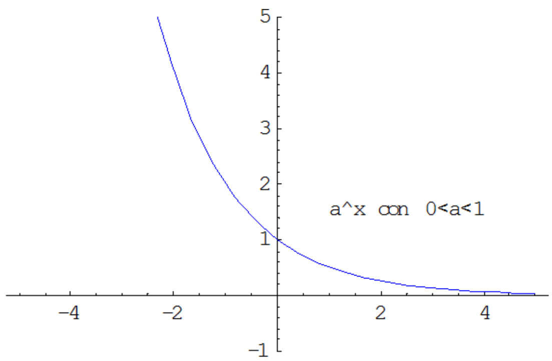


De la gráfica o calculando límites se obtiene:

(5) Veremos con los límites, que $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$.

(3 ‘) Si 0 < a < 1, f(x) = a^x siempre es decreciente

(4 ‘) su gráfica es:



De la gráfica o calculando límites se obtiene:

(5 ‘)Veremos con los límites, que $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+$; $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Funciones logarítmicas

Def.- La función logarítmica en base “a”, que se escribe f(x) = $\log_a(x)$ es la función

$$f : R_*^+ \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) = \log_a(x),$$

Verificando

$$\mathbf{\log_a(x) = y}$$
$$\mathbf{x = a^x}$$

Propiedades

(1) Dominio $\Re_*^+ = R^+ - \{0\}$ (es decir sólo existe para los números positivos) por tanto es continua en $\Re_*^+$. ($\ln(0) = \log(0) = \lim_{x\to 0+} \log(x) = -\infty$)

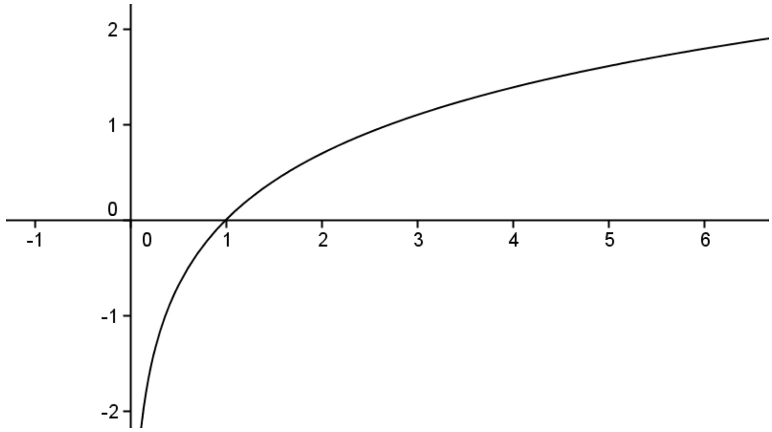
(2) Recorrido $\Re$.

(3) Verifica todas las propiedades de los logaritmos, es decir:

$\log_a(1) = 0$; $\log_a(a) = 1$; $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$; $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

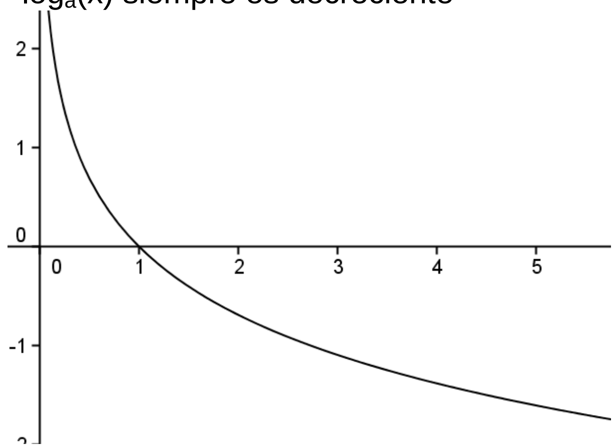
$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$; cambio de base $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$; $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$

(4) Si a > 1, f(x) = $\log_a(x)$ siempre es creciente



(5) Veremos con los límites, que $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$.

(4 ') Si a $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ siempre es decreciente



(5 ')Veremos con los límites, que $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$.

9) ***Funciones a trozos***

Valga la redundancia son funciones formadas por trozos de funciones
Al dar la función nos dan su dominio
Se dibuja cada trozo por separado en la misma gráfica

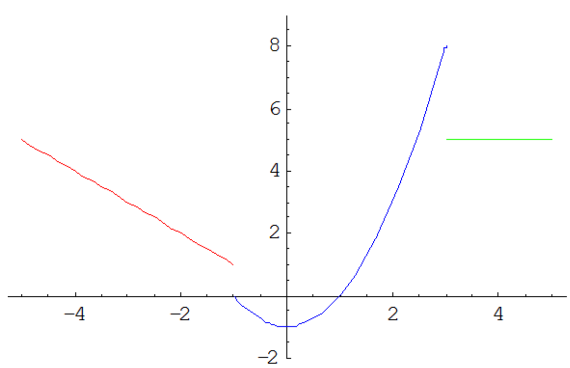
♦♦ $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 5 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

x	f(x) = - x
-2	2
-1	1

x	$f(x) = x^2 - 1$
-1^-	0
3^-	8

x	f(x) = 5
3	5
4	5

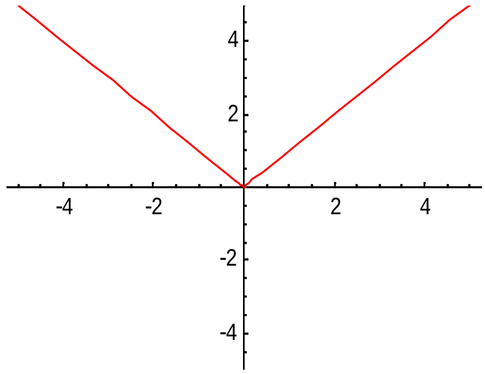
$x^2 - 1$ es una parábola como x^2 pero desplazada una unidad hacia abajo
Su gráfica es



Def.- La función **valor absoluto** es una función real de variable real en la que a cada número le hacemos corresponder su valor absoluto. Nos queda definida de la siguiente forma:

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica será:



Ejemplos.- Halla el ***dominio de definición*** de las funciones siguientes:

1. $y=\dfrac{1}{x^2+4}$ 2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 3. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ 4. $y=\sqrt{2x}$ 5. $y=\sqrt{1+2x}$

6. $y=\dfrac{3}{(x-5)^2}$ 7. $y = \log(2x-4)$ 8. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 9. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ 10. $y=\ln\left(\dfrac{2x}{(x-3)^2}\right)$

Sol.: 1. D = R   2. D = $(2,+\infty)$ 3. D = R – {-2, 2}   4. D = $[0, +\infty)$ 5. D = $[-1/2, +\infty)$
6. D = R – {5}   7. D = $(2, +\infty)$ 8. D = R.   9. D = $(0, +\infty)$ 10. D = $(0, 3)\cup(3,+\infty)$

Límites de funciones. Continuidad

Nota.- Vamos a estudiar el comportamiento de un función f(x) cuando la variable “x” se acerca a un número finito “a” (sin tocarlo), o cuando la variable “x” se acerca a un número muy muy grande positivo (+ infinito = + ∞) o se acerca un número muy muy grande negativo (- infinito = - ∞)

Límite finito en el infinito

Nota.- Puede ocurrir que cuando “x” se hace muy muy grande positivo (+ infinito = + ∞) la función f(x) se acerque a un número “L”. Se suele escribir $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}$ y se lee “el límite de la función f(x) cuando “x” tiende a + infinito es el número L”.

