ESPACIO AFIN-EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL.

PRODUCTO ESCALAR. DEFINICION.

Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{V_3}$ de los vectores libres asociado al espacio afín $\boldsymbol{E_3}$.

Se llama **PRODUCTO ESCALAR** en $\boldsymbol{E_3}$ a la aplicación definida de $\boldsymbol{V_3} \times \boldsymbol{V_3} \rightarrow \boldsymbol{R}$ que a cada pareja de vectores le asocia un número real de la forma

$$(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos <\vec{u},\vec{v}> \qquad \text{siendo } \vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \text{siendo } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0}$$

Este producto escalar así definido verifica las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \forall \vec{u},\vec{v} \in V_3$
2. **Distributiva respecto de la suma de vectores:**
   2.1 $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} \qquad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$
   2.2 $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \qquad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$
3. **Homogénea:** $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ siendo $\lambda \in R,\ \vec{u},\vec{v} \in V_3$
4. **Posibilidad:** $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^{\,2} \geq 0 \qquad \forall \vec{u} \in V_3$

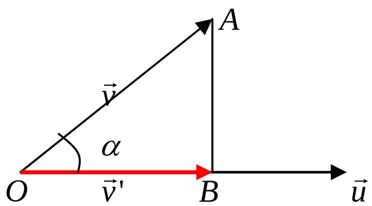
Con estas propiedades se dice que el producto escalar es una **"forma bilineal** (propiedades 2 y 3) **simétrica** (propiedad 1) **definida positiva** (propiedad 4)".

Al espacio vectorial $\boldsymbol{V_3}$ con la aplicación producto escalar se le conoce con el nombre de **ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO TRIDIMENSIONAL**.

Se llama **ESPACIO AFÍN-EUCLÍDEO** a un espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es un espacio vectorial euclídeo.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

El producto escalar de dos vectores es igual al producto escalar de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



Sean $\vec{u},\vec{v} \in V_3$ dos vectores no nulos y sea $\vec{v}'$ la proyección de sobre $\vec{u}$: $\vec{v}' = proy_{\vec{u}}\vec{v}$

En el triángulo *OAB* se verifica que

$$\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\|.\cos <\vec{u},\vec{v}>$$

Por otra parte, tenemos: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos <\vec{u},\vec{v}> = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}'\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}'\|.\cos 0^{o} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}'$ tienen la misma dirección y sentido.

Esto mismo también se verificaría, si el ángulo que forman los dos vectores fuera mayor de 90º

ORTOGONALIDAD ENTRE VECTORES.

Hemos definido el producto escalar de dos vectores como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \cos < \vec{u}, \vec{v} >$$

Este producto es nulo cuando alguno de los vectores es nulo.

Sin embargo, existe otra posibilidad de que el producto escalar sea cero y es cuando el ángulo formado por los dos vectores sea de 90 (π/2), es decir que los vectores sean perpendiculares u ortogonales.

"Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, no nulos, son ortogonales, sí y sólo sí, su producto escalar es nulo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ "

$$\vec{u}, \vec{v} \in V_3 ,\ \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} \quad \text{son ortogonales} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

VECTORES UNITARIOS.

Se dice que un vector $\vec{u} \in V_3$, no nulo, es unitario, si y sólo si, su módulo es la unidad.

$$\vec{u} \in V_3 ,\ \vec{u} \neq \vec{0} \quad \text{es unitario} \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u}\| = 1$$

PROPOSICION.

Dado un vector cualquiera $\vec{v}$ no nulo, a partir de él podemos obtener un vector unitario en su misma dirección, simplemente dividiendo por su módulo.

En efecto: el vector $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector y, además, es unitario ya que $\|\vec{u}\| = \left\| \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \left\| \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \right\| = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1$

También el vector $\vec{u}' = -\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ tiene la misma dirección y sentido opuesto que $\vec{v}$ y es unitario.

SISTEMA DE REFERENCIA ORTONORMAL.

Base Normada: Una base B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset V_3$ se dice que es **normada** si los vectores que la forma son vectores unitarios.

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$$

Base ortogonal: Una base B = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset V_3$ se dice que es **ortogonal** si los vectores son ortogonales dos a dos.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

Base ortonormal: Una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \subset V_3$ se dice que es **ortonormal** si es normada y ortogonal al mismo tiempo, es decir,

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$$

"Decimos que un sistema de referencia *R* = { *O; B* } del espacio afín euclídeo es ortonormal si la base del espacio vectorial euclídeo asociado es una base ortonormal".

El sistema de referencia que venimos utilizando formado por el punto arbitrario *O* y la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es un sistema de referencia ortonormal.

EXPRESION ANALITICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

Sea R $=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia de $\boldsymbol{E_3}$ y ***B*** = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base del espacio vectorial asociado.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen por coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respecto de la base ***B***, se pueden expresar dichos vectores como combinación lineal de los vectores de la base de la siguiente forma:

$$\vec{u} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3 \qquad \vec{v} = x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + z_2\vec{u}_3$$

En consecuencia, el producto escalar de los vectores nos quedará:

$$\begin{gathered}\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 + z_1\vec{u}_3) \cdot (x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + z_2\vec{u}_3) = \\ = x_1.x_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + x_1.y_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + x_1.z_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) + y_1.x_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1) + y_1.y_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) + \\ + y_1.z_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) + z_1.x_2(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) + z_1.y_2(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) + z_1.z_2(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3)\end{gathered}$$

Aplicando las propiedades del producto escalar nos queda:

$$\begin{gathered}\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1.x_2(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + (x_1.y_2 + y_1.x_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + (x_1.z_2 + z_1.x_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3) + \\ + y_1.y_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) + (y_1.z_2 + z_1.y_2)(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3) + z_1.z_2(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3)\end{gathered}$$

En el caso particular de que la base sea ortonormal, el producto escalar toma la expresión:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

que es la **FORMA CANÓNICA** del producto escalar.

EJEMPLO:

Si $\vec{u}(3,2,-1)$ y $\vec{v}(2,-1,-2)$ respecto de una base ortonormal, el producto escalar de ellos será:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.2 + 2.(-1) + (-1).(-2) = 6 - 2 + 2 = 6$$

APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR.

