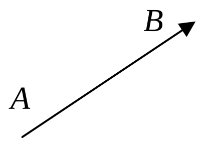
ESPACIO AFÍN REAL TRIDIMENSIONAL

VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO.

Definimos un **VECTOR ORIENTADO (FIJO)** del espacio como una pareja ordenada de puntos (A,B) y lo representaremos por $\overrightarrow{AB}$.

A recibe el nombre de **ORIGEN** del vector.

B recibe el nombre de **EXTREMO** del vector



Si los dos extremos coinciden se dice que el vector fijo es nulo: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, ...$
El conjunto de vectores fijos lo representaremos por $\mathbf{F_3}$ **.**

Todo vector fijo queda determinado por:

MÓDULO: es la longitud del segmento determinado por los dos puntos. Lo representaremos por $\| \ \|$.

DIRECCION: es la línea que pasa por los dos puntos.
Dos vectores tienen igual dirección si las rectas que los contienen son paralelas.

SENTIDO: es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos del origen al extremo del vector.
Dos vectores tienen el mismo sentido cuando tienen la misma dirección y al unir los orígenes, los vectores quedan en el mismo semiplano.

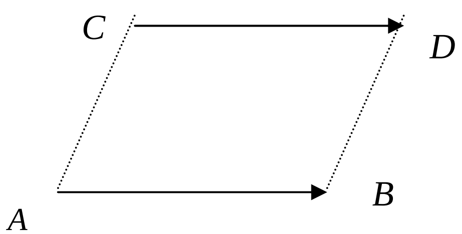
Los vectores nulos tienen todos módulo cero y admitiremos que tienen la misma dirección y sentido.

VECTORES EQUIVALENTES O EQUIPOLENTES.

Dos vectores fijos se dice que son equivalentes o equipolentes cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes, se escribe $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$

Geométricamente, si $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ al unir los orígenes y los extremos entre sí, se forma un paralelogramo:



Esta relación de equivalencia permite clasificar el conjunto de vectores fijos en clases de equivalencia que contienen todos los vectores equivalentes entre sí. Cada una de estas clases en que está clasificado el conjunto $\mathbf{F_3}$ recibe el nombre de **VECTOR LIBRE.**

En consecuencia, un vector libre es un conjunto de vectores fijos todos ellos equivalentes entre sí y se representa por $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, indicando que $\overrightarrow{AB}$ es un representante de todos los vectores orientados de la clase.

Todos los vectores fijos nulos forman el vector libre cero (nulo). Un representante es $\overrightarrow{AA}$ y se designa por $\vec{0}$

El conjunto de vectores libres lo representamos por $\boldsymbol{V_3}$**.**

MÓDULO, DIRECCIÓN Y SENTIDO DE UN VECTOR LIBRE.

Todos los vectores fijos que pertenecen a una misma clase son equivalentes entre sí¡, es decir que todos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Teniendo en cuenta esto, se llama módulo, dirección y sentido de un vector libre no nulo al módulo, dirección y sentido de uno cualquiera de los vectores de la clase.

El vector libre $\vec{0}$ tiene por módulo 0 y carece de dirección y sentido.

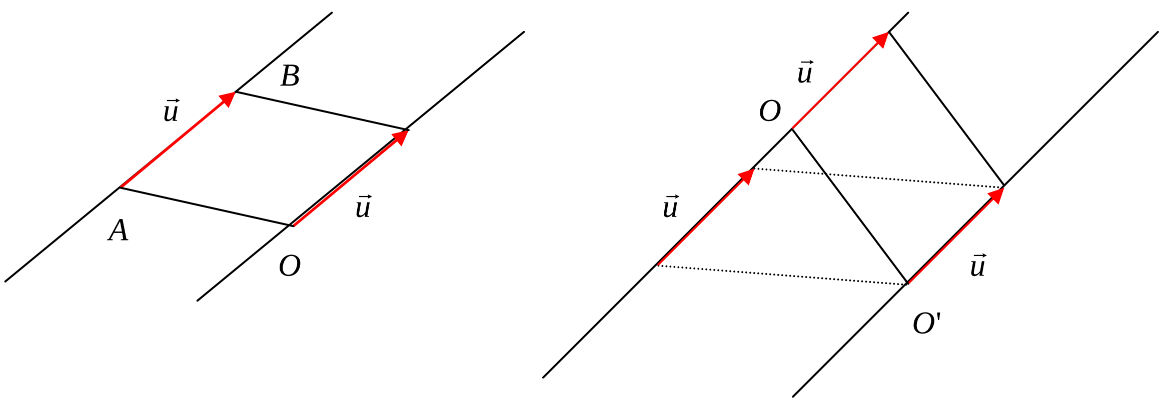
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero los sentidos son opuestos.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS VECTORES LIBRES.

Los vectores fijos del espacio tienen su origen y extremo en puntos fijos del espacio. A diferencia de éstos, los vectores libres se pueden aplicar en cualquier punto que se desee, simplemente con elegir el representante de la clase adecuado.

Esta propiedad podemos enunciarla de la siguiente forma:

Si $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ es un vector libre del espacio y O un punto cualquiera del espacio, existe un único representante de este vector que tiene su origen en el punto O.



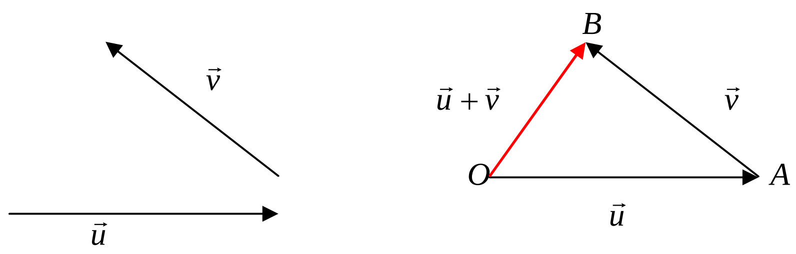
ESTRUCTURA DE V_3.

En el conjunto de vectores libres se definen las siguientes operaciones:

1. SUMA DE VECTORES LIBRES.

Dados dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del espacio, se llama SUMA de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector libre que se obtiene de la siguiente forma: Se considera un punto arbitrario O del espacio y se toma un representante de $\vec{u}$ con origen en O, $\overrightarrow{OA}$. A continuación, se toma $\overrightarrow{AB}$ como representante de $\vec{v}$; el vector suma es el que tiene por representante el vector $\overrightarrow{OB}$, que resulta de unir el origen del primer vector con el extremo del último vector sumando.

$$\vec{u}+\vec{v}=\left[\overrightarrow{OA}\right]+\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left[\overrightarrow{OB}\right]$$



El vector suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se representa por $\vec{u}+\vec{v}$.

Esta suma así definida verifica las siguientes propiedades:

a. **Asociativa:** $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

b. **Conmutativa:** $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

c. **Elemento neutro:** $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}$

d. **Elemento simétrico: si** $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB}\right] \Rightarrow -\vec{u}=\left[\overrightarrow{BA}\right]$

Con todo esto, el conjunto de vectores libres respecto de la operación SUMA tiene estructura de GRUPO CONMUTATIVO.

2. PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR LIBRE

Sea $\vec{u}$ un vector libre, no nulo, y k un número real no nulo.

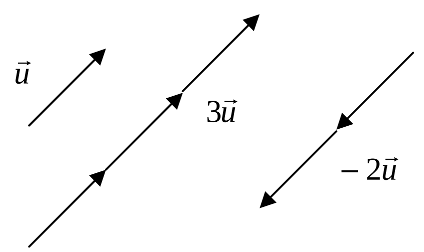
Se llama producto de un número real por un vector, y se representa por $k\cdot\vec{u}$, al vector que tiene las siguientes características:

Módulo: $\|k\cdot\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|$

Dirección: la misma que $\vec{u}$

Sentido:

$\begin{cases}\text{el mismo que } \vec{u}\text{, si } k \text{ es positivo}\\ \text{el opuesto de } \vec{u}\text{, si } k \text{ es negativo}\end{cases}$



el vector $\vec{0}$.

Esta operación verifica las siguientes propiedades:

a. Distributiva respecto de la suma de vectores: $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$
b. Distributiva respecto de la suma de números reales: $(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$
c. Pseudoasociativa o asociativa mixta: $k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$
d. El elemento unidad de R también es elemento unidad para esta operación: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

El conjunto de vectores libres ***V*₃** con las dos operaciones definidas anteriormente, verificando las propiedades enunciadas, tiene estructura de ESPACIO VECTORIAL

Puesto que ***V*₃** tiene estructura de espacio vectorial podemos hablar en él de conceptos como la dependencia e independencia lineal de vectores, sistema de generadores, base, dimensión, etc.

BASE DE V_3.

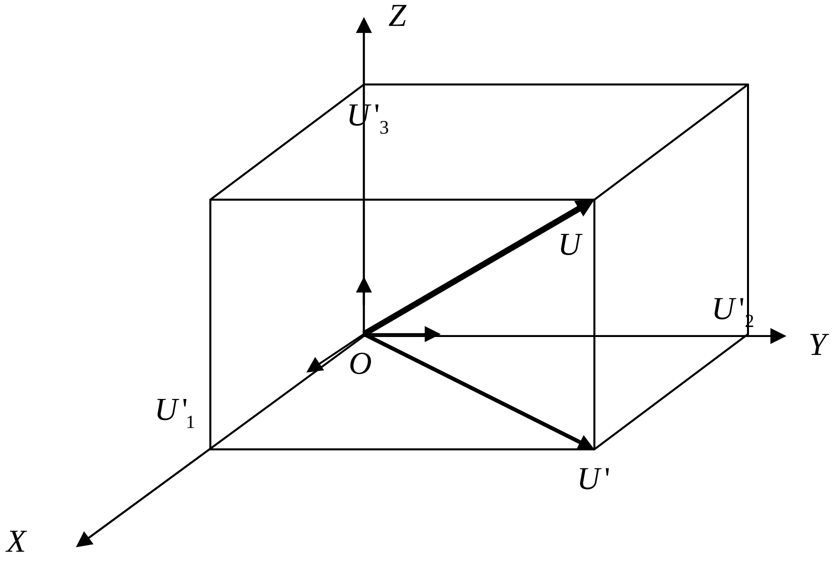
"Tres vectores libres $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, no nulos, que no estén en el mismo plano (no sean coplanarios) forman una base de V_3 ".