Veamos un ejemplo

♦♦ f(x) = (-10x+1)/(2x+3)

Para x = 1, f(1) = (-9)/5 = - 1’8

Para x = 10, f(10) = (-99)/23 = - 2’ 86..

Para x = 100, f(100) = (-999)/203 = - 4 ’92..

Para x = 1000, f(1000) = (-9999)/2003 = - 4 ‘992..

Para x = 10^6 , $f(10^6) = (-10^7+1)/(2\cdot10^6+3)$ = - 4 ‘999992...

Vemos que cuando la variable “x” se hace muy grande (+∞) la función f(x) = (-10x+1)/ /(2x+3) se acerca al número - 5.

Diremos que $\lim_{x \to +\infty}$ (-10x + 1)/(2x + 3) = - 5.5

Def.- Por definición $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$; es decir para calcular el límite a “- ∞” se cambian las “x” por “- x” y se calcula el límite a + ∞.

Propiedades.-

1.- El **límite** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, si existe **es único**.

2.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) \pm g(x)\,] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim_{x \to +\infty} g(x)}$, es decir el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

Nota.- No tiene sentido ∞ - ∞ (tendremos que estudiarlo mas despacio, es una indeterminación)

3.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) \cdot g(x)\,] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x)}$, es decir el límite de un producto es igual al producto de los límites.

Nota.- No tiene sentido 0 · ∞ (tendremos que estudiarlo más despacio, es una indeterminación)

4.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to +\infty} f(x)}{\lim_{x \to +\infty} g(x)}}$, es decir el límite de un cociente es igual al cociente de los límites.

Nota.- No tiene sentido $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ (tendremos que estudiarlo más despacio, es una indeterminación). Recordamos que no se puede dividir por cero.

5.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to +\infty} f(x)\right]^{\lim_{x \to +\infty} g(x)}}$, cuando exista.

Nota.- No tiene sentido $1^{+\infty}$, 0^{0}, ∞^{0} (tendremos que estudiarlo mas despacio, son indeterminaciones). Si tiene sentido $0^{+\infty} = 0$

6.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = g(\lim_{x \to +\infty} f(x))}$, cuando tenga sentido

7.- Como caso particular $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to +\infty} f(x)}}$, cuando tenga sentido

Nota.- Las tres propiedades siguientes es la técnica que se utiliza para calcular límites en el ∞

8.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (k) = k}$, es decir el límite de un número es el mismo número

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} (5) = 5$; $\lim_{x \to +\infty} (7/5) = 7/5$; $\lim_{x \to +\infty} (\pi) = \pi$

9.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0}$, es decir el límite de un número partido una potencia de “x” es cero. (Es como si repartiésemos entre muchos, pues no tacan a casi nada, que es 0).

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{3x^2} = 0$

Nota.- Es como si sustituyéramos la “x” por infinito. Como dividimos-repartimos entre muchos no tocan a nada.

10.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (ax^n) = \pm \infty}$. El signo depende del signo del coeficiente “a”

Nota.- Es como si sustituyéramos la “x” por infinito.

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} (7x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} (-8x^3) = -\infty$

11.- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (\text{Polinomio}) = \lim_{x \to +\infty} (\text{Término de mayor grado}) = \lim_{x \to +\infty} (ax^n) = \pm \infty}$.

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} (5x^2 - 6x + 4) = \lim_{x \to +\infty} (5x^2) = +\infty$

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} (-7x + 8) = \lim_{x \to +\infty} (-7x) = -\infty$

12.- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{Cociente de}}{\text{Polinomios}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\text{Termino de mayor grado}}{\text{termino de mayor grado}}\right)$ ={ simplificamos “x” y nos queda} =

$= \lim_{x \to +\infty} \left\{\begin{matrix} a/b \\ ax^n \\ k/(x^n) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a/b \\ \pm\infty \\ 0 \end{matrix}\right\}$, pues se reduce al caso **8), 9)** y **10).**

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x+4}{3x^2+8}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x}{3x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{3x}\right) = 0.$

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+5x-1}{3x^2+8x+3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right).$

♦♦ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3+3x-2}{-3x^2+5x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3}{-3x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{-3}\right) = -\infty.$

Nota.- El límite es una operación y mientras no se opere (mientras haya “x”) no se puede quitar la palabra límite.

Nota.- Al resolver este tipo de límites (cuando $x \to \infty$), se nos pueden presentar las siguientes **indeterminaciones** $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $1^{+\infty}$, 0^0 , ∞^0 . En estos casos hay que someter el límite a un estudio especial.

$\boxed{\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}}$

Se suele presentar en cocientes, y se resuelve como si fuera un cociente de polinomios, es decir me quedo con los términos de mayor grado del numerador y denominador, simplifico por la menor potencia de “x” y me quedará número, “x” en el numerador ó “x” en el denominador y aplico las propiedades 8, 9 o 10.

♦♦ $\lim_{x \to \infty} \frac{(1+x)^2-1}{x^2}$ = {operamos y simplificamos} = $\lim_{x \to \infty} \frac{(1+2x+x^2)-1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2x}{x^2}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos “x” y calculamos ya el límite} =

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1) = 1.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1) = 1.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{3}\right) = -1/3.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x^3-2x^2+x}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 0.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = 1/2.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2\right) = +\infty$ (el signo + es el signo del coeficiente).

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5+x+1}{x^7-1}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5}{x^7} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-2\right)^2}{x^3-3}$ = {operamos y simplificamos} = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(x^4-2x^2+4\right)}{x^3-3}$ = {nos quedamos con los términos de mayor grado, simplificamos "x" y calculamos ya el límite} = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right) = +\infty$ (el signo + es el signo del coeficiente).

Indeterminación ∞ - ∞

Se suele presentar en resta de fracciones $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$.

Si se presenta **en resta de fracciones** $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$, se hace la operación, se simplifica al máximo y se sigue con la *técnica del cociente* (indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$).

♦♦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+1} - \frac{2x+1}{2}\right)$ = {se opera y simplifica} = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2(x^2-1)-(x+1)(2x+1)}{2(x+1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-3}{2x+2}\right)$ = {técnica de cociente} = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)$

♦♦ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{x^2+x-3}-x\right)$ = {se opera y simplifica} = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3-(x^3+x^2-3x)}{x^2+x-3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2+3x+3}{x^2+x-3}\right)$ = {técnica de cociente} = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{1}\right) = -1.$

♦ ♦ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x}{2}\right)$ = {se opera y simplifica} = $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-(2x^3-x)}{2(2x^2-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{4x^2-2}\right)$ = {técnica de cociente} = $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{4x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4x}\right)$ = 0.

♦ ♦ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)$ = {se opera y simplifica} = $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(x^2+x)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x+1}\right)$ = {técnica de cociente} = = $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x}\right)$ = $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{1}\right)$ = - 1.