En todo lo que sigue utilizaremos el sistema de referencia ortonormal $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

- **MÓDULO DE UN VECTOR.**

Consideremos un vector, no nulo, $\vec{u}(x,y,z) \in V_3$. El producto escalar del vector $\vec{u}$ por sí mismo será:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|.\cos<\vec{u},\vec{u}>=\|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|.\cos 0^\circ=\|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$$

de donde

$$\|\vec{u}\|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

es decir, el módulo de un vector se define como la raiz cuadrada positiva del producto escalar del vector por sí mismo.
Teniendo en cuenta que el producto escalar de un vector por sí mismo es

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=x.x+y.y+z.z=x^2+y^2+z^2$$

resulta que

$$\|\vec{u}\|=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

EJEMPLO.

Si $\vec{u}(2,-3,5)$, entonces: $\|\vec{u}\|=+\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=+\sqrt{4+9+25}=+\sqrt{38}$

- **DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.**

Se define la distancia entre dos puntos ***A*** y ***B***, como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ determinado por ellos.

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ de donde

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

EJEMPLO.

Calcular la distancia entre los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,2,0)$.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)-(1,2,3)=(-2,0,-3)$

Por tanto: $d(A,B)=+\sqrt{(-2)^2+0^2+(-3)^2}=+\sqrt{4+0+9}=+\sqrt{13}$

- **ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES.**

De la definición del producto escalar de dos vectores

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos<\vec{u},\vec{v}>$$

podemos deducir el $\cos<\vec{u},\vec{v}>$ de la forma:

$$\cos<\vec{u},\vec{v}>=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Esto que nos dice que el coseno del ángulo determinado por dos vectores es igual al producto escalar de ambos vectores, dividido entre el producto de sus módulos.

Por tanto, el coseno del ángulo determinado por dos vectores tendrá el mismo signo que el producto escalar de ambos vectores, ya que los módulos de los vectores son siempre positivos. En consecuencia, si el producto escalar es positivo, el coseno también será positivo y el ángulo formado por los vectores será agudo (menor de 90º); si el producto escalar es negativo, el coseno también es negativo y el ángulo formado por los dos vectores será obtuso (comprendido entre 90º y 180º).

Si consideramos que (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente, nos queda que:

$$\cos < \vec{u}, \vec{v} >= \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

EJEMPLO.

Calcular el ángulo determinado por los vectores $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ **y** $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$

Tenemos los vectores expresados como combinación lineal de los vectores de la base del sistema de referencia en el que estamos trabajando. Por tanto, las coordenadas de los vectores son $\vec{u}(1,-2,1)$ y $\vec{v}(3,0,2)$ y, en consecuencia:

$$\cos < \vec{u}, \vec{v} >= \frac{1.3 + (-2).0 + 1.2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}.\sqrt{3^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{3+0+2}{\sqrt{6}.\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{6.13}} = \frac{5}{\sqrt{78}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad < \vec{u}, \vec{v} >= \arccos \frac{5}{\sqrt{78}}$$

- ## VECTOR PERPENDICULAR A UN PLANO.

Sea π el plano de ecuación cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$ y $P(x_1, y_1, z_1)$ un punto perteneciente al plano π que, por tanto, verificará la ecuación de dicho plano: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

En consecuencia, tenemos:

$$\pi : \; Ax + By + Cz + D = 0$$
$$P \in \pi : \; Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Restando ambas igualdades, nos queda:

$$A.(x - x_1) + B.(y - y_1) + C.(z - z_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (A, B, C).(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

Esta igualdad expresa que los vectores $\vec{n}(A, B, C)$ y $\overrightarrow{PX}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ son ortogonales.

Como el punto ***X*** es un punto cualquiera (arbitrario) del plano π, entonces el vector $\overrightarrow{PX}$ será un vector arbitrario del plano y el vector $\vec{n}$ será ortogonal a todos los vectores del plano; luego, $\vec{n}$ será ortogonal al plano π.

En consecuencia, los coeficientes de *x*, *y*, *z* en la ecuación general (cartesiana o implícita) del plano nos dan las coordenadas de un vector ortogonal a dicho plano.

Ejemplo:

El vector perpendicular al plano de ecuación $3x - 2y + z = 0$ será el vector $\vec{n}(3,-2,1)$.

EJERCICIOS RESUELTOS

- **Hallar un vector unitario y perpendicular al plano π definido por los puntos *A*(1,2,3), *B*(–1,2,1) y *C*(–3,0,0).**

Los puntos *A*, *B* y *C* determinan dos vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ de coordenadas:

$$\overrightarrow{CA} = (1,2,3) - (-3,0,0) = (4,2,3)$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1,2,1) - (-3,0,0) = (2,2,1)$$

que son linealmente independientes ya que no son proporcionales.

En consecuencia, el plano π que buscamos nos viene determinado por un punto *C* y dos vectores linealmente independientes $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$: $\pi(C;\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ y su ecuación cartesiana nos viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 4 & 2 \\ y & 2 & 2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante nos queda:

$$-4(x+3) + 2y + 4z = 0 \;\Rightarrow\; -4x + 2y + 4z - 12 = 0 \;\Rightarrow\; -2x + y + 2z - 6 = 0$$

que es la ecuación del plano determinado por los puntos *A*, *B* y *C*.

El vector perpendicular a dicho plano será $\vec{n}(-2,1,2)$ y el vector unitario que vamos buscando tendrá que llevar la dirección de $\vec{n}$ para ser perpendicular al plano. Por tanto:

$$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\cdot(-2,1,2) = (-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

es el vector buscado.

- **Hallar la ecuación del plano incidente con el punto *A*(2,1,3) y perpendicular al vector (3,–1,2).**

Como el plano tiene que ser perpendicular al vector, éste será perpendicular al plano y nos dará, por tanto, los coeficientes de x, y, z en la ecuación cartesiana del plano.