En efecto:

- Son **linealmente independientes** ya que si fueran l.d. uno se podría expresar como combinación lineal de los otros dos y, en consecuencia, sería coplanario con ellos, en contra de la hipótesis.
- Forman un **sistema generador** de V_3

Hemos de ver que cualquier vector $\vec{u}$ de V_3 lo podemos expresar como combinación lineal de ellos.

Tomemos representantes de cada uno de los vectores con origen en un punto cualquiera O: $\overrightarrow{OU}_1, \overrightarrow{OU}_2, \overrightarrow{OU}_3$ respectivamente.



Si proyectamos el vector $\vec{u}$ sobre los ejes, obtenemos los puntos $U_1^{'}, U_2^{'}, U_3^{'}$; los vectores $\overrightarrow{OU_1^{'}}, \overrightarrow{OU_2^{'}}, \overrightarrow{OU_3^{'}}$ son proporcionales a los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ por tener la misma dirección que ellos y se podrán expresar de la forma:

$$\overrightarrow{OU_1^{'}} = x \cdot \vec{u}_1 \qquad \overrightarrow{OU_2^{'}} = y \cdot \vec{u}_2 \qquad \overrightarrow{OU_3^{'}} = z \cdot \vec{u}_3$$

Por otra parte, tenemos:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{OU}\right] = \left[\overrightarrow{OU^{'}}\right] + \left[\overrightarrow{U^{'}U}\right] = \left[\overrightarrow{OU^{'}}\right] + \left[\overrightarrow{OU_3^{'}}\right] = \left[\overrightarrow{OU_1^{'}}\right] + \left[\overrightarrow{OU_2^{'}}\right] + \left[\overrightarrow{OU_3^{'}}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$$

En consecuencia, los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ generan el espacio vectorial ***V*₃** y forman una base del mismo.

La dimensión de ***V*₃** será tres puesto que cualquier base del mismo está formada por tres vectores.

Los números reales *x*, *y*, *z* que nos permiten expresar el vector $\vec{u}$ como c.l. de los vectores de la base reciben el nombre de coordenadas del vector respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y éstas son únicas.

Esto nos permite establecer una aplicación lineal entre los espacios vectoriales ***V*₃** y $\mathbb{R}^3$ identificando un vector libre con una terna de números reales (sus coordenadas) y transformando toda relación geométrica de ***V*₃** en una relación algebraica en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{V_3} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \in V_3 & \longrightarrow & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} + \vec{v} \in V_3 & \longrightarrow & (x,y,z) + (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \\ \lambda \cdot \vec{u} \in V_3 & \longrightarrow & \lambda \cdot (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

En física, y con frecuencia en matemáticas, se identifican los vectores numéricos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) con los vectores libres $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente. Los primeros constituyen la **BASE CANÓNICA** en $\mathbb{R}^3$ y los segundos la **BASE CANÓNICA** en ***V*₃**.

ESPACIO AFÍN.

La propiedad fundamental de los vectores libres nos permite definir una aplicación biyectiva entre los puntos del espacio ordinario ***E*₃** y los vectores de ***V*₃** de la siguiente forma:

Fijado un punto *O* arbitrario de ***E*₃** que llamaremos **ORIGEN**, definimos una aplicación de ***E*₃** en ***V*₃** (biyectiva) donde a cada punto $P \in E_3$ le hacemos corresponder el vector libre $\vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right]$ que llamaremos **VECTOR DE POSICIÓN** del punto P.

$$E_3 \xrightarrow{O \text{ fijo (biyectiva)}} V_3$$
$$P \in E_3 \xrightarrow{O \text{ fijo}} \vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right] \in V_3$$

Llamamos **ESPACIO AFÍN** a la terna ($\boldsymbol{E_3}$, $\boldsymbol{V_3}$, $\boldsymbol{f}$) donde:

- $\boldsymbol{E_3}$ es el conjunto de puntos del espacio ordinario.
- $\boldsymbol{V_3}$ es el espacio vectorial de los vectores libres.
- $\boldsymbol{f}$ es la aplicación que asocia a cada par de puntos (P,Q) del espacio el vector libre que tiene por representante el vector fijo $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{array}{ccc} E_3 \times E_3 & \xrightarrow{f} & V_3 \\ (P,Q) & \rightarrow & \left[\overrightarrow{PQ}\right] \end{array}$$

Esta aplicación f verifica las siguientes propiedades:

1. $f(P,Q) = -f(Q,P) \quad \Rightarrow \quad \left[\overrightarrow{PQ}\right] = -\left[\overrightarrow{QP}\right]$

2. Propiedad triangular: $\forall P,Q,R \in E_3$ se verifica que
   $f(P,Q) + f(Q,R) + f(R,P) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\overrightarrow{PQ}\right] + \left[\overrightarrow{QR}\right] + \left[\overrightarrow{RP}\right] = 0$

   Esta relación recibe el nombre de RELACIÓN DE CHARLES.

3. Cualquiera que sea el punto $P \in E_3$, y cualquiera que sea el vector $\vec{u} \in V_3$, existe un único punto $Q \in E_3$ tal que $f(P;Q) = \left[\overrightarrow{PQ}\right] = \vec{u}$.

El espacio $\boldsymbol{V_3}$ recibe el nombre de espacio vectorial asociado al espacio afín.

La dimensión del espacio afín es la misma que la dimensión del espacio vectorial asociado. En nuestro caso, la dimensión del espacio afín $\boldsymbol{E_3}$ es 3.

COORDENADAS DE UN PUNTO EN EL PLANO AFIN.

Fijado un punto O arbitrariamente, que llamamos **ORIGEN**, tenemos definida una aplicación biyectiva entre $\boldsymbol{E_3}$ y $\boldsymbol{V_3}$ de la forma:

$$E_3 \xrightarrow{O \text{ fijo (biyectiva)}} V_3 \qquad\qquad P \in E_3 \xrightarrow{O \text{ fijo(biyectiva)}} \vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right] \in V_3$$

Este vector $\vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right]$ que le hacemos corresponder al punto P recibe el nombre de **VECTOR DE POSICIÓN** del punto.

Fijada la base de $\boldsymbol{V_3}$, tenemos otra aplicación biyectiva entre los vectores y sus coordenadas:

$$V_3 \xrightarrow{\{\text{B fija}\}} \mathbb{R}^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{p} \in V_3 \xrightarrow{\{\text{B fija}\}} (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Componiendo estas dos aplicaciones biyectivas, obtenemos otra aplicación biyectiva de $\boldsymbol{E_3}$ en $\mathbb{R}^3$ de la forma:

$$\begin{tikzcd} E_3 \arrow[r, "O \text{ fijo (biyectiva)}"] \arrow[dr] & V_3 \arrow[d] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \in E_3 \arrow[r, "O \text{ fijo(biyectiva)}"] \arrow[dr] & \vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right] \in V_3 \arrow[d] \\ & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

En consecuencia, a todo punto $P \in E_3$ le podremos asociar unas coordenadas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{p} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$. Por tanto, **un punto y su vector de posición tienen las mismas coordenadas.**

El punto ***O*** y la base ***B*** fijados en las dos aplicaciones definidas anteriormente determinan las coordenadas de los puntos y los vectores, es decir nos sirven de referencia para fijar coordenadas en el espacio afín.

Se llama **SISTEMA DE REFERENCIA AFÍN** del espacio $\boldsymbol{E_3}$ al par ***R(O,B)*** donde ***O*** es un punto arbitrario que se elige como origen y ***B*** es una base del espacio vectorial asociado $\boldsymbol{V_3}$.

$$R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

Las coordenadas de un punto ***P*** cualquiera respecto del sistema de referencia considerado en $\boldsymbol{E_3}$ son las mismas que las de su vector de posición $\vec{p}$ respecto de la base de dicho sistema de referencia:

$$\vec{p} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{P = (x,y,z)}$$

De ahora en adelante, en el espacio afín $\boldsymbol{E_3}$, supondremos conocida la referencia $\boldsymbol{R=\{O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}}$ salvo que se diga algo en contra.

COORDENADAS DE UN VECTOR DEFINIDO POR DOS PUNTOS.

Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del espacio afín $\boldsymbol{E_3}$ referidos al sistema de referencia ***R***.

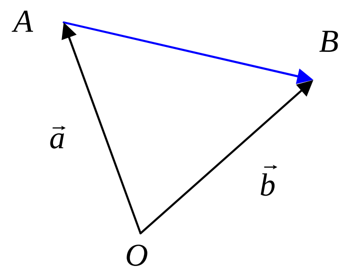
Estos dos puntos junto con el origen *O* forman una terna de puntos del espacio afín y aplicando la propiedad de Charles tenemos:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

o bien

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

en función de los vectores de posición de los puntos



Si tenemos en cuenta que un punto y su vector de posición tienen las mismas coordenadas, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ nos vendrán dadas por:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Ejemplos:

- **Hallar las coordenadas del vector determinado por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(3,-2,4)$**

$$\overrightarrow{AB} = (3,-2,4) - (1,2,3) = (2,-4,1)$$

- **Dados los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,-2,5)$ y $C(-1,0,1)$, hallar las coordenadas del punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes.**

Suponiendo que las coordenadas del punto D son (x,y,z), calculamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-2,5) - (1,2,3) = (2,-4,2)$$
$$\overrightarrow{CD} = (x, y, z) - (-1,0,1) = (x+1, y, z-1)$$

Para que sean equivalentes sus coordenadas tienen que ser iguales. Luego:

$$(2,-4,2) = (x+1, y, z-1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 = x+1 \\ -4 = y \\ 2 = z-1 \end{array} \right\} \Rightarrow D(x, y, z) = (1,-4,3)$$

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

El problema planteado es obtener las coordenadas del punto medio de un segmento a partir de las coordenadas de los extremos.