Límite finito de una función f(x) en un punto x = a

Nota.- A veces cuando la variable “x” se acerca a un número “a” (**sin llegar a tocarlo nunca**) la función f(x) se acerca a otro número “L” (puede tocarlo). En este caso se dice que el límite de la función f(x) cuando “x” tiende a “a” es “L” y se escribe $\boxed{\lim_{x\to+a} f(x) = L}$

♦♦ f(x) = x^2 en x = 2. Calcular el límite en x = 2 de f(x) = $(x^2-4)/(x-2)$

Le damos valores a “x” próximos a 2 sin llegar a tocar el 2 y vemos el valor de f(x) = x^2

x = 1 → f(1) = $(1)^2$ = 1	x = 2’5 → f(2’5) = $(2’5)^2$ = 6’25
x = 1’5→ f(1’5) = $(1’5)^2$ = 2’25	x = 2’1 → f(2’1) = $(2’1)^2$ = 4’41
x = 1’9→ f(1’9) = $(1’9)^2$ = 3’61	x = 2’01 → f(2’01) = $(2’01)^2$ = 4’04
x = 1’99→ f(1’99) = $(1’99)^2$ = 3’96	x = 2’001 → f(2’001) = $(2’001)^2$ = 4’004
x = 1’999→ f(1’999) = $(1’999)^2$ = 3’996	x = 2’0001 → f(2’0001) = $(2’0001)^2$ = 4’0004

…………………

Vemos que cuando “x” se acerca al 2 (sin tocarlo) la función f(x) se acerca al 4. En este caso se dice que

$\lim_{x\to+2}(x^2) = 4$

♦♦ Resolver el límite cuando x = 2 en f(x) = $(x^2-4)/(x-2)$

♥*Nota*.- En la práctica para calcular $\lim_{x\to+a}$ f(x) lo que se hace es sustituir la “x” por “a” (aunque la “x” no pueda tocar la “a”)

En el ejemplo anterior $\lim_{x\to+2}(x^2) = (2^2) = 4$

Nota.- A veces la “x” sólo puede acercarse al número “a” por su derecha o por su izquierda. En este caso tenemos los límites laterales que se definen a continuación.

Def.- Por definición $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$. Este es el límite por la derecha de “a”

Def.- Por definición $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$. Este es el límite por la izquierda de “a”

♦♦ Dada la función f(x) = $\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x>0 \\ x-1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$

Como tenemos en la función x > 0 y x < 0 tenemos que calcular los límites laterales y las expresiones x > 0 y x < 0 serán las que nos permitan elegir la rama adecuada

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (x - 1) = 0 - 1 = - 1$$

Como vemos en este caso el límite por la derecha es uno y el límite por la izquierda es otro distinto. En este caso diremos que no existe límite en x = 0.

Propiedades

1.- El **límite** $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si existe **es único**.

2.- Para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ tienen que existir $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y ser iguales es decir

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a} f(x)$$

Nota.- En el ejemplo anterior no existía $\lim_{x\to 0} f(x)$, porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = - 1$

3.- $\boxed{\lim_{x\to +a} [\, f(x) \pm g(x)\,] = \lim_{x\to +a} f(x) \pm \lim_{x\to +a} g(x)}$, es decir el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

Nota.- No tiene sentido $\infty - \infty$ (es una indeterminación)

4.- $\boxed{\lim_{x\to +a} [\, f(x) \cdot g(x)\,] = \lim_{x\to +a} f(x) \cdot \lim_{x\to +a} g(x)}$, es decir el límite de un producto es igual al producto de los límites.

Nota.- No tiene sentido $0 \cdot \infty$ (tendremos que estudiarlo mas despacio, es una indeterminación)

5.- $\boxed{\lim_{x\to +a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to +a} f(x)}{\lim_{x\to +a} g(x)}}$, es decir el límite de un cociente es igual al cociente de los límites.

Nota.- No tiene sentido $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ (tendremos que estudiarlo mas despacio, es una indeterminación). Recordamos que no se puede dividir por cero.

6.- $\boxed{\lim_{x\to +a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to +\infty} f(x)\right]^{\lim_{x\to +a} g(x)}}$, cuando exista.

Nota.- No tiene sentido $1^{+\infty}$, 0^0 , ∞^0 (tendremos que estudiarlo mas despacio, son indeterminaciones). Si tiene sentido $0^{+\infty} = 0$

7.- $\boxed{\lim_{x\to +a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to +a} f(x))}$, cuando tenga sentido

8.- Como caso particular $\boxed{\lim_{x\to +a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to +a\infty} f(x)}}$, cuando tenga sentido

9.- $\boxed{\lim_{x\to +a} (k) = k}$, es decir el límite de un número es el mismo número

♦♦ $\lim_{x\to +3} (5) = 5$; $\lim_{x\to +8} (7/5) = 7/5$;

10.- $\boxed{\lim_{x\to +a} (x) = a}$,

Nota.- Es decir para calcular límites cuando "x" tiende a "a" lo que se hace es sustituir las "x" por "a", aunque la "x" no pueda tocar nunca la "a".

Nota.- El límite es una operación y mientras no se opere (mientras haya "x") no se puede quitar la palabra límite.

♦♦ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$; ♦♦ $\lim_{x\to 2} \frac{-x^2-x}{3x^2+6x+3} = \frac{-6}{27} = \frac{-2}{9}$; ♦♦ $\lim_{x\to 3} \frac{2x-2}{x^3-2x^2+x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

♦♦ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; ♦♦ $\lim_{x\to 1} \frac{2x^4+4x^3}{x^2+4x+4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Nota. Antes de estudiar las indeterminaciones recordamos una nota importante.

Si f(x) es una función y "a" un número real entonces son equivalentes las siguientes cuatro cosas:

(1) *"a" es raíz de f(x)*

(2) *f(a) = 0*, que es la definición de la (1)

(3) *f(x) es divisible por (x – a)*, puesto que el resto de la división entre (x – a) es 0 que es f(a)

(4) *f(x)=(x–a)·Cociente*. (Haremos la división por Ruffinni y sólo se prueba el número "a")

$\boxed{\textbf{Indeterminación } \frac{0}{0}}$

(a) Si la **indeterminación** $\frac{0}{0}$ aparece **en cocientes de polinomios**, descomponemos numerador y denominador en producto de factores (por Ruffinni), simplificamos en el numerador y en el denominador el factor (x – a) [mientras no lo hagamos nos seguirá saliendo $\frac{0}{0}$] y después calculamos $\lim_{x\to +a}$ del cociente que nos quede. Este proceso se puede repetir.

♦♦ $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ = {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el "2", que es el número en el cual se anula} $= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+8)}{(x-2)(x+1)}$ = {simplificamos (x-2) } $= \lim_{x\to 2} \frac{(3x+8)}{(x+1)} = \frac{14}{3}$.

♦♦ $\lim_{x\to +2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(2)^2-4}{3(2)-6} = \frac{0}{0}$. {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el "2", que es el número en el cual se anula} $= \lim_{x\to +2} \frac{x^2-4}{3x-6} =$

$= \lim_{x\to +2} \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}$ = {simplificamos (x – 2)} = $\lim_{x\to +2} \frac{(x+2)}{3}$ = 4/3.

♦♦ $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} = \frac{(-1)^3+1}{(-1)^2+2(-1)+1} = \frac{0}{0}$. {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el "-1", que es el número en el cual se anula}

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+1)}$ = {simplificamos (x – (-1))} = $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x^2-x+1)}{(x+1)} = \frac{3}{0} = \infty$. En este caso tendríamos que hacer los límites laterales en “- 1 “.

♦♦ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right)$ = {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el “2”, que es el número en el cual se anula} = $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2).(x-4)}{(x-2).(x+2)}$ = {simplificamos (x-2)} = $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-4}{x+2} = \frac{2-4}{2+2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

♦♦ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ = {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el “1”, que es el número en el cual se anula} = $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$ = {simplificamos (x-1)} = $= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)}{1}$ = 2/1 = 2.