En consecuencia, la ecuación del plano pedido será de la forma: $3x - y + 2z + D = 0$

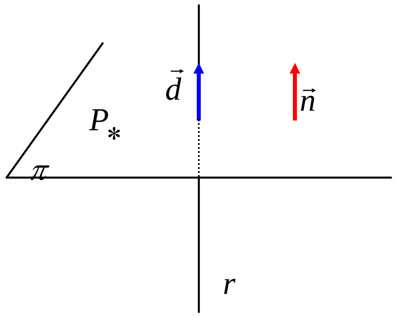
Como dicho plano tiene que ser incidente con el punto A, las coordenadas de A verificarán la ecuación del plano y así podremos calcular el término independiente que nos falta:

$$A \in \pi: \quad 3.2 - 1 + 2.3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 11 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -11$$

y, en consecuencia, la ecuación del plano será:

$$3x - y + 2z - 11 = 0$$

- **Encontrar la ecuación del plano incidente con el punto $P(-3,2,-1)$ y perpendicular a la recta r de ecuación** $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{4}$



Al ser la recta perpendicular al plano, su vector dirección $\vec{d}$ y el vector ortogonal al plano $\vec{n}$ serán paralelos. En consecuencia, podremos utilizar el vector dirección de la recta como ortogonal al plano: $\vec{d} \equiv \vec{n}$

La dirección de la recta es $\vec{d}(2,3,4)$ que será también el vector ortogonal al plano $\vec{n}(2,3,4)$ y, por tanto, la ecuación de éste será:

$$\pi \equiv 2x + 3y + 4z + D = 0$$

Ahora calculamos D con la condición de que sea incidente con el punto P:

$$P \in \pi: \ 2.(-3) + 3.2 + 4.(-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4$$

y, por tanto,

$$\pi \equiv 2x + 3y + 4z + 4 = 0$$

es la ecuación del plano pedido.

- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-2,3)$ y es perpendicular al plano** $\pi \equiv 2x - 3y + 4z - 1 = 0$

Cualquier recta perpendicular al plano tendrá por dirección el vector ortogonal al plano $\vec{n}(2,-3,4) \equiv \vec{d}$ y, como tiene que pasar por el punto $A(1,-2,3)$, la recta pedida, en su forma continua, será:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$$

- **Calcular la ecuación del plano que pasa por $P(2,-1,4)$ y es perpendicular a la recta** $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{1}$

El vector dirección de la recta tiene por coordenadas $\vec{d}(3,4,1) \equiv \vec{n}$ y, por tanto, cualquier plano perpendicular a dicha recta tendrá por ecuación:

$$\pi \equiv 3x + 4y + z + D = 0$$

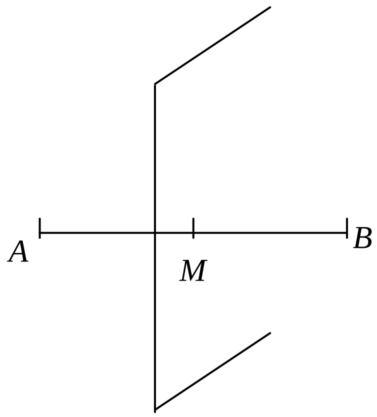
De todos estos planos perpendiculares a la recta sólo nos interesa el que pasa por el punto $P(2,-1,4)$; luego, este punto deberá verificar la ecuación del plano y calculamos D con la condición de que pase por él:

$$P \in \pi : 3.2 + 4.(-1) + 4 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -6$$

En consecuencia, la ecuación del plano pedido será: $3x + 4y + z - 6 = 0$

- **PLANO MEDIADOR DE UN SEGMENTO.**

El plano mediador de un segmento es el plano perpendicular al segmento en su punto medio.



Los pasos a seguir para calcular el plano mediador de un segmento serán:

a) Calcular el punto medio del segmento y el vector determinado por los extremos del segmento, que es perpendicular al plano que buscamos.
b) Obtenemos el plano determinado por el vector calculado en el punto anterior y que pasa por el punto medio del segmento.

EJEMPLO.

- **Hallar el plano mediador del segmento de extremos *A*(1,2,3) y *B*(3,–1,2).**

1. Calculamos el punto medio del segmento:

$$M = PM(A,B) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

2. Vector determinado por los extremos del segmento:

$$\overrightarrow{AB} = (3,-1,2) - (1,2,3) = (2,-3,-1)$$

3. Obtenemos el plano que pasa por M y tiene por vector perpendicular el vector $\overrightarrow{AB}$

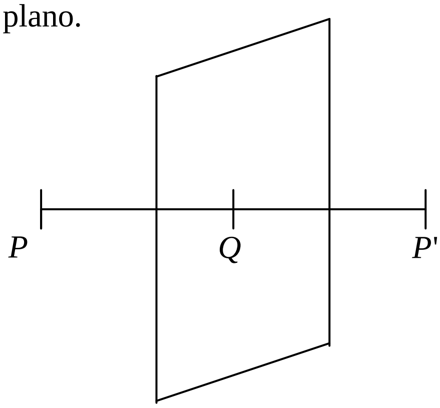
La ecuación del plano sería: $2x - 3y - z + D = 0$ y calculamos D con la condición de que el plano pase por M:

$$2.2-3\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \quad\Rightarrow\quad 4-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \quad\Rightarrow\quad 4-\frac{8}{2}+D=0 \quad\Rightarrow\quad D=0$$

En consecuencia, la ecuación del plano pedido será: $2x-3y-z=0$

- **El problema recíproco a calcular el plano mediador de un segmento lo podríamos plantear de la siguiente forma:**

Conocido uno de los extremos del segmento y plano mediador, se trata de encontrar el otro extremo, dicho de otra forma, se trata de calcular el simétrico de un punto respecto de un plano.



Los puntos *P*, *Q* y *P'* están alineados en la perpendicular al plano que pasa por *P*. Para poder calcular el punto *P'*, simétrico de *P* respecto del plano, necesitamos conocer el punto Q que es punto medio entre *P* y *P'*.

Daremos los siguientes pasos hasta llegar a las coordenadas de *P'*:

1. Calcularemos la recta perpendicular al plano que pasa por *P*.
2. Obtenida esta recta, resolveremos el sistema formado por la ecuación de ella y la ecuación del plano, obteniendo así las coordenadas del punto *Q* (intersección de la recta y el plano).
3. El punto *Q* es punto medio entre *P* y *P*', o también $\overrightarrow{PP'}=2\cdot\overrightarrow{PQ}$. Resolviendo esta última condición obtendremos las coordenadas del punto *P*' buscado.

EJEMPLO.