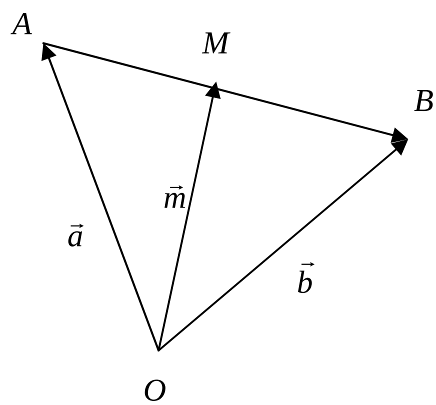
Sean A y B los extremos de un segmento y M su punto medio.

Entonces se verifica que: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

Si representamos por $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ los vectores de posición de los puntos A, B y M, respectivamente, tenemos:

$$\vec{m} - \vec{a} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - a) \Rightarrow \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + a)$$



Si las coordenadas de los puntos son $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $M(x_m, y_m, z_m)$ respectivamente, sustituyendo en la expresión vectorial anterior, tenemos:

$$(x_m, y_m, z_m) = \frac{1}{2} \cdot \left[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_m = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) \qquad y_m = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) \qquad z_m = \frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2)$$

Por el mismo procedimiento podríamos dividir un segmento en n partes iguales.

EJEMPLOS:

- **Calcular el punto medio del segmento determinado por los puntos *A*(1,2,3) y *B*(3,0,5).**

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left[(1,2,3) + (3,0,5)\right] = \frac{1}{2} \cdot (4,2,8) = (2,1,4) \equiv M$$

- **Sabiendo que las coordenadas del punto medio *M* del segmento son (1,2,3) y que las coordenadas *B* son (3,1,2), hallar las coordenadas de *A*.**

Suponiendo que las coordenadas del punto *A* son (*x*,*y*,*z*), tendremos:

$$(1,2,3) = \frac{1}{2} \cdot \left[(x, y, z) + (3,1,2)\right]$$

de donde:

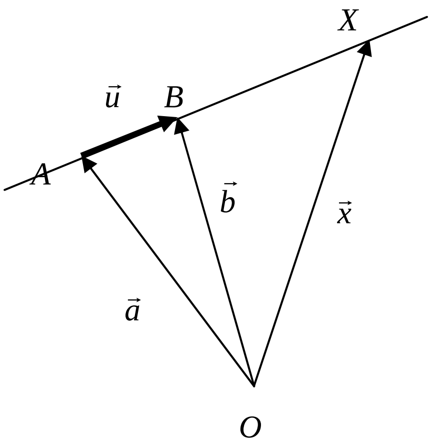
$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \cdot (x+3) \quad \Rightarrow \quad x = -1 \\ 2 = \frac{1}{2} \cdot (y+1) \quad \Rightarrow \quad y = 3 \\ 3 = \frac{1}{2} \cdot (z+2) \quad \Rightarrow \quad z = 4 \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas del punto ***A*** son (–1,3,4).

LA RECTA: ECUACIONES DE LA RECTA.

Una recta en el espacio afín $\boldsymbol{E_3}$ nos viene determinada por:

- Un punto A y un vector $\vec{u}$ (vector director) no nulo.
- Dos puntos A y B de la misma.



Se llama recta determinada por el punto ***A*** y el vector libre $\vec{u}$, no nulo, al conjunto de puntos $X \in E_3$ tales que $\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u},, \quad \lambda \in R$

$$r(A,\vec{u}) = \left\{X \in E_3 / \overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u},, \quad \lambda \in R\right\}$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a}$, la condición anterior nos queda de la siguiente forma:

$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u},, \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

que recibe el nombre de **ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA**.

Si $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u}$, la ecuación anterior nos queda de la siguiente manera:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad \text{siendo} \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

que también es la ecuación vectorial de la recta (recta que pasa por los puntos A y B).

El punto *A* recibe el nombre de **PUNTO BASE** de la recta y el vector $\vec{u}$, **VECTOR DIRECCIÓN (VECTOR DIRECTOR)** de la recta.

Si las coordenadas de los puntos *A y B* son (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respectivamente y las del vector director $\vec{u}(d_1, d_2, d_3)$, sustituyendo en la ecuación vectorial y operando, obtenemos:

Por una parte:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda \cdot (d_1, d_2, d_3) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda \cdot d_1 \\ y = y_1 + \lambda \cdot d_2 \\ z = z_1 + \lambda \cdot d_3 \end{array} \right\} \quad \lambda \in \mathrm{R} \quad \textbf{(1)}$$

que reciben el nombre de **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** de la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{u}$.

Por otra:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) \end{array} \right\} \lambda \in \mathrm{R} \quad \textbf{(2)}$$

que son las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** de la recta que pasa por dos puntos: *A* y *B*.

Si en las ecuaciones paramétricas (1), despejamos el parámetro λ, nos queda:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{d_1} \qquad \lambda = \frac{y - y_1}{d_2} \qquad \lambda = \frac{z - z_1}{d_3} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{d_1} = \frac{y - y_1}{d_2} = \frac{z - z_1}{d_3}$$

que recibe el nombre de ecuación de la recta en **FORMA CONTINUA**.

Operando de la misma forma en las ecuaciones paramétricas (2) obtenemos:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \lambda = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

que recibe el nombre de ecuación de la recta que pasa por dos puntos en **FORMA CONTINUA**.

Estas expresiones de la ecuación de la recta en forma continua tienen sentido aún cuando uno o dos denominadores sean nulos.

Si en la ecuación continua de la recta consideramos el vector dirección variable, obtendremos el conjunto de rectas de **E₃** que pasan por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$. Este conjunto de rectas de **E₃** que pasan por un punto A dado recibe el nombre de **RADIACION DE RECTAS DE BASE EL PUNTO *A*.**

Un punto es incidente con una recta o una recta pasa por un punto cuando el punto pertenece a la recta.

La condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a una recta es que las coordenadas del punto verifiquen la ecuación de la recta.

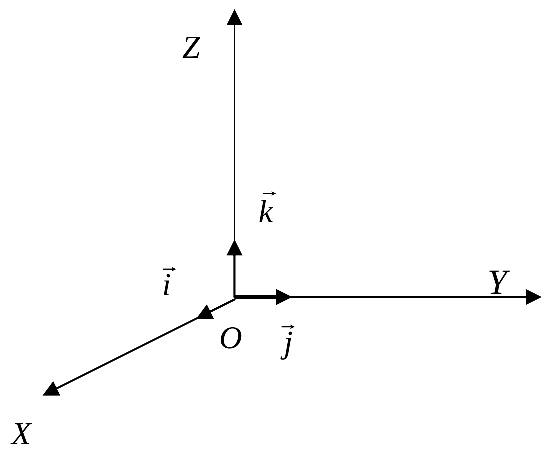
Alineación de puntos.

Tres o más puntos están alineados cuando pertenecen a la misma recta.

"Si los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ están alineados, los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n}$ tienen la misma dirección, es decir, son proporcionales".

EJEMPLOS:

- Encontrar las ecuaciones de los ejes coordenados.



EJE OX:

Recta que pasa por O y tiene por vector dirección $\vec{i}\,(1,0,0)$:

Forma vectorial:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + \lambda \cdot (1,0,0)$$

F. Paramétrica: $x = \lambda$, $y = 0$, $z = 0$

F. continua: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$

EJE OY: Recta que pasa por *O* y tiene por vector dirección $\vec{j}(0,1,0)$:

Forma vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda\cdot(0,1,0)$
F. Paramétrica: $x=0\ ,\ y=\lambda\ ,\ z=0$
F. continua: $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$

EJE OZ: Recta que pasa por *O* y tiene por vector dirección $\vec{k}(0,0,1)$:

Forma vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda\cdot(0,0,1)$
F. Paramétrica: $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=\lambda$
F. continua: $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$

- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1,2,3)$ y tiene por dirección el vector $\vec{u}(2,-1,3)$.**

Forma vectorial: $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda\cdot(2,-1,3)$

Forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+3\lambda \end{array}\right\}\ \lambda\in R$$

Forma continua: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{3}$

- **Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(3,-1,1)$.**

El vector director de la recta nos viene determinado por los puntos *A* y *B*. Entonces:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,-1,1)-(1,2,3)=(2,-3,-2)$$

Las ecuaciones de la recta serán:

F. vectorial: $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda\cdot(2,-3,-2)$

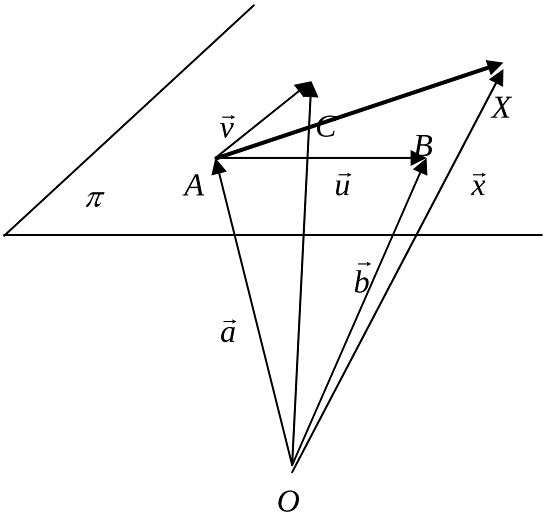
Forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=3-2\lambda \end{array}\right\}\ \lambda\in \mathrm{R}$$

Forma continua: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-2}$

EL PLANO: ECUACIONES.