♦♦ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ = {descomponemos numerador y denominador por Ruffinni probando sólo con el “1”, que es el número en el cual se anula} = $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$ = {simplificamos (x-1)} = $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1} = \frac{5}{2}$

♦♦ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x-4} = \left(\frac{0}{0}\right)$ = { sacamos factor común x en el numerador y después simplificamos “x – 4”} = $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{1}$ = 4/1 = 4

Si tenemos una recta hacemos primero la operación y si podemos sacamos

♦ ♦ $\lim\limits_{x\to 2} \left[\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{x^2+x-2}{x^2-2x}\right]$ = {se opera calculamos el límite} = $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{(x^2+1)(x^2-2x)-(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x^2-2x)}\right) = \frac{0}{0} =$ {intentamos sacar factor común (x-2) en numerador y denominador pues es lo que nos dá los ceros} $= \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{(x^2+1)(x)(x-2)-(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x)(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{(x-2)[(x^2+1)(x)-(x^2+x-2)]}{(x-2)(x)(x-2)}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{(x-2)[(x^3-x^2+2)]}{(x-2)(x)(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{(x^3-x^2+2)}{(x)(x-2)}\right) = \frac{6}{0} = \infty$. Ahora tendríamos que calcular los límites a la derecha y a la izquierda del “2” para ver el signo

Límites infinitos cuando “x” tiende a un número

Nota.- Puede ocurrir que cuando “x” se acerque a un número “a” (sin tocarlo) por la derecha o por la izquierda, la función f(x) se hace muy grande positiva o negativa, es decir simbólicamente tendremos:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Veamos el comportamiento de f(x) = $\frac{2}{x}$ cerca de x = 0. (sin tocar el cero)

x = 1 f(1) = 2/1 = 2

x = 0’1	f(0’1) = 2/0’1 = 20
x = 0’01	f(0’01) = 2/0’01 = 200
x = 0’0000001	f(0’0000001) = 2/0’0000001 = 20000000

En este caso $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = + \infty$

x = -1	f(1) = 2/-1 = -2
x = -0’1	f(-0’1) = 2/-0’1 = -20
x = -0’01	f(-0’01) = 2/-0’01 = -200
x = -0’0000001	f(-0’0000001) = 2/-0’0000001 = -20000000

En este caso $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = - \infty$

Nota.- Cuando nos salga de límite ∞, automáticamente hay que calcular limite por la derecha y por la izquierda.

♦♦ Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}$. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = + \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = - \infty$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2}{x}$, no existe $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}$

** Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x^2}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^+)^2} = \frac{3}{0^+} = + \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{(0^-)^2} = \frac{3}{0^+} = + \infty$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} = + \infty$, existe $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = + \infty$.

Nota.- Hay otras expresiones a tener en cuenta que aparecen en el cálculo de los límites, sobre todo en las potencias, como:

++ Si b > 1 $\begin{cases} b^{+\infty} = +\infty \\ b^{-\infty} = \frac{1}{b^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{cases}$

++ Si 0 < b < 1 $\begin{cases} b^{+\infty} = 0 \\ b^{-\infty} = \frac{1}{b^{+\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

++ Si $\begin{cases} k > 0 \Rightarrow (+\infty)^k = +\infty \\ k < 0 \Rightarrow (+\infty)^k = 0 \end{cases}$

Continuidad

Continuidad en un punto

Nota.- A lo bruto una función f(x) diremos que es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel

Def.- Una función f(x) es continua en un punto x = a sii cumple las tres condiciones siguientes:
(1) Existe f(a) [valor de f(x) en x = a. Principal diferencia con el límite en un punto]

(2) Existe $\lim_{x \to +a} f(x)$

(3) Son iguales, es decir $\lim_{x \to +a} f(x) = f(a)$.

Nota.- Si falla alguna de las tres condiciones anteriores se dice que la función f(x) es discontinua en x = a.

Nota.- A veces la "x" sólo puede acercarse al número "a" por su derecha o por su izquierda. En este caso tenemos los conceptos de continuidad a la derecha y a la izquierda, que se definen a continuación.

Def.- Por definición f(x) es continua a la derecha del punto x = a sii existe f(a), existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y son iguales, es decir $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Def.- Por definición f(x) es continua a la izquierda del punto x = a sii existe f(a), existe $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y son iguales, es decir $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Teorema.- f(x) es continua en x = a sii lo es a izquierda y a derecha de x = a, es decir

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Def.- Una función f(x) es continua en un intervalo sii lo es en todos los puntos del intervalo. En el caso de intervalo cerrado hay que hablar da continuidad por la derecha y por la izquierda en los puntos extremos.

Nota.- Como el concepto de continuidad utiliza el concepto de límite todas las propiedades que se verificaban en el límite en un punto se siguen verificando aquí para la continuidad, es decir:
La suma, diferencia, producto, cociente, "potencia", compuesta etc.. de funciones continuas es continua. (Evidentemente donde existan dichas funciones).

Tipos de discontinuidades en un punto

Def.- Si existe $\lim_{x \to +a} f(x)$, pero no existe f(a) ó $\lim_{x \to +a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f(x) tiene en x=a un *punto de discontinuidad evitable.*
Al número $\lim_{x \to +a} f(x)$ se le llama *verdadero valor de la función f(x) en* x *=a .*

++ Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3\text{-}2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en el punto *x* = 1.

f(x) es continua en el punto *x* = 1, si f(1) = $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

Para x = 1 f(x)) 3x+1, luego f(1) = 3(1) + 1 = 4

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x+1) = 4$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3\text{-}2x) = 1$

Al ser los límites laterales distintos, la función no tiene límite en dicho punto.
En consecuencia, en *x* = 1, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito:

$$\textbf{salto} = \lim_{x \to 1^+} f(x) - \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3$$

Def.- Si existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ pero son distintos, es decir $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, se dice que f(x) tiene en x = a un punto de *discontinuidad inevitable* de salto finito o de 1ª especie.

++ ejemplo $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Def.- Si no existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, se dice que f(x) tiene en x = a un punto de *discontinuidad inevitable* de salto infinito o de 2ª especie.

++ Ejemplo f(x) = 1/x

Continuidad en un intervalo.

Def.- Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en todos los puntos del intervalo.

Def.- Una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y, además, es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*.

Nota.- Cuando se estudian las funciones globalmente, no referidas a un solo punto, dichas funciones suelen ser continuas en su dominio.
++ Las funciones polinómicas son continuas en $\Re$.
++ Las funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en
R - {n^{os} que anulan el denominador} = R - {soluciones de Q(x) = 0}

++ Funciones irracionales de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ donde g(x) es una función racional

Si "n" es impar es continua donde lo sea g(x)
Si "n" es par es continua en los números "x" tales que g(x) ≥ 0, puesto que las raíces pares sólo existen para números positivos.
Etc...

Ejemplo.
1.- La función f(x) = x^2 es continua en todo su dominio *R* y, por tanto, en cualquier intervalo abierto de *R*.
2.- La función f(x) = 1/x no está definida en el punto *x* = 0: su dominio de definición es

Dom(f) = R – {0} = R^*

3.- Para cualquier intervalo abierto (a,b) que no contenga el 0, *f*(*x*) es continua en todos sus puntos y diremos que la función es continua en el intervalo abierto (a,b), p.e. (3,5). Sin embargo, no será continua en cualquier intervalo que contenga a dicho punto, p.e., (-a,a).