- **Calcular el punto simétrico de *P*(3,–4,7) respecto del plano** $\pi\equiv 2x-3y+z-11=0$

1. Calculamos la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por *P*.

   El vector $\vec{n}(2,-3,1)$ ortogonal al plano π es el vector dirección de la recta *r* buscada. Este vector con el punto $P(3,-4,7)$ nos determina la recta *r* cuyas ecuaciones en forma paramétrica son:

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-4-3\lambda \\ z=7+\lambda \end{cases}$$

2. Calculamos la intersección de la recta *r* con el plano π para obtener el punto *Q*:

   Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano:

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-4-3\lambda \\ z=7+\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x-3y+z-11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2(3+2\lambda)-3(-4-3\lambda)+(7+\lambda)-11=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 14\lambda+14=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-1$$

Sustituyendo el valor obtenido en las ecuaciones de la recta, obtenemos las coordenadas del punto *Q*, que nos quedan:

$$\left\{ r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-4-3\lambda \\ z=7+\lambda \end{cases} \right\} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=3-2 & \Rightarrow \quad x=1 \\ y=-4+3 & \Rightarrow \quad y=-1 \\ z=7-1 & \Rightarrow \quad z=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(1,-1,6)$$

3. El punto *Q* es punto medio entre *P* y *P*':

Si asignamos a *P*' unas coordenadas genéricas (x',y',z') tendremos:

$$Q = Punto\,Medio(P,P') = \left(\frac{3+x'}{2}, \frac{-4+y'}{2}, \frac{7+z'}{2}\right) = (1,-1,6)$$

Por tanto:

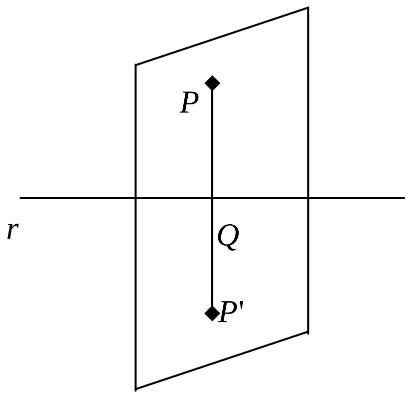
$$\frac{3+x'}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad 3+x'=2 \quad \Rightarrow \quad x'=-1$$

$$\frac{-4+y'}{2}=-1 \quad \Rightarrow \quad -4+y'=-2 \quad \Rightarrow \quad y'=2$$

$$\frac{7+z'}{2}=6 \quad \Rightarrow \quad 7+z'=12 \quad \Rightarrow \quad z'=5$$

En consecuencia, el punto *P*' buscado tiene por coordenadas $P'(-12,5)$.

🗗 **Un problema similar al anterior es el cálculo del simétrico de un punto respecto de una recta: básicamente el problema se resuelve de la misma forma pero cambiando únicamente el primer punto.**



Los puntos *P*, *Q* y *P’* están alineados en el plano perpendicular a la recta que pasa por *P*. Para poder calcular el punto *P’*, simétrico de *P* respecto de la recta, necesitamos conocer el punto Q que es punto medio entre *P* y *P’*.

Daremos los siguientes pasos hasta llegar a las coordenadas de *P’*:

1. Calcularemos el plano perpendicular a la recta que pasa por *P*.
2. Obtenido este plano, resolveremos el sistema formado por la ecuación de la recta y la ecuación del plano, obteniendo así el punto Q (intersección de la recta y el plano).

3. El punto Q es punto medio entre P y P', o también $\overrightarrow{PP'} = 2.\overrightarrow{PQ}$. Resolviendo esta última condición obtendremos las coordenadas del punto P' buscado.

EJEMPLO.

- **Calcular el punto simétrico de $P(5,0,-1)$ respecto de la recta $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$**

Aplicando lo anterior a nuestro problema tenemos:

- Plano perpendicular a la recta r que pasa por P:

El vector dirección de la recta $\vec{d}(1,2,-1) \equiv \vec{n}$ es ortogonal al plano buscado. Por tanto, la ecuación de éste será de la forma: $x + 2y - z + D = 0$ y calculamos D para que dicho plano pase por el punto P (las coordenadas del punto verificarán la ecuación del plano):

$$5 + 2.0 - (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -6$$

y el plano tendrá por ecuación: $x + 2y - z - 6 = 0$.

- Calculamos el punto $Q = r \cap \pi$

Para calcular la intersección de la recta con el plano, pasamos la ecuación de la recta a forma paramétrica:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

resolviendo, posteriormente, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano:

$$\left\{ \begin{array}{l} r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right\} \\ \pi : x + 2y - z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1+\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{6}$$

En consecuencia, las coordenadas del punto Q serán:

$$\left.\begin{array}{lll} x=1+\lambda & \Rightarrow & x=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6} \\ y=2\lambda & \Rightarrow & y=2\cdot\frac{5}{6}=\frac{10}{6} \\ z=-\lambda & \Rightarrow & z=-\frac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Q\left(\frac{11}{6},\frac{10}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

- El punto Q es punto medio entre P y P':

Si asignamos a P' unas coordenadas $(x',`y'z')$ tendremos:

$$Q = PuntoMedio(P,P') = \left(\frac{5+x'}{2},\frac{0+y'}{2},\frac{-1+z'}{2}\right) = \left(\frac{11}{6},\frac{10}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{array}{lllll} \frac{5+x'}{2}=\frac{11}{6} & \Rightarrow & x'=2\cdot\frac{11}{6}-5 & \Rightarrow & x'=-\frac{4}{3} \\ \frac{0+y'}{2}=\frac{10}{6} & \Rightarrow & y'=2\cdot\frac{10}{6} & \Rightarrow & y'=\frac{10}{3} \\ \frac{-1+z'}{2}=-\frac{5}{6} & \Rightarrow & z'=-2\cdot\frac{5}{6}+1 & \Rightarrow & z'=-\frac{2}{3} \end{array}$$

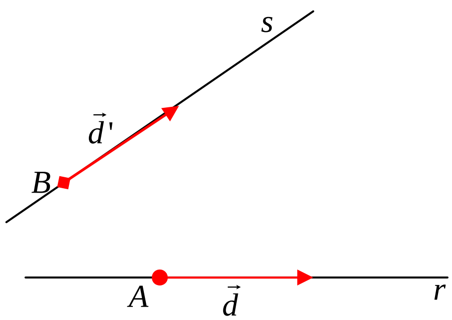
En consecuencia, el punto P' buscado tiene por coordenadas $\left(-\frac{4}{3},\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

- **ÁNGULO FORMADO POR DOS RECTAS.**

El ángulo formado por **dos rectas *r* y *s* que se cortan** es el menor de los ángulos que forman en el plano que determinan.