Consideremos un punto A y dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes.



Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ dos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se llama PLANO AFÍN determinado por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al conjunto de puntos de $\boldsymbol{E_3}$ tales que el vector $\overrightarrow{AX}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\pi(A;\vec{u},\vec{v}) = \left\{X \in E_3 \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v} \;,,\; \lambda,\mu \in R\right\}$$

Teniendo en cuenta los representantes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el plano afín es el conjunto de puntos $X \in E_3$ tales que el vector $\overrightarrow{AX}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (plano determinado por tres puntos no alineados A, B y C).

$$\pi(A,B,C) = \left\{X \in E_3 \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC}\right\}$$

Si consideramos los vectores de posición de los puntos, tendremos:

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a} \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$

y sustituyendo en las condiciones anteriores, nos queda:

$$\vec{x} - \vec{a} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v} \quad \text{donde } \lambda,\mu \in \mathrm{R}$$

o bien : $\vec{x} - \vec{a} = \lambda\cdot(\vec{b} - \vec{a}) + \mu\cdot(\vec{c} - \vec{a}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\cdot(\vec{b} - \vec{a}) + \mu\cdot(\vec{c} - \vec{a}),,\; \lambda,\mu \in \mathrm{R}$

Cualquiera de estas ecuaciones recibe el nombre de **ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO.**

Si las coordenadas de los puntos son $X(x,y,z)$, $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ y $C(x_3,y_3,z_3)$ y las de los vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ respectivamente, entonces:

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Sustituyendo en las ecuaciones vectoriales nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = y_1 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = z_1 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) + \mu \cdot (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) + \mu \cdot (y_3 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) + \mu \cdot (z_3 - z_1) \end{array}\right\} \quad \lambda, \mu \in \mathrm{R}$$

que son las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** del plano determinado por un punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ o por los puntos A, B y C no alineados.

Para obtener la ecuación general o implícita del plano, eliminaremos los parámetros λ y μ en las ecuaciones paramétricas; esto equivale a expresar que si el punto X pertenece al plano, el sistema en λ y μ formado por las ecuaciones paramétricas posee solución $\Rightarrow$

$$r\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x - x_1 & u_1 & v_1 \\ y - y_1 & u_2 & v_2 \\ z - z_1 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

el rango no puede ser 1 ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & u_1 & v_1 \\ y - y_1 & u_2 & v_2 \\ z - z_1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

y, desarrollando el determinante, obtenemos: $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la **ECUACIÓN GENERAL o IMPLÍCITA** del plano.

Si $A = B = C = 0$, la ecuación del plano carece de sentido.

Un punto se dice que es **INCIDENTE** con un plano cuando pertenece a dicho plano. Las ecuaciones del plano expresan la condición necesaria y suficiente para que un punto sea incidente con un plano.

♦ Dado un plano de ***E*₃**: $Ax + By + Cz + D = 0$, para que un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertenezca al plano tendrá que verificar que $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

Restando ambas expresiones, obtenemos:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

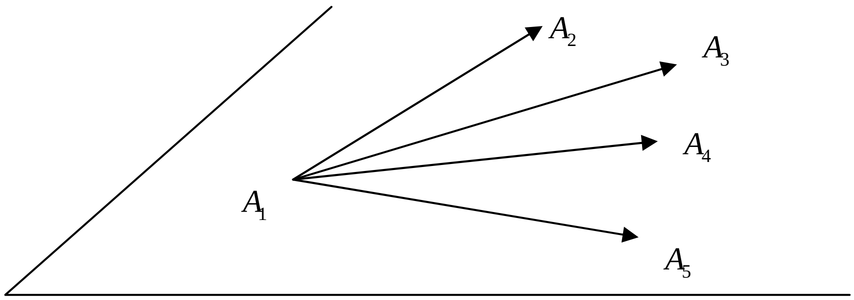
que, para *A*, *B* y *C* variables, representará el conjunto de planos de $\boldsymbol{E_3}$ que son incidentes con el punto *P*. Este conjunto de planos incidentes con el punto *P* recibe el nombre de **RADIACIÓN DE PLANOS DE BASE EL PUNTO *P*.**

Puntos coplanarios.

Cuatro o más puntos del espacio $\boldsymbol{E_3}$ son coplanarios cuando pertenecen al mismo plano.

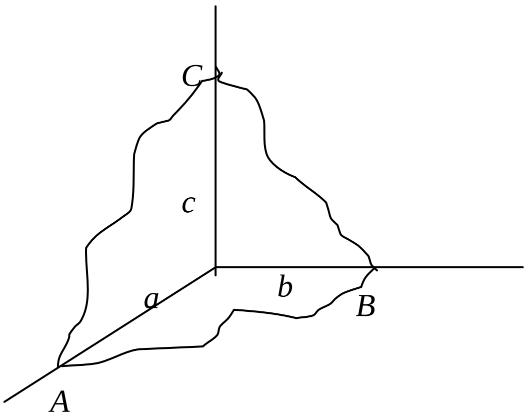
Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n puntos no alineados: la condición para que sean coplanarios es que de los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n}$ sólo haya dos linealmente independientes.

$$r(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n}) = 2$$



ECUACION SEGMENTARIA DEL PLANO.

Cualquier plano π no paralelo a ninguno de los tres ejes y que no pase por el origen, corta a los ejes en tres puntos de la forma $A(a,0,0),\ B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$.



Estos tres puntos determinan dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

La ecuación del plano π determinado por estos tres puntos nos vendrá dada por

$$\pi(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = bc.(x-a) + ac.y + ab.z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad bc.x + ac.y + ab.z = abc$$

Dividiendo por *a.b.c*, obtenemos: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ que recibe el nombre de **ecuación SEGMENTARIA** del plano.

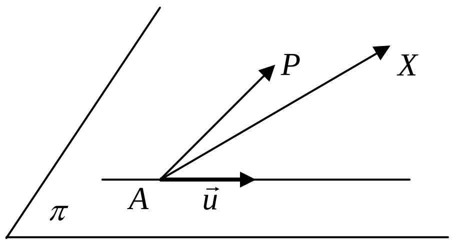
Los valores *a*, *b*, *c* reciben el nombre de **ABSCISA, ORDENADA y COTA** en el origen, respectivamente.

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,0,1) y tiene por vectores directores $\vec{u}(2,-1,0)$ y $\vec{v}(0,3,2)$.
2. Encontrar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos *A*(1,2,3), *B*(1,0,1) y *C*(0,1,1).
3. Hallar las ecuaciones de los planos cartesianos.
4. Hallar la ecuación segmentaria del plano que pasa por los puntos *A*(1,0,0), *B*(0,5,0) y *C*(0,0,2).
5. Hallar la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en puntos situados a distancia "*a*" del origen. Hallar el valor de *a* para que el plano sea $x+y+z-7=0$.
6. Comprobar si los puntos $A(1,2,3), B(4,7,8), C(3,5,5), D(-1,-2-3)$ y $E(2,2,2)$ son coplanarios.
7. ¿Qué relación deben verificar los parámetros *a*, *b* y *c* para que los puntos *A*(1,0,1), *B*(1,1,0), *C*(0,1,1) y *D*(*a*,*b*,*c*) sean coplanarios?

PLANO DETERMINADO POR UNA RECTA Y UN PUNTO EXTERIOR A ELLA.

Una recta *r* del espacio afín y un punto *P* exterior a ella determinan un único plano.



Sea $r(A;\vec{u})$ la determinación lineal de una recta en el espacio afín y *P* un punto que no pertenece a dicha recta.
Para determinar un plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes: el punto puede ser el punto base de la recta *A* y los dos vectores, el director de

de la recta $\vec{u}$ y el formado por los puntos *A* y *P* ($\overrightarrow{AP}$).

En consecuencia, la determinación lineal del plano buscado será: $\pi(A;\vec{u},\overrightarrow{AP})$

Si $A(x_1,y_1,z_1)$, $P(x_2,y_2,z_2)$ y $\vec{u}(d_1,d_2,d_3)$ entonces los vectores:

$$\overrightarrow{AX}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$
$$\overrightarrow{AP}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$
$$\vec{u}(d_1,d_2,d_3)$$

serán linealmente dependientes y, por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & d_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & d_2 & y_2-y_1 \\ z-z_1 & d_3 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante obtenemos la ecuación general o implícita del plano pedido.

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y contiene a la recta dada por la ecuación:

$$\begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$$

La recta dada tiene como punto base $A(2,-2,1)$ y por vector dirección $\vec{u}(-2,1,3)$

El vector $\overrightarrow{AP}$ tendrá por coordenadas $\overrightarrow{AP} = (1,2,3)-(2,-2,1) = (-1,4,2)$

El plano pedido nos vendrá determinado por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}$: $\pi(A;\vec{u},\overrightarrow{AP})$ y su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y+2 & 1 & 4 \\ z-1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$-10\cdot(x-2)+(y+2)-7\cdot(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad -10x+y-7z+29=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 10x-y+7z-29=0$$

que es la ecuación del plano pedido.

2.-Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y por la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

La recta dada tiene como punto base $A(1,-2,1)$ y por vector dirección $\vec{u}(3,-2,1)$

El punto P en este caso es el origen que tiene por coordenadas $O(0,0,0)$. Por tanto, el vector $\overrightarrow{AO}$ tendrá por coordenadas $\overrightarrow{AO} = (0,0,0)-(1,-2,1) = (-1,2,-1)$

El plano pedido nos vendrá determinado por el punto O y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AO}$: $\pi(O;\vec{u},\overrightarrow{AO})$ y su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ y & -2 & 2 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$0\cdot x-2\cdot y+4\cdot z=0 \quad \Rightarrow \quad -2y+4z=0 \quad \Rightarrow \quad y-2z=0$$

que es la ecuación del plano pedido.