Ejercicios
1. Representar la función siguiente e indicar si tiene algún punto de discontinuidad: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x<4 \\ 0 & \text{si } x^{3}4 \end{cases}$

2. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=sig(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ +1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

3. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x \le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

4. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ (b) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ (c) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ (d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (e) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

(f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ (g) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \in]-4,-2[\\ 1+3x & \text{si } x \in [-2,1] \\ x^2 & \text{si } x \in]1,5] \end{cases}$ (h) $f(x) = x^2 - 1$ (i) $f(x) = x.|x|$

5. Probar que la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x^3 + 7x - 8)$ no es continua en $x = 1$ e indicar que tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

6. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro:

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x \le 2 \\ a-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x+2a & \text{si } x>0 \end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0 \le x<1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

7. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=x-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-x}$ y decir si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

Derivada

Definiciones

Definición 1. La **tasa de variación media** (TVM) de una función y = f(x) definida en un intervalo [a,b] , se define como el cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable, es decir: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Nota.- Tomando b = a+h, tenemos que TVM = $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ejemplos: Hallar la tasa de variación media de:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en [0, 3] (1) b) $f(x) = x^2 - 3x$ en [1, 1+h] (h-1)

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+5}$ en [-1, 2] d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en [1, 3] e) $f(x) = 3 - (1 + x^2)$ en [-1, 1]

f) $f(x) = x^3 + 2x$ en [-1,3] ; g) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 4$ en [2,5] h) $h(x) = \sqrt{x+1}$ en $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{2}\right]$

Nota.- En Física:

La **velocidad media** es el cociente entre el incremento de espacio y el incremento de tiempo

$$v_m = \frac{e(t_1) - e(t_2)}{t_1 - t_2}$$

La **aceleración media** es el cociente entre el incremento de velocidad y el incremento de tiempo

$$a_m = \frac{v(t_1) - v(t_2)}{t_1 - t_2}$$

Definición. Si y = f(x) es una función definida en un intervalo I y "a" un punto de I, se llama **<u>derivada</u>** de f en a, y se suele representar por $f'(a)$, $Df(a)$, $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$, al siguiente límite cuando existe y es finito $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Es decir $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Fijado el número a , $f'(a)$ es también un número.

Nota.- Una función y = f(x) es **derivable** en un punto si tiene derivada en dicho punto.

Nota. A $f'(a)$ se le llama **tasa de variación instantánea.**
En el caso de la velocidad tenemos la **velocidad instantánea** y en el caso de la aceleración la **aceleración instantánea.**

Por tanto tenemos que: $\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

Interpretación geométrica de la derivada.

Teorema.- La derivada en un punto $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg(\alpha)$, es la pendiente de la recta tangente a la función f(x) en el punto x = a.

Nota.-**Ecuación de la recta tangente a f(x) en x = a.**
La recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=a, tiene de pendiente $f'(a)$ y como además pasa por el punto (a,f(a)), es: " $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ "

♦♦ Ecuación de la recta tangente a $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$ en x = 3
La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)\cdot(x - 3)$
$f(x) = \ln(x) - e^{-x}$, luego $f(3) = \ln(3) - e^{-3}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} + e^{-x}$, luego $f'(3) = \frac{1}{3} + e^{-3}$

La recta tangente es es $y - f(3) = f(3)\cdot(x - 3)$, es decir

$y - (\ln(3) - e^{-3}) = (\frac{1}{3} + e^{-3})\cdot(x - 3)$

Nota.- (1) $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la función f(x), y también la "tg" del

ángulo que forme la recta con abscisas

(2) si dos rectas son paralelas tienen igual pendiente

Derivadas laterales

Nota.- Como el concepto de derivada se basa en el concepto de límite en un punto, podemos hablar de derivada por la derecha y por la izquierda puesto que al hablar de límites existía limite a la derecha y límite a la izquierda de un puntos

Definición. Se llama **derivada de f en x = a por la izquierda**, y se escribe $f'(a^-)$, al límite siguiente f ‘(a^-)= $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = $\lim\limits_{x\to a^-}$ f ‘(x) = $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}$ f ‘(x) (Esta última expression es la continuidd de la derivada)

Definición. Se llama **derivada de f en x = a por la derecha**, y se escribe f ‘ (a^+), al límite siguiente:

f ‘ (a^+) = $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = $\lim\limits_{x\to a^+}$ f ‘(x) = $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$ f ‘(x)

Teorema.- Si existen las derivadas por izquierda y por derecha en el punto x = a y son iguales es decir

f ‘ (a^-) = f ‘ (a+) entonces se dice que f es derivable en x = a.

Nota.- Si f ‘ (a^-) $\neq$ f ‘ (a+) entonces f no es derivable en x = a y se dice que la gráfica de f presenta en

x = a un **punto anguloso**.

Veamos un **ejemplo**

♦♦ Calcular la derivada de f(x) = |x| = $\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$ en x = 0.

Calculamos f ‘ (0^-) , f ‘ (0^+) y vemos si son iguales.

f ‘(0^+) = $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{(0+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}(1)$ = 1

f ‘(0^-) = $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-}\frac{(0-h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-1)$ = – 1

Como f ‘ (a^-) = -1 $\neq$ f ‘ (a^+) = 1, no existe f ‘ (0)

Calcular f ‘(1) en f(x) = $\begin{cases} x^2\text{-}2x & \text{si } x\ \leq 1\\ x\text{-}2 & \text{si } x\ > 1\end{cases}$

Def.- Se dice que f(x) tiene **derivada infinita** en x = a si es continua en x = a y, además, se verifica $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$

Nota.- Geométricamente, que la derivada en x = a sea infinita significa que la tangente en el punto P(a,f(a)) es vertical.

La función derivada.

Nota.- Hemos visto que si a es un punto del dominio de la función y = f(x), y además en “a” la función es derivable, entonces existe f ´(a) que es un número real, y que como este número procede de un límite, es además único para cada valor de a.

Si la función f es derivable en todos los puntos de su dominio podemos hablar de la función derivada que es la que hace corresponder a cada punto ¡su derivada, es decir la función

$$f' : R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

que está perfectamente definida en todos los puntos x del dominio de f en que ésta sea derivable.

También se suele escribir Df(x), $\frac{df(x)}{dx}$

Nota. Si f ‘(x) es derivable en todos los puntos de su dominio, podemos hablar de la función derivada segunda $f^{2)}(x)$, $D^2f(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, etc..

Ejemplo Calcular las derivadas n-ésimas de x^5,, e^x, ln(x)

Derivabilidad y Continuidad.

Teorema: “Si una función f es derivable en x = a, también es continua en a”.

Nota.- El recíproco es falso, es decir si una función f(x) es continua en x = a no podemos asegurar que sea derivable en x = a.

Veámoslo con un ejemplo.

La función valor absoluto f(x) = |x| = $\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es continua en todo R por compuesta de dos continuas la función “x” y la función valor absoluto “**| |**”. En concreto es continua en x = 0.

Hace un momento acabamos de ver que $f'(a^-) = -1 \neq f'(a^+) = 1$, es decir no existe f ‘(0). Por tanto |x| es continua en x = 0 y no es derivable en x = 0.

Nota.- ¡¡ Cuidado tiene que ser continua!!