Si las rectas se cruzan, se define el ángulo como el determinado por dos rectas secantes paralelas a las dadas.

Sean dos rectas dadas por sus determinaciones lineales $r(A,\vec{d})$ y $s(B,\vec{d}\,')$.



Se define el ángulo formado por dos rectas como el ángulo formado por sus vectores de dirección $\vec{d}$ y $\vec{d}\,'$. Por tanto:

$$\cos < r,s >= \cos < \vec{d},\vec{d}\,' >= \frac{\vec{d}\cdot\vec{d}\,'}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{d}\,'\|}$$

Si consideramos que los vectores de dirección de las rectas *r* y *s* tienen por coordenadas $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ y $\vec{d}'(d_1', d_2', d_3')$, el coseno del ángulo formado por las dos rectas será:

$$\cos < r, s >= \frac{d_1 \cdot d_1' + d_2 \cdot d_2' + d_3 \cdot d_3'}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \cdot \sqrt{d_1'^2 + d_1'^2 + d_1'^2}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad < r,s >= arc \cos \frac{d_1 \cdot d_1' + d_2 \cdot d_2' + d_3 \cdot d_3'}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} \cdot \sqrt{d_1'^2 + d_1'^2 + d_1'^2}}$$

EJEMPLO:

- Calcular el ángulo que forman las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Los vectores de dirección de las rectas son $\vec{d}(2,1,1)$ y $\vec{d}'(1,2,-1)$. Por tanto:

$$\cos < r, s >= \cos < \vec{d}, \vec{d}' >= \frac{(2,1,1) \cdot (1,2,-1)}{\|(2,1,1)\| \cdot \|(1,2,-1)\|} = \frac{2.1 + 1.2 + 1.(-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad < \mathrm{r,s} >= \arccos \frac{1}{2} = 60^{\circ}$$

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS.

Dadas las rectas $r(A, \vec{d})$ y $s(B, \vec{d}')$, diremos que son perpendiculares sí, y sólo sí, los vectores $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ son ortogonales.

$$r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{d} \cdot \vec{d}' = 0$$

EJEMPLO.

- Hallar una recta perpendicular a $r \equiv x = 2y = 3z$ que pase por el punto $A(2,1,-1)$.

  La recta dada, en su forma continua, será: $r \equiv x = \frac{y}{1/2} = \frac{z}{1/3}$ con lo que su vector dirección es $\vec{d}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Para calcular la recta perpendicular a ella, consideramos un vector $\vec{d}'$ de forma que sea ortogonal a $\vec{d}$. Vamos a considerar que $\vec{d}' = (-1,2,0)$:

  $\vec{d}$ y $\vec{d}'$ son ortogonales, puesto que $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 1.(-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 = -1 + 1 + 0 = 0$

  Entonces, la ecuación de la recta pedida (en forma paramétrica) será:

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Por tanto, dos rectas son perpendiculares si sus vectores de dirección son ortogonales. Debemos observar que, en ningún momento, se nos impone condición alguna de que las rectas deban cortarse. Si esto ocurriera, el problema planteado y su resolución serían muy diferentes.

El problema a resolver es el siguiente:

- **Dados un punto y una recta, calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y corta perpendicularmente a la primera.**

Podemos resolver este problema de dos formas diferentes:

1. Trazamos el plano perpendicular a la recta dada que pase por el punto *P* dado. Calculado este plano, hallamos el punto de corte del plano y la recta y, finalmente, se calcula la recta que pasa por dos puntos.

2. Calculamos el plano perpendicular a la recta dada que pasa por *P*, igual que en el caso anterior.
   Después calculamos la ecuación del plano que contiene a la recta y pasa por el mismo punto.
   Las ecuaciones de los dos planos calculados forman las ecuaciones implícitas de la recta pedida.

Con este segundo procedimiento obtendríamos las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular a la recta dada.

EJEMPLO.

- **Hallar la ecuación de la recta que pase por *P*(1,–1,3) y corta perpendicularmente a la recta *r*:** $\begin{cases} \mathbf{2x - y + z + 1 = 0} \\ \mathbf{x + y - z + 3 = 0} \end{cases}$

Utilizaremos el primer procedimiento:

a) Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r* ya que nos han dado las ecuaciones cartesianas de la misma.

   Para ello hacemos $z = \lambda$ y las ecuaciones cartesianas nos quedan de la forma:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 - \lambda \\ x + y = -3 + \lambda \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema resultante, obtenemos *x* e *y* en función de λ y con ello las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} \\ y &= -\frac{5}{3} + \lambda \\ z &= \qquad \lambda \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}_r = (0,1,1)$$

b) Obtenidas las ecuaciones paramétricas de la recta, su vector dirección es el vector ortogonal al plano perpendicular a la recta; con esto, el problema quedaría reducido a calcular la ecuación del plano que pasa por un punto $P(1,-1,3)$ y tiene por vector ortogonal $\vec{n}(0,1,1) \equiv \vec{d}_r$.