3.-Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $r \equiv \begin{cases} x = \quad 2\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$ y por el punto $P(2,-1,2)$.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS.

Las posiciones relativas de dos planos en el espacio son tres:

- **SECANTES:** tienen en común los puntos de una recta.
- **PARALELOS:** no tienen ningún punto en común.
- **COINCIDENTES:** tienen todos sus puntos en común.

Vamos a buscar las condiciones que nos ayuden a distinguir cada uno de estos casos haciendo un estudio de los puntos comunes a dichos planos.

Consideremos dos planos de $\boldsymbol{E_3}$ de ecuaciones:

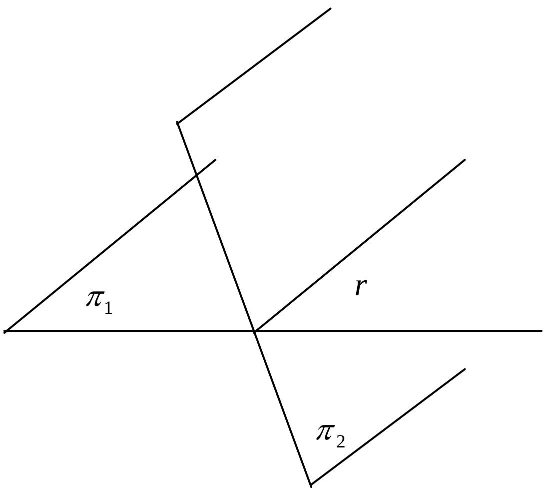
$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Para estudiar los puntos $P \in \pi_1 \cap \pi_2$ bastar estudiar el sistema formado por las ecuaciones de dichos planos. Para este estudio, vamos a considerar las matrices del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Según sean los rangos de estas matrices podemos distinguir los siguientes casos:

1. Si rango(M) = rango(M^*) = 2

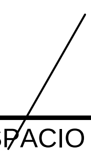


El sistema formado por las ecuaciones de los planos es compatible e indeterminado y las soluciones dependen de un parámetro. En consecuencia, los dos planos son secantes y se cortan según una recta.

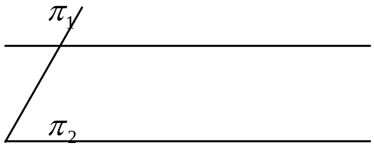
Esto nos permite expresar una recta como intersección de dos planos: las ecuaciones de estos planos reciben el nombre de **ECUACIONES IMPLÍCITAS** de la recta.

Para obtener, a partir de ellas, las ecuaciones paramétricas de la recta sólo tendremos que resolver el sistema.

2. Si rango(M) = 1 y rango(M^*) = 2



El sistema formado por las ecuaciones de los planos es incompatible y no tiene solución: los dos planos no tienen ningún punto en común, es decir que son paralelos.



De rango(M) = 1 se deduce que:

$$(A, B, C) = k \cdot (A', B', C') \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

lo que nos indica que los coeficientes de x, y, z son proporcionales.

De rango(M^*) = 2 se deduce que existe un menor de orden 2 distinto de cero, por lo que los planos serán distintos, y además, si

$$\begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot D' - A' \cdot D \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{D}{D'}$$

y enlazando con la condición anterior nos queda:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

que es la condición de paralelismo entre planos.

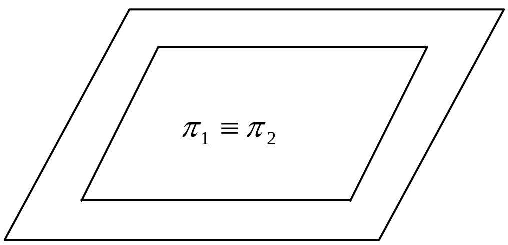
Esto nos lleva a la siguiente conclusión: **Las ecuaciones implícitas de dos planos paralelos se diferencian en el término independiente**, es decir, si la ecuación de un plano nos viene dada por $Ax + By + Cz + D = 0$, la ecuación de cualquier plano paralelo a él será de la forma

$$Ax + By + Cz + K = 0, \qquad K \in R$$

donde K depende del punto por donde pase el plano. Para hallar el valor de K se sustituyen las coordenadas del punto por donde pasa en la ecuación del plano y se despeja el valor de K.

3. Si rango(M) = rango(M^*) = 1

El sistema es compatible indeterminado y las soluciones dependen de dos par metros. Las ecuaciones de los dos planos son proporcionales y tienen todos sus puntos en común, es decir, los dos planos son **COINCIDENTES**.



La condición de coincidencia entre planos nos vendrá dada por:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

es decir, todos los coeficientes de las ecuaciones de los planos son proporcionales.

__**En resumen:**__

1. Si los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones de los planos no son proporcionales, los planos se cortan según una recta de la que serían sus ecuaciones implícitas.
2. Si los coeficientes de las incógnitas en las ecuaciones de los planos son proporcionales, los planos son paralelos:

a. Si la proporcionalidad no se transmite a los términos independientes, los planos son paralelos y distintos.
b. Si la proporcionalidad se transmite a los términos independientes, los planos son coincidentes.

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS.

Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

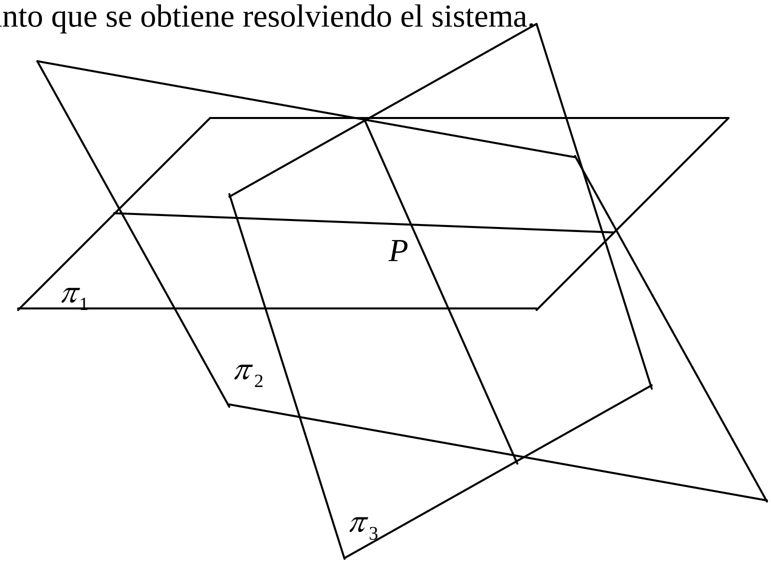
$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$$
$$\pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Las matrices de coeficientes M y ampliada M^* son:

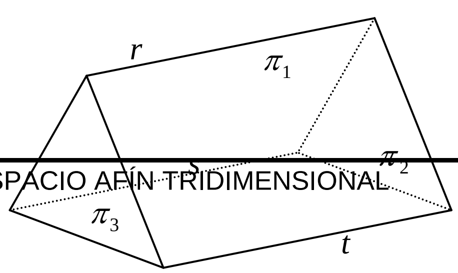
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

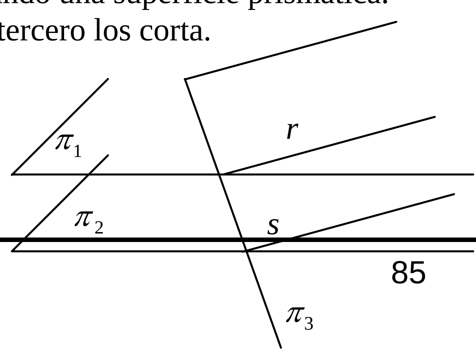
Pueden presentarse los siguientes casos:

1. Si rango(M) = rango(M^*) = 3
El sistema es compatible y determinado: tiene solución única. Los tres planos se cortan en un punto que se obtiene resolviendo el sistema.



2. Si rango(M) = 2 y rango(M^*) = 3, el sistema es incompatible y los tres planos no tienen ningún punto en común.
Por ser rango(M^*) = 3, los tres planos son distintos.
Estudiando la posición relativa de los planos dos a dos, las situaciones que nos podemos encontrar son:
a) Los planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática.
b) Dos de los planos son paralelos y el tercero los corta.