Calcular f ‘(1) en f(x) = $\begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. **Esta función no es continua en x = 1**, y parece que es derivable en x = 1. (Porque usamos en vez de la definición de derivada, la continuidad de la función derivada)

Nota.- Las funciones derivables son funciones que se dibujan sin levantar el lápiz del papel (por ser continuas) y “suaves” , es decir no tienen puntos angulosos, aristas, puntos donde me “pinche”, etc..

Propiedades y reglas de derivación

(1) [f(x) + g(x)] ‘ = f ‘(x) + g ‘(x)
(2) [k · g(x)] ‘ = k·g ‘(x)
(3) [f(x) · g(x)] ‘ = f ‘(x)·g(x) + f(x)·g ‘(x)
(4) [f(x) / g(x)] ‘ = $\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

(5) Regla de la cadena: Teorema.- Sea F(x) = f(g(x)), si g(x) es derivable en x = a y g(y) es derivable en y = g(a) entonces F(x) es derivable en x = a y su derivada es F ‘(x) = f ‘(g(a)) · g ‘(a), es decir la derivada de la función f en g por la derivada de la función g.

Ejemplos

♦♦ f(x) = $\sqrt{\ln(x)}$ f ‘(x) = $\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}\cdot\frac{1}{x}$ se deriva 1º la raíz y se aplica al neperiano por la derivada de ln(x)

Nota.- Para derivar una función compuesta se deriva de fuera a dentro, siempre multiplicando, tapo la función que he derivado y vuelta a comenzar.

(6) Derivada de la función logarítmica Si f(x) = $\log_a(x)$ con $a \in \Re$ y a > 0 entonces f ‘

$\boxed{(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a (e)}$

(7) Derivada de la función constante Si f(x) = k con k $\in \Re$ entonces f ' (x) = 0
(8) Derivada de la función potencial: Si f(x) = x^k con k $\in \Re$ entonces f ' (x) = k· x^{k-1}

Ejemplos f(x) = x^7, x^π, $\frac{1}{x^8}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^4}$

Nota.- Fórmulas para aprender

♦♦ Si f(x) = x → f ' (x) = 1

♦♦ Si f(x) = $\sqrt{x}$ → f ' (x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

♦♦ Si f(x) = $\sqrt[n]{x}$ → f ' (x) = $\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$

(9) Derivada de la función exponencial: Si f(x) = a^x con a $\in \Re$ y a > 0 entonces f ' (x) =$a^x \cdot \ln(a)$

Como caso particular si f(x) = e^x entonces f ' (x) =e^x, puesto que ln(e) = 1

♦♦ Calcular la derivada de las siguientes funciones, en los puntos indicados, aplicando la definición:

a) y = x + 1 en x_o = 1 b) y = x^2 + 4 en x_o = 2 c) y = $\frac{3}{1-x}$ en x_o = 6

d) y = $\frac{1}{x^2-1}$ en x_o = 0 e) y = $\frac{1}{x} - 2x + x^2$ en x_o = -1 f) y = $\frac{6x^2}{3x+1}$ en x_o = 1

Sol: a) 1 b) 4 c) 3/25 d) 0 e) -1 f) 15/8

♦♦ Hallar la ecuación de la tangente y normal a las curvas en los puntos indicados:

a) y = x^3 en x_o= 2 b) y = x^2 - x en x_o= 0 c) y = x^2 - 6x + 8 en x_o=1 d) y=$\frac{1}{x}$ en x_o=-1

Sol: a) 12x - y - 16 = 0 b) y = x c) 4x + y - 7 0 = d) x + y + 2 = 0

♦♦ Hallar los puntos de las curvas en los que la tangente es paralela al eje OX:

a) y = x^3 - 3x b) y = $2x^3$ + 4x c) y = $3x^2$ + 6x -5 d) y = $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1$

♦♦ Calcular directamente, aplicando la definición de derivada, la función derivada de:

a) y = 2x - 1 b) y = 2 - x^2 c) y = $\frac{1}{x}$ d) y = $\frac{x+2}{x-3}$ e) y = $\frac{3x^2}{x+3}$ f) y = $\frac{x^2-3x+2}{2x+1}$

Sol: a) y'= 2 b) y' = -2x c) y' = $-\frac{1}{x^2}$ d) $y' = \frac{-5}{(x-3)^2}$ e) $y' = \frac{3x^2+18x}{(x+3)^2}$ f) $y' = \frac{2x^2+2x-7}{(2x+1)^2}$

♦♦ Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f(x) = $\begin{cases} x+1 & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$ en x_o = 1 b) f(x) = $\begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en x_o= 0 c) f(x) = $\begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en x_o= 0 d) f(x) = |x - 2| en x_o= 2 e) f(x) = |x| - 1 en x_o= 0

Sol: a) No , $f_-'(1)=0$ $f_+'(1)=1$ b) No, discontinua en x=0 c) No, $f_-'(0)=0$, $f_+'(0)=1$
d) No, $f_-'(2)=-1$, $f_+'(2)=1$ e) No, $f_-'(0)=-1$, $f_+'(0)=1$

♦♦ Dada la función f(x) = $\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se pide : Comprobar que es continua en x = 1 pero no es derivable. Sol: Cont. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ Derv: $f'_-(1) = 3$ $f'_+(1) = 2$

♦♦ Consideremos la función: f (x) = $\begin{cases} 2x^2 + ax + 3 & \text{si } x < 4 \\ 6x + b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ Determinar a y b con las condiciones de que f sea continua en x = 4 y exista f ´(4).

Sol: a=-10, b= -29

♦♦ Hallar el valor de k para que se cumpla la condición expresada:

a) $f'(1) = 5$ si $f(x) = x^2 + kx$ b) $f'(2) = -2$ si $f(x) = \frac{x+k}{x-k}$ c) $f'(1) = -1$ si $f(x) = \frac{x^2-k}{x^2+k}$

Sol: a) k = 3 b) k = 1, 4 c) k = 1 d) k = 3

Monotonía y derivada en un intervalo

Teorema.- Sea f(x) una función continua en [a,b] y derivable en (a,b).
(a) Si f '(x) > 0 en todos los puntos de (a,b) entonces *f* es creciente en el intervalo [a,b].
(b) Si f '(x) < 0 en todos los puntos de (a,b) entonces *f* es decreciente en el intervalo [a,b].

Teorema.- Extremos locales (con la 2ª derivada)
(a) Si $f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) > 0$ entonces f(x) presenta un mínimo en α.
(b) Si $f'(\alpha) = 0$ y $f''(\alpha) < 0$ entonces f(x) presenta un máximo en α.