La ecuación de cualquier plano que tenga a $\vec{n}$ por vector ortogonal será:

$$0.x + 1.y + 1.z + D = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z + D = 0$$

Como tiene que pasar por el punto $P(1,-1,3)$ nos queda:

$$-1 + 3 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2$$

y, por tanto, el plano perpendicular a la recta tiene por ecuación

$$y + z - 2 = 0$$

c) Ahora calculamos la intersección de la recta dada con el plano que hemos calculado. Para ello utilizamos las ecuaciones paramétricas de la recta, sustituyendo en la ecuación del plano

$$(-\frac{5}{3} + \lambda) + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = \frac{5}{3} + 2 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{6}$$

En consecuencia, el punto de intersección de recta y plano será

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} \\ y &= -\frac{5}{3} + \frac{11}{6} = \frac{1}{6} \\ z &= \frac{11}{6} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q(-\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{11}{6})$$

d) Por último, sólo nos queda calcular la recta que pasa por el punto $P(1,-1,3)$ y por el punto $Q(-\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{11}{6})$:

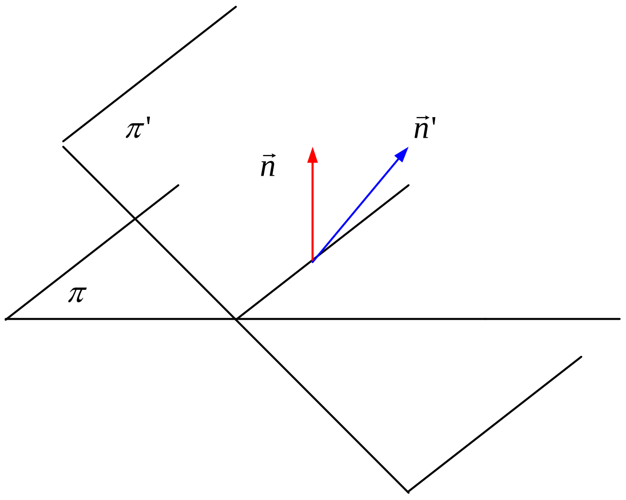
$$\overrightarrow{PQ} = (-\frac{4}{3} - 1, \frac{1}{6} - (-1), \frac{11}{6} - 3) = (-\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{7}{6}) = -\frac{7}{6} \cdot (2,-1,1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \approx (2,-1,1)$$

Por tanto, tenemos que calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-1,3)$ y tiene por vector dirección el vector $\vec{d} = (2,-1,1)$. En su forma continua será:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

que es la ecuación de la recta pedida.

ÁNGULO FORMADO POR DOS PLANOS.



Sean π y π' dos planos cualesquiera del espacio euclídeo tridimensional y sean $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ sus vectores ortogonales asociados.

Se verificará que:

$$<\pi,\pi'>=<\vec{n},\vec{n}'>$$

y, por tanto,

$$\cos<\pi,\pi'>=\cos<\vec{n},\vec{n}'>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n}'\|}$$

Si consideramos que $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen por coordenadas (A,B,C) y (A',B',C') respectivamente, entonces

$$\cos<\pi,\pi'>=\cos<\vec{n},\vec{n}'>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n}'}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n}'\|}=\frac{A.A'+B.B'+C.C'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

EJEMPLO:

- Hallar el ángulo formado por los planos

$$\pi\equiv 2x-3y-z+1=0 \quad \text{y} \quad \pi'\equiv 2x-y+3z-5=0$$

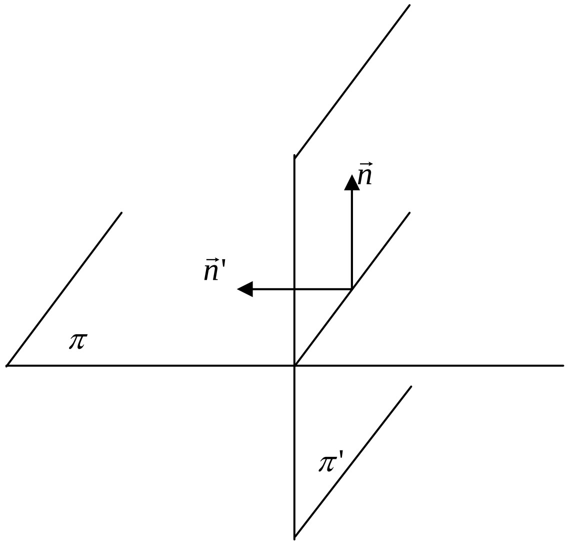
Los vectores ortogonales a los planos dados son: $\vec{n}(2,-3,-1)$ y $\vec{n}'(2,-1,3)$

Por tanto:

$$\cos<\pi,\pi'>=\cos<\vec{n},\vec{n}'>=\frac{\mathbf{2.2+(-3).(-1)+(-1).3}}{\sqrt{\mathbf{2^2+(-3)^2+(-1)^2}}\sqrt{\mathbf{2^2+(-1)^2+3^2}}}=\frac{\mathbf{4+3-3}}{\sqrt{\mathbf{14}}\sqrt{\mathbf{14}}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{14}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad <\pi,\pi'>=\operatorname{arc}\cos\frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad <\pi,\pi'>=\mathbf{73^o\ 23'\ 54''}$$

PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS.



Sean π y π' dos planos cualesquiera del espacio afín-euclídeo tridimensional y sean $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ sus vectores ortogonales asociados.

Diremos que π y π' son ortogonales si, y sólo si, los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ son ortogonales:

$$\pi\perp\pi' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}\cdot\vec{n}'=0$$

- **Ecuación del plano que pasa por una recta (contiene a una recta) dada y es perpendicular a otro plano.**

Dada una recta *r* y un plano π, queremos calcular la ecuación del plano π' que contiene a la recta *r*, siendo perpendicular al plano π.

Por contener a la recta *r*, π' pertenecerá al haz de planos con base dicha recta y su vector asociado será ortogonal al asociado al plano π.

EJEMPLO.

Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta r cuyas ecuaciones cartesianas son $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 3x+2y-z+3=0$

El plano π' pedido pertenecerá al haz determinado por la recta r, cuya ecuación nos vendrá dada por

$$(2x+y-z+2)+\lambda.(x-y+3z+1)=0$$

Ordenando, tendremos:

$$(2+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+3\lambda)z+(2+\lambda)=0$$

y el vector ortogonal asociado será $\vec{n}'(2+\lambda,1-\lambda,-1+3\lambda)$

Por otra parte, el vector perpendicular asociado al plano π es el vector $\vec{n}(3,2,-1)$.