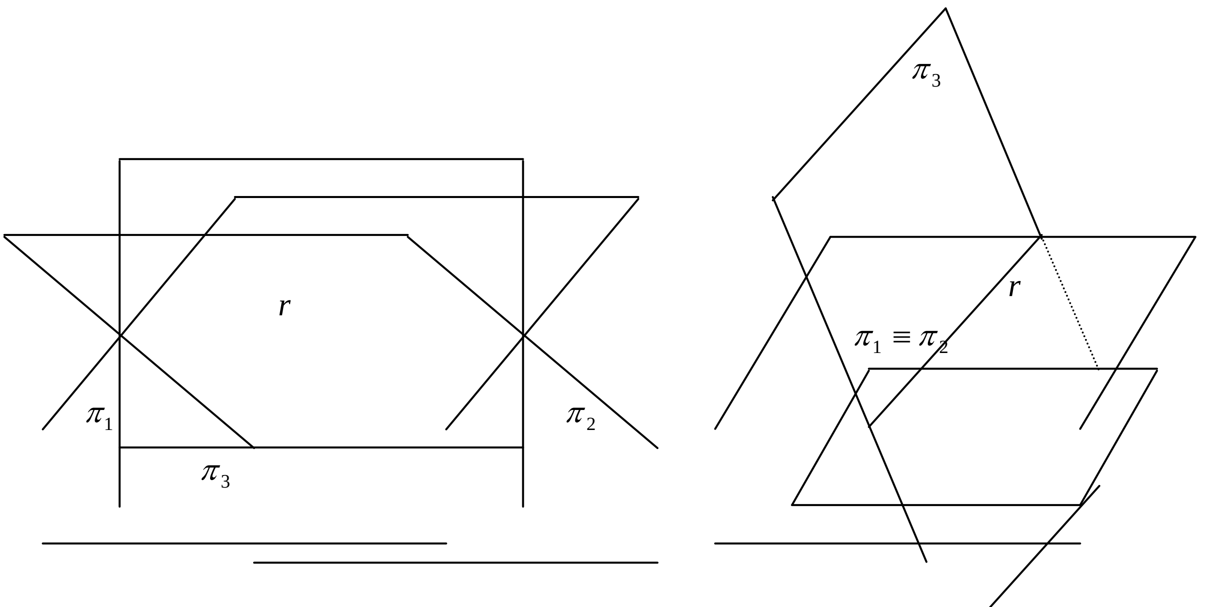




3. Si rango(M) = rango(M^*) = 2.

El sistema es compatible e indeterminado: Las infinitas soluciones del sistema dependen de un parámetro y representan los puntos de una recta (los planos se cortan en una recta). Las situaciones posibles son:

a) Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.
b) Hay dos planos coincidentes y el tercero los corta.



Por ser el rango de las matrices igual a dos, tenemos dos planos independientes y otro que será combinación lineal de ellos:

$$A''x + B''y + C''z + D'' = \lambda \cdot (Ax + By + Cz + D) + \mu \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Si consideramos λ y μ variables, tendremos el conjunto de planos que pasan por una recta, la recta intersección de π_1 y π_2.

El conjunto de planos de $\boldsymbol{E_3}$ que pasan por una recta dada, recibe el nombre de **HAZ DE PLANOS SECANTES** cuya base es la recta dada (que llamaremos **ARISTA** del haz).

La expresión del haz de planos nos permite hallar la ecuación de cualquier plano que pase por un punto dado y por la intersección de otros dos planos: Partiendo de ,éstos, escribimos la ecuación del haz donde sustituimos las coordenadas del punto, obteniendo as¡ una relación entre los parámetros λ y μ. Sustituyendo la relación obtenida en la ecuación del haz y dividiendo entre el par metro que nos queda, obtendremos la ecuación del plano pedido.

Suponiendo que uno de los dos parámetros es distinto de cero, podríamos dividir la ecuación del haz por dicho parámetro y nos quedaría en función de uno sólo, de la siguiente forma:

$$(Ax + By + Cz + D) + \alpha \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

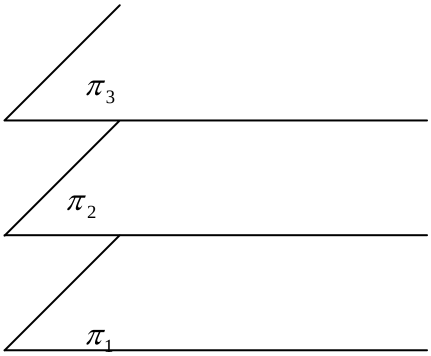
3. Si rango(M) = 1 y rango(M^*) = 2

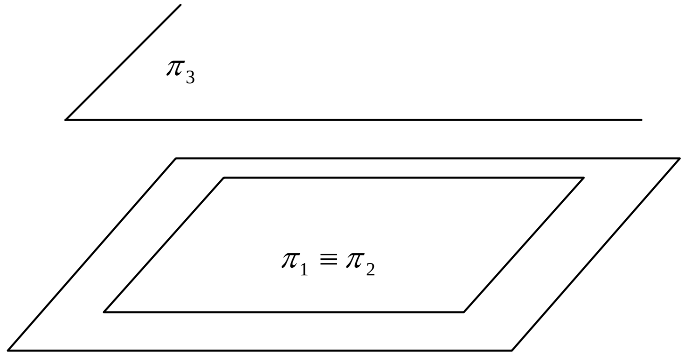
El sistema es incompatible y no existe ningún punto común a los tres planos.

Por ser rango(M) = 1, los tres planos son paralelos, pero no son coincidentes ya que rango (M^*) = 2.

Las dos posiciones posibles entre ellos son:

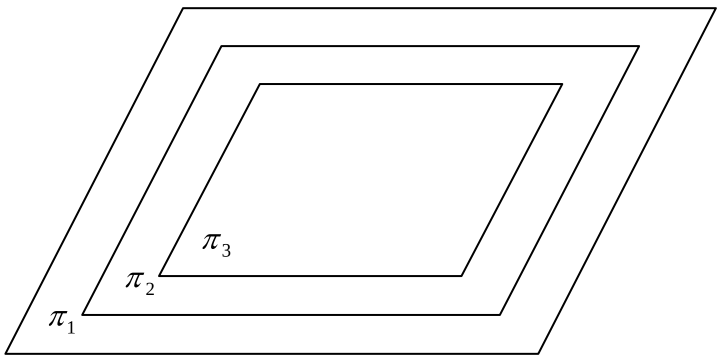
a) Los tres planos son paralelos y distintos.
b) Dos de los planos son coincidentes y el tercero paralelo a ellos y distinto.





5. Si rango(M) = rango(M^*) = 1

El sistema es compatible e indeterminado. El sistema queda reducido a una sola ecuación: los tres planos son coincidentes.



$\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO.

Las posiciones relativas que pueden tener una recta y un plano en el espacio son las siguientes:

a) Recta y plano se cortan: tienen un punto en común.
b) Recta y plano son paralelos: no tienen ningún punto en común.
c) Recta contenida en el plano: todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

Vamos a tratar de obtener las condiciones necesarias y suficientes para distinguir cada uno de estos casos, según las distintas formas de expresar la recta y el plano.

$$\text{Sea} \quad r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda..d_1 \\ y = y_1 + \lambda.d_2 \\ z = z_1 + \lambda.d_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Si $X(x, y, z) \in r$ es tal que $X \in \pi \;\Rightarrow$ que satisface la ecuación del plano:

$$A.(x_1+\lambda.d_1)+B.(y_1+\lambda.d_2)+C.(z_1+\lambda.d_3)+D=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (Ax_1+By_1+Cz_1+D)+\lambda.(A.d_1+B.d_2+C.d_3)=0 \quad \Rightarrow$$

de donde:

a) Si $A.d_1+B.d_2+C.d_3\neq 0$, podemos despejar λ:

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A.d_1+B.d_2+C.d_3}$$

y conociendo λ tendremos las coordenadas del punto $X(x,y,z)$ tal que $X\in r\cap\pi$, lo cual implica que la recta y el plano son secantes (recta y plano se cortan en un punto).

b) Si $A.d_1+B.d_2+C.d_3=0$ y $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$

no podemos despejar λ ya que tendríamos que dividir por cero, lo cual no es posible y, por tanto, no existe ningún valor para λ. Esto implica que no hay ningún punto en común entre la recta y el plano. En consecuencia, la recta y el plano son paralelos: $r\,||\,\pi$.

c) Si $A.d_1+B.d_2+C.d_3=0$ y $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

La igualdad se verificaría para cualquier valor de λ y el sistema tiene infinitas soluciones. Por tanto, todo punto de la recta es incidente con el plano y la recta r está contenida en el plano π.

Consideremos que la recta y el plano nos vienen dados por sus ecuaciones cartesianas:

$$r\equiv\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases}$$
$$\pi\equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Estudiar las posiciones relativas entre la recta y el plano equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones cartesianas. Para ello, formamos las matrices de coeficientes M y ampliada M^*:

$$M=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

El rango mínimo de la matriz M es 2, puesto que los planos que determinan la recta son secantes. En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

1. Rango(M) = Rango(M^*) = 3

El sistema es compatible y determinado: tendrá solución única y los tres planos se cortan en un punto. Por tanto, la recta y el plano tienen un punto en común cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema. En consecuencia, la recta y el plano son **SECANTES**.

2. Rango(M) = 2 y Rango(M^*) = 3

El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen ningún punto en común. Por tanto, la recta y el plano son **PARALELOS.**

3. Rango(M) = Rango(M^*) = 2

El sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. Los tres planos tienen una recta en común: la recta está contenida en el plano.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS.

Dos rectas en el espacio pueden tener las siguientes posiciones entre sí:

a) **RECTAS QUE SE CRUZAN**: no tienen ningún punto en común y no est n situadas en el mismo plano.
b) **RECTAS SECANTES**: tienen un punto común (obligatoriamente deben estar en el mismo plano).
c) **RECTAS PARALELAS**: no tienen ningún punto en común y est n en el mismo plano.
d) **RECTAS COINCIDENTES**: tienen todos los puntos en común.

Vamos a tratar de obtener las condiciones que nos permitan distinguir cada uno de los casos. La forma más fácil de estudiar las posiciones de dos rectas es expresando las ecuaciones de las rectas forma continua o paramétrica.

Sean las rectas r y s dadas por sus ecuaciones continuas:

$$r \equiv \frac{x-x_1}{d_1} = \frac{y-y_1}{d_2} = \frac{z-z_1}{d_3} \qquad\qquad s \equiv \frac{x-x_2}{d_1^{'}} = \frac{y-y_2}{d_2^{'}} = \frac{z-z_2}{d_3^{'}}$$

Consideremos los siguientes vectores:

- Dirección de r: $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$
- Dirección de s: $\vec{d}\,'(d_1^{'}, d_2^{'}, d_3^{'})$
- $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$: vector determinado por un punto $A \in r$ y otro $B \in$ s.