Def.- Por definición si f(x) crece en a^-, y f(x) decrece en a^+, entonces x = a es un *máximo relativo*

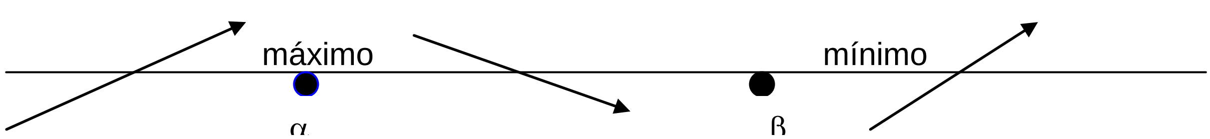
Def.- Por definición si f(x) decrece en a^- , y f(x) crece en a^+, entonces x = a es un *mínimo relativo*

Nota.- 1) Los extremos relativos están entre las soluciones de f '(x) = 0, si existe f '(x).
2) Si x = a es un punto crítico entonces f '(a) = 0
3) Si x = a es un extremo relativo (máximo ó mínimo) entonces f '(a) = 0
4) Si x = a es un punto de tangente horizontal entonces f '(a) = 0

<u>Estudio de la primera derivada: Crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos</u>

Nota.- **Del estudio de f '(x) obtenemos el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos**.
Pasos a dar:
(a) Calculamos f '(x) y resolvemos la ecuación f '(x) = 0. Suponemos que sus soluciones son α y β.
(b) Colocamos las soluciones α y β, en una recta con chinchetas gordas. Elegimos un punto cualquiera a izquierda y derecha de las chinchetas y entramos con él en f'(x). Si f'(nº) > 0 en todo ese intervalo f(x) es creciente, y si f'(nº) < 0 en todo ese intervalo f(x) es decreciente. Si a la izquierda de "α" f crece y a su derecha f decrece, por definición x = α es un máximo relativo...
(b') si no existen soluciones de f '(x) = 0, si hay que hacer todo el proceso de elegir el punto y entrar en
f '(x) pues en este caso la función será siempre creciente o siempre decreciente.

Gráficamente



f '(nº) > 0 f(x) crece | f '(nº) < 0 f(x) decrece | f '(nº) > 0 f(x) crece

En este dibujo f(x) crecería en $(-\infty, \alpha)\cup(\beta, +\infty)$, decrecería en (a, b), tendría un máximo relativo en x = a y un mínimo relativo en x = β.

Ejemplos.

1.-*Estudia la monotonía, máximos, mínimos de f(x) = $x^4 - 2x^2$*

2.-*Estudia la monotonía, máximos, mínimos de f(x) = e^x*

3.-*Calcular los máximos y mínimos de la función f(x) = $x^4 - 2x^3$*

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ y vemos donde se anula

$4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x - 3) = 0 \Rightarrow$ de donde $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$(doble), y de $2x - 3 = 0$, $x = 3/2$

Para estudiar cuales corresponden a máximos y cuales corresponden a mínimos aplicaremos el criterio de la derivada primera con lo que al mismo tiempo se estudian los intervalos de crecimiento o decrecimiento. El único punto donde la función derivada cambia de signo es $x = 3/2$ y este punto descompone el dominio en dos intervalos $(-\infty, 3/2)$ y $(3/2, +\infty)$.

En $(-\infty, 3/2)$ se verifica que $f'(x) < 0 \Rightarrow$ *f* es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

En $(3/2, +\infty)$ se verifica que $f'(x) > 0 \Rightarrow$ *f* es estrictamente creciente en dicho intervalo.

En consecuencia, en el punto $x = 3/2$ la función *f* tiene un mínimo relativo.

Nota: Decimos que en el punto *x* = 0 la función derivada no cambia de signo porque en él tiene un cero doble con lo que cambiaría dos veces de signo y se quedaría con el mismo signo que tenía antes de 0.

4.-*Calcular los máximos y mínimos de la función f(x) = $x \cdot Lx$*

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot (1/x) = Lx + 1$

Anulamos la función derivada para calcular donde la función tiene los posibles extremos:

$$Lx + 1 = 0 \Rightarrow Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

Para determinar si este punto que anula la derivada corresponde con un máximo o un mínimo, aplicaremos en este caso el criterio de la derivada segunda. Empezaremos calculándola: $f''(x) = 1/x$

Si sustituimos el valor que anula la derivada primera nos encontraremos que: $f''(e^{-1}) = 1/(e^{-1}) > 0$ y, por tanto, la función tiene un mínimo en $x = e^{-1}$

5.-Determina *el parámetro k para que el mínimo de la función f(x) = $x^2 + 2x + k$ sea igual a 8.*

Calculamos el punto donde la función tendrá el extremo; este punto tendrá que anular la derivada de función: $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Como nos dicen que el valor mínimo es 8, tendremos: $f(-1) = 8 \Rightarrow 1 - 2 + k = 8 \Rightarrow k = 9$

En consecuencia, nuestra función será: $f(x) = x^2 + 2x + 9$

6.-*Obtener los parámetros a y b para que la función f(x) = $x^2 + ax + b$ alcance un mínimo en el punto P(-1,2)*

Puesto que en el punto *P* la función alcanza un mínimo, el punto *P* pertenece a la gráfica de la función y se verificará que $f(-1) = 2 \Rightarrow 1 - a + b = 2 \Rightarrow -a + b = 1$

Por otra parte, por ser un extremo de función (mínimo) se tendrá que anular la función derivada en él:

$f'(-1) = o \Rightarrow \{f'(x) = 2x + a\} \Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2$. Con lo cual de $-a + b = 1$, obtenemos $b = 3$

Por tanto, la función buscada será: $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Máximos y mínimos absolutos de una función f(x) en [a,b]

Nota.- El problema general suele adoptar la siguiente forma: ¿Para qué valor de *x* la función *f*(*x*) definida en el intervalo [a,b] toma el valor máximo o mínimo?

Nota. El máximo absoluto estará entre los máximos relativos y éstos sabemos que son puntos donde se anula la 1ª derivada de la función, puntos donde no es continua, puntos sin derivada o los extremos del intervalo.

Nota. En consecuencia, para obtener el máximo absoluto de una función y = f(x) en [a,b], tendremos en cuenta los siguientes valores de "x":
(1) Puntos donde se anule la derivada resolviendo la ecuación f '(x) = 0
(2) Puntos donde la función no es derivable o no es continua.
(3) Extremos *a* y *b* del intervalo.
(4) Una vez obtenidos todos estos puntos, calculamos el valor de la función en cada uno de ellos. El mayor será el máximo absoluto de la función en el intervalo.
Para el mínimo absoluto procederemos de forma análoga.

Ejemplos.

♦♦ f(x) = x^2 – 2x en [0,3]

♦♦ f(x) = $\begin{cases} x^2 & si \quad -2 \le x < 1 \\ -3x^2 & si \quad 1 \le x \le 5 \end{cases}$

♦♦ Determina el máximo y el mínimo de la función f(x) = x^2 + x+ 1 en el intervalo [0,2].