Como el plano que buscamos tiene que ser perpendicular a π, los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ tienen que ser perpendiculares, es decir,

$$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{n}'=0 \quad\Rightarrow\quad (3,2,-1)\cdot(2+\lambda,1-\lambda,-1+3\lambda)=0 \quad\Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\quad 3(2+\lambda)+2(1-\lambda)+(-1).(-1+3\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad 9-2\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{9}{2}}$$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación del haz de planos anterior obtendremos la ecuación del plano pedido:

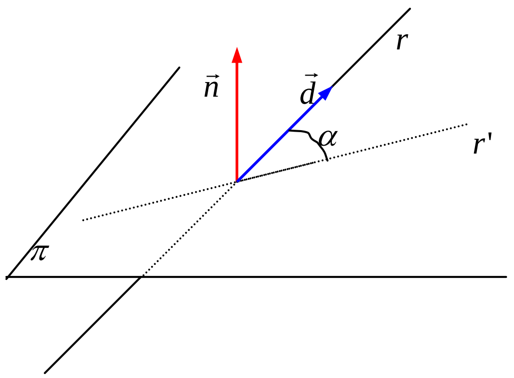
$$\boldsymbol{(2x+y-z+2)+\frac{9}{2}(x-y+3z+1)=0 \;\Rightarrow\; 2(2x+y-z+2)+9(x-y+3z+1)=0 \;\Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\quad 13x-7y+25z+13=0}$$

que es la ecuación del plano pedido.

ÁNGULO FORMADO POR UNA RECTA Y UN PLANO.

Se define el ángulo formado por una recta y un plano como el ángulo formado por dicha recta y la proyección de ella sobre el plano: $\boldsymbol{<r,\pi>=<r,r'>=\alpha}$



Si tenemos en cuenta que los ángulos $< r,\pi >$ y $< \vec{d},\vec{n} >$ son complementarios, tendremos:

$$\text{sen} < r,\pi >= \cos < \vec{d},\vec{n} >$$

donde $\vec{d}$ es el vector dirección de la recta y $\vec{n}$ es el vector ortogonal al plano π.

En consecuencia,

$$\text{sen} < r,\pi >= \cos < \vec{d},\vec{n} >= \frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{n}\|}$$

Si consideramos que $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen por coordenadas (d_1,d_2,d_3) y (A,B,C) respectivamente, obtendremos la siguiente expresión analítica:

$$\text{sen} < r,\pi >= \cos < \vec{d},\vec{n} >= \frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{n}\|} = \frac{A.d_1 + B.d_2 + C.d_3}{\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

EJEMPLO:

- Hallar el ángulo formado por el plano $\pi \equiv x+2y-z-3=0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$$

El vector ortogonal al plano es $\vec{n}(1,2,-1)$ y el vector dirección de la recta es $\vec{d}(2,1,1)$.
Entonces:

$$\text{sen} < r,\pi >= \cos < \vec{d},\vec{n} >= \frac{(2,1,1)\cdot(1,2,-1)}{\|(2,1,1)\|\cdot\|(1,2,-1)\|} = \frac{2.1+1.2+1.(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad < r,\pi >= \text{arcsen}\frac{1}{2} = 30^{\text{o}}$$

CASOS PARTICULARES:

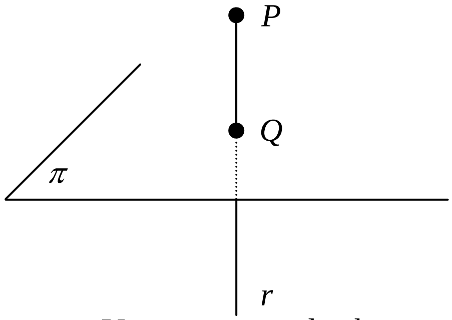
- **PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO.**

Si $r \perp \pi \Rightarrow \vec{d} \,||\, \vec{n} \Rightarrow \vec{d}$ y $\vec{n}$ son linealmente dependientes y, por tanto, proporcionales.

- **PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO.**

Si $r \parallel \pi \quad \Rightarrow \quad \vec{d} \perp \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = 0$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.



Se define la distancia de un punto P a un plano π como la distancia del punto P al punto Q, siendo Q la intersección del plano π con la recta perpendicular a él que pasa por el punto P.

$$d(P,\pi) = d(P,Q)$$

siendo $Q = r \cap \pi$ con $r \perp \pi$

Vamos a tratar de obtener una expresión para calcular la distancia de un punto a un plano basándonos en la propia definición.

Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ y π un plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$. Los pasos a dar para calcular la distancia de un punto a un plano serán los siguientes:

1. Calculamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P dado.

   El vector director de esta recta será el vector ortogonal al plano dado: $\vec{n}(A,B,C) \equiv \vec{d}$

   Las ecuaciones paramétricas de esta recta serán: $r \equiv \begin{cases} x = x_1 + \lambda A \\ y = y_1 + \lambda B \\ z = z_1 + \lambda C \end{cases}$

2. Resolvemos el sistema formado por la ecuación del plano dado y la ecuación de la recta calculada en el punto anterior, obteniendo el punto Q de intersección de ambos.

   Para ello sustituimos los valores de x, y, z de las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano:

   $$A.(x_1 + \lambda A) + B.(y_1 + \lambda B) + C.(z_1 + \lambda C) + D = 0$$

   de donde despejamos λ:

   $$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

   sustituyendo este valor de λ en las ecuaciones paramétricas de la recta, obtendríamos las coordenadas del punto Q.

3. Se calcula la distancia entre P y Q (distancia entre dos puntos):

   El vector determinado por los dos puntos es:

   $$\overrightarrow{PQ} = (x_1 + \lambda A, y_1 + \lambda B, z_1 + \lambda C) - (x_1, y_1, z_1) = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$$

   y como la distancia entre dos puntos es el módulo del vector que determinan, nos queda:

$$d(P,\pi) = d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left|\sqrt{\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2}\right| = \left|\sqrt{\lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2)}\right| = \left|\lambda\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right|$$

Sustituyendo el valor de λ obtenido anteriormente, nos queda:

$$d(P,\pi) = \left|-\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

lo cual nos dice que: **"la distancia de un punto a un plano nos viene dada por el valor absoluto de la ecuación del plano particularizada para las coordenadas del punto dividida por el módulo del vector ortogonal al plano".**

En el caso particular de que el punto *P* sea el origen de coordenadas nos queda:

$$d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

EJEMPLO.