Si r y s se cortan o son paralelas o son coincidentes, entonces tienen que ser coplanarias y, por tanto, los vectores $\vec{d}$, $\vec{d}\,'$ y $\overrightarrow{AB}$ tienen que ser linealmente dependientes. Por tanto:

$$|D| = \begin{vmatrix} d_1 & d_1^{'} & x_2 - x_1 \\ d_2 & d_2^{'} & y_2 - y_1 \\ d_3 & d_3^{'} & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, si:

- $|D| \neq 0 \Rightarrow$ r y s se cruzan en $\boldsymbol{E_3}$.
- $|D| = 0 \Rightarrow$ r y s son coplanarias (están en el mismo plano):

  $\Leftarrow$ Si $\vec{d} \neq k.\vec{d}' \Rightarrow (d_1, d_2, d_3) \neq k \cdot (d_1', d_2', d_3') \Rightarrow$ las rectas se cortan en un punto.

  $\Leftarrow$ Si $\vec{d} = k.\vec{d}' \Rightarrow$ las rectas son paralelas

  ∑ Si r(D) = 2: son paralelas y distintas

  ∑ Si r(D) = 1: son coincidentes.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Determinar *m* y *n* para que sean paralelos los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 6x - my + 4z + 9 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 9x - 3y + nz - n = 0$$

Para que dos planos sean paralelos, se tiene que verificar que los coeficientes de x, y, z, en sus ecuaciones cartesianas, sean proporcionales. Entonces:

$$\frac{6}{9} = \frac{-m}{-3} = \frac{4}{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{6}{9} = \dfrac{m}{3} \quad \Rightarrow \quad 9m = 18 \quad \Rightarrow \quad m = 2 \\ \dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{n} \quad \Rightarrow \quad 6n = 36 \quad \Rightarrow \quad n = 6 \end{cases}$$

En consecuencia, las ecuaciones de los planos serán:

$$\pi_1 \equiv 6x - 2y + 4z + 9 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 9x - 3y + 6z - 6 = 0$$

2. Estudiar la posición relativa de los planos según los valores del parámetro *a*:

$$\begin{aligned} 3x - ay + 2z - (a-1) &= 0 \\ 2x - 5y + 3z - 1 &= 0 \\ x + 3y - (a-1)z &= 0 \end{aligned}$$

Estudiar la posición relativa de los planos equivale a estudiar las soluciones del sistema. Para ello, escribimos las matrices del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(a-1) \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -(a-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de M para ver que valores de a lo anulan:

$$|M| = -2a^2 + 14a - 20$$

$$|M| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 7a + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = 5 \end{cases}$$

ζ Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ $\Rightarrow$ $r(M) = r(M^*) = 3$ $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ tiene solución única $\Rightarrow$ los planos se cortan en un punto.

ζ Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se verifica que: rango(M) = 2 y rango(M^*) = 2 ya que la tercera fila es diferencia de las dos primeras. El sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. Por tanto, los tres planos se cortan en una recta.

ζ Si $a = 5$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso: rango(M) = 2 y rango(M^*) = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible $\Rightarrow$ los planos no tienen ningún punto en común y como no hay dos planos que sean paralelos, entonces se cortan dos a dos formando una superficie prismática triangular.

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es paralelo al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z + 2 = 0$

La ecuación de cualquier plano paralelo al dado es de la forma: $x - 2y + 4z + K = 0$

Como tiene que pasar por el punto $A(1,2,3)$, las coordenadas de este punto deben de verificar la ecuación del plano:

$$1 - 2.2 + 4.3 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -9$$

Por tanto, la ecuación del plano pedido será: $x - 2y + 4z - 9 = 0$

4. Hallar la ecuación del plano determinado por las rectas:

$$\mathrm{r} \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \textbf{y} \quad \mathrm{s} \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Las determinaciones lineales de las rectas r y s son:

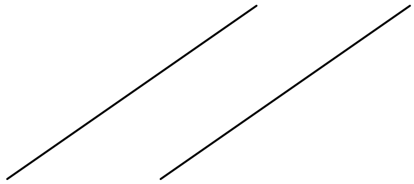
$$r \equiv \begin{cases} A(1,-1,2) \\ \vec{u}(1,2,3) \end{cases} \qquad \boldsymbol{s} : \begin{cases} \boldsymbol{B(0,2,3)} \\ \boldsymbol{\vec{v}(1,2,3)} \end{cases}$$

Puesto que el vector dirección de las rectas es el mismo, las rectas son coplanarias. Debemos estudiar si son paralelas y distintas o son coincidentes. Para ello, calculamos el vector determinado por los puntos A y B:

$$\overrightarrow{AB} = (0,2,3) - (1,-1,2) = (-1,3,1)$$

y comprobamos si es independiente con el vector dirección de las rectas r y s:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \text{ y } \vec{u} \quad \text{son linealmente independientes}$$



Por tanto, las rectas r y s son paralelas y distintas y, en consecuencia, determinan un plano.

La determinación lineal de dicho plano será $\pi(A;\vec{u},\overrightarrow{AB})$ y su ecuación vendrá dada por el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -7(x-1)-4(y+1)+5(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad -7x-4y+5z-7=0$$

En consecuencia, la ecuación del plano determinado por las rectas *r* y *s* será:

$$7x+4y-5z+7=0$$

5. Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(1,0,1)$ y es paralela a la recta r intersección de los planos $x + y + z - 3 = 0$ y $2x - 2y + z - 1 = 0$.

<u>Primer método:</u>

Puesto que la recta *r* nos viene dada como intersección de dos planos, las ecuaciones de éstos serían las ecuaciones cartesianas de la recta *r*. Calculemos sus ecuaciones paramétricas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$\left.\begin{array}{r} x+\quad y+z-3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

Hacemos $y = \lambda$ pasando dicho parámetro al segundo miembro junto al término independiente. Nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+\quad \lambda+z-3=0 \\ 2x-2\lambda+z-1=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x+z=3-\lambda \\ 2x+z=1+2\lambda \end{array}\right.$$

Restando ambas ecuaciones tenemos:

$$-x = 2-3\lambda \quad \Rightarrow \quad x = -2+3\lambda$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones:

$$(-2+3\lambda) + z = 3 - \lambda \quad \Rightarrow \quad z = 3 + 2 - 3\lambda - \lambda \quad \Rightarrow \quad z = 5 - 4\lambda$$

y, en consecuencia, las ecuaciones paramétricas de la recta *r* serán:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -2+3\lambda \\ y = \qquad \lambda \\ z = \; 5-4\lambda \end{array}\right.$$

El vector dirección de dicha recta es $\vec{d}(3,1,-4)$ y ésta será la dirección de cualquier recta paralela a ella. Por tanto, la recta *s* pedida nos vendrá determinada por el punto $A(1,0,1)$ y el vector $\vec{d}(3,1,-4)$. Su ecuación, en forma continua, nos vendrá dada por:

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-4}$$

<u>Segundo método:</u>

Como la recta *r* nos viene dada mediante la intersección de dos planos, la recta s podremos calcularla también como intersección de otros dos planos paralelos a los dados que pasen por el punto por donde tiene que pasar la recta *s* pedida:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv \ \ x + \ \ y + z - 3 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Calculamos los planos paralelos a π_1 y π_2 que pasen por el punto $A(1,0,1)$:

La ecuación de cualquier plano paralelo a π_1 será de la forma:

$$\pi_1 \,||\, \pi \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv x + y + z + K = 0$$

Como $A \in \pi \quad \Rightarrow \quad 1 + 0 + 1 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -2$

Por tanto: $\quad \pi \equiv x + y + z - 2 = 0$

La ecuación de cualquier plano paralelo a π_2 será de la forma:

$$\pi_2 \,||\, \pi' \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv 2x - 2y + z + K' = 0$$

Como $A \in \pi' \quad \Rightarrow \quad 2.1 - 2.0 + 1 + K' = 0 \quad \Rightarrow \quad K' = -3$

Por tanto: $\quad \pi' \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0$

En consecuencia, las ecuaciones cartesianas de la recta *s* nos vienen dadas por la intersección de los planos π y π':

$$s \equiv \begin{cases} \pi \equiv \ \ x + \ \ y + z - 2 = 0 \\ \pi' \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

6. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *A*(1,1,2) y es paralelo a las rectas r y s siendo

$$r\!:\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s\!:\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

Pasamos las rectas a su forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \qquad \text{Haciendo} \quad x = \lambda \quad \Rightarrow \text{r} : \begin{cases} x = \ \ \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$s:\begin{cases}2x-2y=4\\ y-z=-3\end{cases} \qquad \text{Haciendo } y=\mu \quad \Rightarrow \quad s:\begin{cases}x=2+\mu\\ y=\quad\mu\\ z=3+\mu\end{cases}$$

Los vectores de dirección de estas rectas serán $\vec{d}_r(1,-3,-4)$ y $\vec{d}_s(1,1,1)$.

El plano paralelo a dichas rectas contendrá a sus vectores de dirección y, puesto que tiene que pasar por el punto $A(1,1,2)$, tendremos determinado el plano pedido mediante dos vectores linealmente independientes (no son proporcionales) y un punto: $\pi(A;\vec{d}_r,\vec{d}_s)$
Su ecuación nos vendrá dada por:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ y-1 & -3 & 1\\ z-2 & -4 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 1.(x-1)-5(y-1)+4(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x-5y+4z-4=0$$

7. Determinar la posición relativa del plano $\pi \equiv 3x-2y+z=0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+3$$

Pasamos la ecuación de la recta a su forma paramétrica:

$$r \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+3=\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=\quad 2\lambda\\ z=-3+\lambda\end{cases}$$

y resolvemos el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de la recta y la ecuación cartesiana del plano:

$$\left.\begin{array}{l}x=\ 1+3\lambda\\ y=\quad 2\lambda\\ z=-3+\lambda\\ 3x-2y+z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3.(1+3\lambda)-2.(2\lambda)+(-3+\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad 3+9\lambda-4\lambda-3+\lambda=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6\lambda=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=0$$

Por tanto, la recta y el plano se cortan en un punto de coordenadas P(1,0,–3).