♦♦ Hallar p y q para que f(x) = x^3 + p x^2 + q tenga un valor mínimo 3 para x = 2. S: p=-3, q=7
♦♦ Hallar a, b, c y d Para que f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en (-2,21) y un mínimo en (1,-6).
S:a=2, b=3, c=-12, d=1
♦♦ Hallar p y q de modo que f(x)=x^2+px+q tenga un mínimo para x = -3 y pase por (-2,1).
S:p=6 q=9
♦♦ Hallar a, b y c de modo que f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para x = -4, un mínimo para x = 0 y pase por (1,1).
S: a=6, b=0, c=-8
♦♦ Hallar a y b para que f(x) = ax^2+bx + 6 tenga un mínimo en x = 2 y se anule para x = 1.
S:a=2, b=-8
♦♦ Hallar k para que f(x) = x e^{kx} tenga un máximo en x = 1.
S: k=-1
♦♦ Hallar a, b, c y d para que f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ pase por los puntos (-1,2) y (2,3) y las tangente a la curva en los puntos de abscisas 1 y -2 sean paralelas al eje de abscisas.
S: a=-2/9, b=-1/3, c=4/3, d=31/9.
♦♦ Encontrar una función polinómica de tercer grado cuya gráfica tenga un mínimo en el punto (0,0) y un máximo en el punto (2,8).
S: y=-2x^3+6x^2
♦♦ Determinar el valor de m para que la función f(x) = $\dfrac{m^2x}{2x^2-5mx+2m^2}$ tenga un máximo para x = 2.
S: m=-2 y 2
♦♦ Hallar los intervalos de monotonía de las siguientes funciones:
a) y = 3x + 2 b) y = x^2 - 6x + 8 c) y = 6x^3 - 8x d) y = $\dfrac{2x+4}{3x-1}$ e) y = e^{x^2} f) y = ln x
S: a) Cr. en R. b) Cr. (-∞.0) , D (0,+∞) c) Cr (-∞, -2/3)∪(2/3, +∞) , D (-2/3, 2/3)
d) D en R - {1/3} e) D (-∞,0) C (0, +∞) f) C en (0,+∞)
♦♦ Calcular, si existen, los extremos relativos de las siguientes funciones:
a) y = 2x^2 - 4x + 1 b) y = $x^3 + x^2$ - x c) y = 3x^3 + 4x – 1 d) y = x^4 - 8x^2 + 3 e) y = $\dfrac{x}{x^2+1}$
S: a) mín (1, -1) b) Máx (-1, 1) mín (1/3 , -5/27) c) No tiene.
d) Máx (0,3) , mín (2, -13) , mín (2,-13) e) Máx (1, 1/2) , mín (-1, -1/2)

♦♦ Dada la función $f(x) = x^2 + mx + 1$, determinar el valor de m en cada uno de los casos siguientes:

a) Que $f(-2) = 8$
b) Que la gráfica de la función contenga el punto (3, 3).
c) Que la gráfica pase por el origen.
d) Que la gráfica sea tangente al eje OX.
e) Que el eje de simetría de la gráfica sea la recta $x = 4$.
f) Que la función tome su valor mínimo en $x = -1$.

♦♦ Se considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + px - q$, con p y q dos parámetros. Determine p y q para que la recta de ecuación $y = x$ sea tangente a la gráfica de f en (1, 1).

♦♦ Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 \text{ si } x<0 \\ x^2+1 \text{ si } 0\le x\le 1 \\ 2x+1 \text{ si } 1<x \end{cases}$,

Se pide:

a) Representarla gráficamente.
b) Hallar los puntos en que es continua y los puntos en los que es derivable.

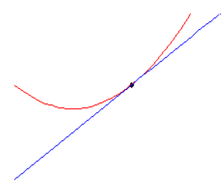
♦♦ Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x\le 0 \\ x+a & \text{si } x>0 \end{cases}$

Se pide:

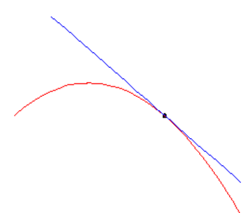
a) Determinar el valor de a para el que la función es continua en su dominio. Para dicho valor de a ¿es derivable la función?
b) Para el valor de a hallado en el apartado a) estudiar el crecimiento de la función y representarla gráficamente.

Curvatura. Concavidad Y Convexidad. Puntos de inflexión.

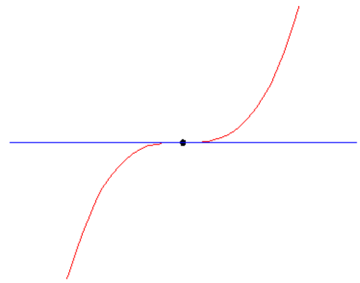
Def.- Se dice que una función f(x) derivable es **convexa** ($\cup$) en un intervalo I sii para todo número $a \in I$ la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto (a, f(a)) está por debajo de la gráfica de f(x)



Def.- Se dice que una función f(x) derivable es **cóncava** ($\cap$) en un intervalo I sii para todo número $a \in I$ la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto (a, f(a)) está por encima de la gráfica de f(x)



Def.- Un punto x = a se dice que es un **punto de inflexión** sii en él la función cambia de cóncava a convexa o viceversa



Nota.- Si una función *f* tiene un punto de inflexión en *a*, la tangente en el punto (a, f(a)) atraviesa la gráfica de la función.

Teorema.- 1) Si f ''(x) > 0, f(x) es convexa ($\cup$)
2) Si f ''(x) < 0, f(x) es cóncava ($\cap$)

Nota.- Si x = a es un punto de inflexión f ''(a-) < 0 y f ''(a+) > 0, ó al revés.

<u>Estudio de la segunda derivada: Concavidad, convexidad, puntos de inflexión</u>

Nota.- **Del estudio de f ''(x) obtenemos el concavidad, convexidad y puntos de inflexión**.

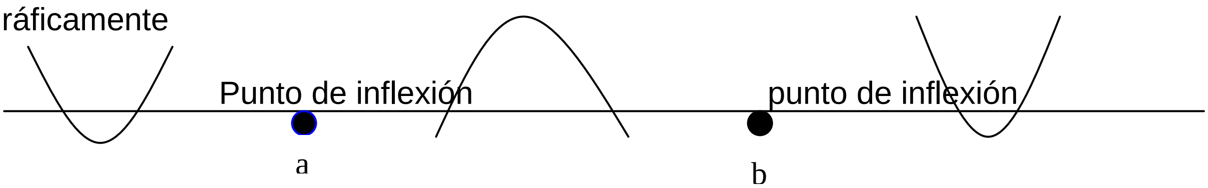
Pasos a dar:

(1) Calculamos f ''(x) y resolvemos la ecuación f ''(x) = 0. Suponemos que sus soluciones son a y b.

(2) Colocamos las soluciones a y b en una recta con chinchetas gordas. Elegimos un punto cualquiera a izquierda y derecha de las chinchetas y entramos con el en f '' (x). Si f ''(nº) > 0 en todo ese intervalo f(x) es convexa, y si f ''(nº) < 0 en todo ese intervalo f(x) es cóncava. Si a la izquierda de a f es convexa y a su derecha f es cóncava por definición x = a es un punto de inflexión...

(2') si no existen soluciones de f ''(x) = 0, si hay que hacer todo el proceso de elegir el punto y entrar en f ''(x) pues en este caso la función será siempre cóncava o siempre convexa.

Gráficamente



f ''(nº) > 0 f(x) convexa | f ''(nº) < 0 f(x) concava | f ''(nº) > 0 f(x) convexa

En este dibujo f(x) es convexa en (- ∞, a)$\cup$(b, + ∞), y cóncava en (a, b), tendría un punto de inflexión en x = a y otro punto de inflexión en x = b.

Ejemplos

Estudiar la curvatura de las siguientes funciones:

x^3+3x^2+3x+1 ; x^2 ; x^3 ; e^x ; ln(x) ; $\frac{x+1}{x-1}$; $x^2 - 1$; $4 - x^2$; $x^4 - 6x^2$; x^5; $1/(x^2 + 1)$; $x/(x^2 - 1)$; $x^3/(x^2 - 1)$; $(x^2 + 1)/x$; $x\cdot L(x)$; $L(x)/x$; $f(x) = x\cdot e^x$.

Dada $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calcular a, b, c y d sabiendo que tiene un punto de inflexión en (0,1) y la tangente en dicho punto es paralela a la recta de ecuación 3x – y + 5 = 0, y además dicha función tiene un extremo en x = 1.