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1,2,0)$ y contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases}x-2y+\ z-3=0\\ \qquad y+3z-5=0\end{cases}$$

Puesto que el plano pedido contiene a la recta r pertenecerá al haz de planos determinado por ella:

$$(x-2y+z-3)+\lambda(y+3z-5)=0$$

De todos ellos, nos interesa el que pasa por el punto $A(-1,2,0)$. Por tanto, las coordenadas de este punto verificarán la ecuación del haz de planos:

$$(-1-2.2+0-3)+\lambda.(2+3.0-5)=0 \quad \Rightarrow \quad -8-3\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad -3\lambda=8 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{8}{3}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación del haz, obtenemos:

$$(x-2y+z-3)-\frac{8}{3}\cdot(y+3z-5)=0 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot(x-2y+z-3)-8\cdot(y+3z-5)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x-14y-21z+31=0$$

que es la ecuación del plano pedido.

9. Estudiar la posición relativa del plano $\pi \equiv 2x-5y+az+2=0$ **y la recta**

$$r \equiv \begin{cases} 3x-y+2z-1=0 \\ x+4y+z-5=0 \end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa entre el plano y la recta, discutiremos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+az+2=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \\ x+4y+z-5=0 \end{array}\right\}$$

Para ello, consideramos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -5 & a \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 2 & -5 & a & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Si $r(M)=r(M^*)=3$, el sistema sería compatible y determinado: la recta y el plano se cortarían en un punto cuyas coordenadas serían las resultantes de resolver el sistema.

Para que $r(M) = 3$, se tendrá que verificar que $|M| \neq 0$; calculamos el determinante de M

$$|M|=-2-10+12a+a-16+15 \quad \Rightarrow \quad |M|=13a-13$$

Este determinante se anula para el valor de $a = 1$. Entonces:

- Si $a \neq 1$, se verificará que $r(M)=r(M^*)=3 \Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado: la recta y el plano se cortan en un punto.

- Si $a = 1$, las matrices del sistema nos quedan de la forma:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de estas matrices:

Puesto que $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2+15=13\neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(M)=2$

Comprobamos el rango de M^*:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 10+5+24+2+8-75 = 49-75 = -26 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(M^*) = 3$$

Por tanto, $r(M) = 2$ y $r(M^*) = 3$: los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son distintos y el sistema será incompatible (no tiene solución). En consecuencia, la recta y el plano no tienen ningún punto en común: recta y plano son paralelos.

10. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = \quad 4\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 6+6\mu \\ y = 1-4\mu \\ z = 2+8\mu \end{cases}$$

Consideremos las determinaciones lineales de ambas rectas:

$$r \equiv \begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{u}(3,-2,4) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} B(6,1,2) \\ \vec{v}(6,-4,8) \end{cases}$$

y el vector formado por los puntos base de las dos rectas:

$$\overrightarrow{AB} = (6,1,2) - (2,1,0) = (4,0,2)$$

A continuación, formamos la matriz correspondiente con los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante de la matriz *D* obtenemos que vale cero puesto que las dos primeras columnas son proporcionales. En consecuencia, las rectas son coplanarias (están en el mismo plano).

Puesto que los vectores de dirección de ambas rectas son proporcionales, en principio, serán paralelas. Para ver si son distintas o coincidentes estudiamos el rango de la matriz *D*, en la cual encontramos un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-16) = 16 \neq 0$$

por lo que las rectas serán paralelas y distintas.

11. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ **y es paralelo a la recta** $s \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$

La recta *r* nos viene determinada por el punto $A(1,-1,2)$ y por el vector $\vec{u}(2,3,-1)$ y el vector dirección de la recta *s* tiene por coordenadas $\vec{v}(1,2,3)$.

El plano π que se nos pide por tener que contener a la recta ***r*** contendrá a su punto base *A* y su vector dirección y por tener que ser paralelo a ***s*** contendrá también a su vector dirección. Por tanto el plano π nos vendrá determinado por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Su ecuación nos vendrá dada por:

$$\pi(A;\vec{u},\vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z-2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 11.(x-1)-7.(y+1)+1.(z-2)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 11x-7y+z-20=0$$

que es la ecuación del plano pedido.

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(1,1,2) y corta a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad\qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

La recta que se nos pide tiene que ser coplanaria con cada una de las rectas dadas para que puedan cortarse, además de pasar por el punto ***P***. En consecuencia, dicha recta estará contenida en un plano que contenga a la recta ***r*** y pase por el punto ***P***, y también en el plano que contenga a la recta ***s*** y pase por el punto ***P***. La intersección de ambos planos nos dará la recta pedida: las ecuaciones de los dos planos serán las ecuaciones implícitas de la recta.

Pasemos a calcular las ecuaciones de dichos planos:

- Plano que contiene a la recta ***r*** y pasa por ***P***: el punto base de la recta es ***A***(1,0,1) y su vector dirección $\vec{u}(3,2,-1)$. El vector formado por los puntos *A* y *P* será:

$$\overrightarrow{AP} = (1,1,2)-(1,0,1) = (0,1,1)$$

La ecuación del plano que vamos buscando será:

$$\pi(A;\vec{u},\overrightarrow{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x-1)-3y+3(z-1)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x-3y+3x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x-y+z-2=0$$

- Plano que contiene a la recta ***s*** y pasa por ***P***: el punto base de la recta es ***B***(0,0,–1) y su vector dirección $\vec{v}(2,1,2)$. El vector formado por los puntos *B* y *P* será:

$$\overrightarrow{BP} = (1,1,2)-(0,0,-1) = (1,1,3)$$

La ecuación del plano que vamos buscando será:

$$\pi'(B;\vec{v},\overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.x-4y+1.(z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x-4y+z+1=0$$

Las ecuaciones implícitas de la recta pedida nos vendrán dadas por las ecuaciones de los planos π y π’:

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x-4y+z+1=0 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determinar para que valores de a y b, los planos:

$$\alpha: 2x - y + 3z - 1 = 0, \quad \beta: x + 2y - z + b = 0, \quad \gamma: x + ay - 6z + 10 = 0$$

   I) Tienen un solo punto en común.
   II) Pasan por una recta
   III) Se cortan dos a dos en tres rectas paralelas y distintas.
   Razónense las respuestas.

2. Un plano corta a los semiejes positivos de los ejes *OX*, *OY* y *OZ* del espacio en tres puntos *A*, *B* y *C*, respectivamente. El triángulo *ABC* es equilátero y, además, se sabe que el plano pasa por el punto *P*(3,4,5). Hallar, razonadamente, su ecuación.

3. Se dan dos rectas en el espacio mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{Recta primera: } \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\text{Recta segunda: } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

   Hallar la ecuación del plano que pase por la primera y sea paralelo a la segunda.

4. Sean $r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $r_2 \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$
   a) Hallar la ecuación de la recta ***s*** que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en r_1 y r_2.
   b) Hallar los puntos de intersección de ***s*** con r_1 y con r_2.

5. Dado el plano π: $2x + 4 = 0$ y la recta r: $\begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$
   a) Determinar su posición en el espacio.
   b) Calcular, si existe, el punto P intersección de π y *r*.

6. Estudiar la posición relativa de los planos

$$2x + y + 4z = 0, \quad 4x - y + 2z + 4 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - y + z + 2 = 0$$

7. ¿Son coplanarios los puntos *A*(1,1,0), *B*(1,0,–1), *C*(3,2,–1) y *D*(0,1,1)? Justificar la respuesta. Encontrar la ecuación del plano determinado por los tres primeros puntos. ¿Contiene este plano alguna recta que pase por el origen?

8. ¿Qué posición relativa tienen las siguientes rectas?

$$r: \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

9. Estudiar, según los valores del parámetro *a*, la posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = a+2t \\ y = 3+t \\ z = 2+t \end{cases}$$

10. Posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases} 2x+z=9 \\ y=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x+y=0 \\ -x+2y+2z=5 \end{cases}$$

Hallar el plano que contiene a *r* paralelo a *s*.

11. Determinar la intersección *P* del plano $\beta: x+y+z-3=0$ con la recta $r: -x = y-1 = -z$

Calcular el plano π que pasa por *P* paralelo al $\alpha: x-2y+3z+1=0$

Sea *s* la recta en que se cortan π y β. Dar la ecuación general (implícita) del plano determinado por las rectas *r* y *s*.

12. Dadas las rectas *r* y *s* de ecuaciones

$$r: x = y = z \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

i) Estudiar su posición.
ii) Hallar la recta que corta a *r* y *s* y es paralela a la recta

$$t: (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,2,-1)$$

13. Hallar la ecuación continua de la recta que es paralela a los planos

$$x-3y+z=0 \quad \text{y} \quad 2x-y+3z-5=0$$

y pasa por el punto *P*(2,–1,5).

14. Discutir, según los valores del parámetro *a*, la posición relativa de del plano y la recta siguientes:

$$\alpha: \ 2x+3y-2z=4$$

$$\text{r}:\begin{cases} ax-y+z=2 \\ 6x+5y-3z=a \end{cases}$$

15. Dados el plano $\pi: x+y+mz=n$, y la recta $\text{r}: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Calcular *m* y *n* para que π y r sean secantes.
b) Calcular *m* y *n* para que π y r sean paralelos.
c) Calcular *m* y *n* para que π contenga a r.

16. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(1,1,1), es paralela al plano α de ecuación $x-2y-z=0$ y está en el mismo plano que la recta

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$