- Calcular la distancia del punto $P(1,-1,-2)$ al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z + 11 = 0$

Para resolver el problema seguiremos los pasos enumerados anteriormente:

1. Recta perpendicular al plano que pase por *P*:

El vector perpendicular al plano será $\vec{n}(3,2,-1)$. Este vector y la recta que buscamos tienen la misma dirección porque son perpendiculares al plano dado. Por tanto, la recta buscada tendrá por dirección el vector $\vec{n}(3,2,-1)$ y pasa por el punto $P(1,-1,-2)$. Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán:

$$r(P,\vec{n}) \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

2. Intersección de la recta con el plano.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la del plano:

$$\left.\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x + 2y - z + 11 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad 3(1 + 3\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) + 11 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 14 + 14\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{14}{14} = -1$$

Por tanto el punto intersección será:

$$\left.\begin{cases} x = 1 + 3.(-1) & \Rightarrow \quad x = -2 \\ y = -1 + 2.(-1) & \Rightarrow \quad y = -3 \\ z = -2 - (-1) & \Rightarrow \quad z = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad Q(-2,-3,-1)$$

3. Distancia entre *P* y *Q*:

Calculamos el vector determinado por los dos puntos:

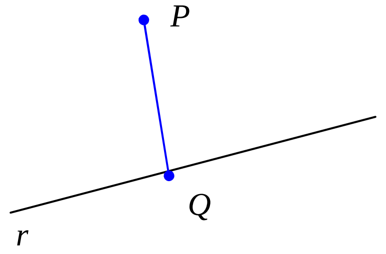
$$\overrightarrow{QP} = (1,-1,-2) - (-2,-3,-1) = (3,2,-1)$$

y, por tanto: $d(P,\pi) = d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

es la distancia pedida.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Se resuelve de forma análoga a la distancia de un punto a un plano:



Trazamos un plano perpendicular a la recta r que pase por P. Dicho plano corta a la recta en un punto Q y $d(P,r) = d(P,Q)$.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Calculamos el plano perpendicular a la recta dada que pase por P.
2. Calculamos el punto Q intersección entre la recta dada y el plano calculado anteriormente.
3. La distancia entre los puntos P y Q será la distancia entre el punto P y la recta dada.

EJEMPLO.

- Calcular la distancia del punto $P(2,3,-1)$ a la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in R$.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Cálculo del plano perpendicular a la recta.

El vector dirección de la recta es $\vec{d}(-3,1,-1)$ y será al mismo tiempo el vector ortogonal al plano. Por tanto, la ecuación cartesiana del plano será:

$$\pi \equiv -3x + y - z + D = 0$$

y como tiene que pasar por el punto $P(2,3,-1)$ se verificará que

$$-3.2 + 3 - (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2$$

En consecuencia, la ecuación del plano π perpendicular a la recta r dada, será:

$$\pi \equiv -3x + y - z + 2 = 0$$

2. Cálculo de la intersección de la recta y el plano:

Resolvemos el sistema formado por la recta y el plano:

$$\left. \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv -3x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \; -3(2-3\lambda) + (5+\lambda) - (-1-\lambda) + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 11\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{11}$$

Sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de la recta, el valor de λ obtenido, nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3.(-\frac{2}{11}) = 2 + \frac{6}{11} = \frac{28}{11} \\ y = 5 + (-\frac{2}{11}) = 5 - \frac{2}{11} = \frac{53}{11} \\ z = -1 - (-\frac{2}{11}) = -1 + \frac{2}{11} = -\frac{9}{11} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{28}{11}, \frac{53}{11}, -\frac{9}{11}\right)$$

Por tanto, el punto intersección entre la recta y el plano tiene por coordenadas $Q\left(\frac{28}{11}, \frac{53}{11}, -\frac{9}{11}\right)$

3. La distancia entre los puntos P y Q será la distancia entre el punto P y la recta r dada.

Calculamos las coordenadas del vector determinado por los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{PQ} = (\frac{28}{11}, \frac{53}{11}, -\frac{9}{11}) - (2,3,-1) = (\frac{28}{11} - 2, \frac{53}{11} - 3, -\frac{9}{11} + 1) = (\frac{6}{11}, \frac{20}{11}, \frac{2}{11})$$

por lo que

$$d(P,r) = d(P,Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{20}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{6^2 + 20^2 + 2^2}{11^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{36 + 400 + 4}}{11} = \frac{\sqrt{440}}{11} = \frac{2\sqrt{110}}{11}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS.

- **Si son paralelas:** basta tomar un punto de una recta y calcular la distancia a la otra.

- **Si se cortan:** la distancia es cero.
- **Si se cruzan**: buscaremos la perpendicular común (*más adelante*) y los puntos de corte con las rectas. La distancia entre ellos nos da la mínima distancia entre las rectas.

DISTANCIA ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO, SIENDO AMBOS PARALELOS

- Se toma un punto se la recta y calculamos la distancia del punto al plano.

DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS.

- Tomamos un punto de uno de los planos y hallamos la distancia al otro plano.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Dados dos vectores $\vec{u},\vec{v}\in V_3$, se define el **PRODUCTO VECTORIAL** $\vec{u}\times\vec{v}$ como otro vector con las siguientes características:

1. Su módulo nos viene dado por: $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \text{sen} < \vec{u},\vec{v} >$
2. Su dirección es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$: $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ y $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$
3. Su sentido nos viene dado por la regla del sacacorchos que gira del primer vector al segundo describiendo el menor ángulo (siguiendo el camino más corto).

- Si alguno de los vectores es nulo, el producto vectorial de ellos es el vector nulo:

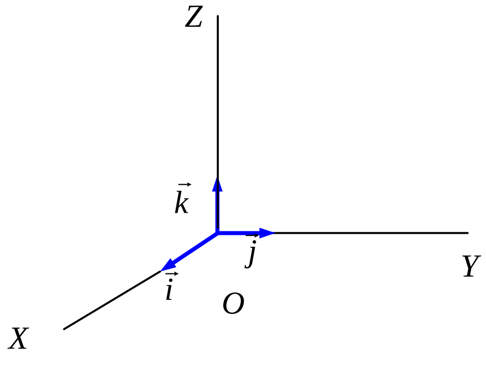
$$\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{v} = \vec{0}$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL.

Sea $R=\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ un sistema de referencia ortonormal de ***E*3**. Para este sistema de referencia tendremos:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$$

puesto que el ángulo formado por un vector consigo mismo es de cero grados y el $\text{sen}\, 0^\circ = 0$.



Los demás productos entre los vectores de la base serán:

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$$

Teniendo en cuenta los productos vectoriales de los vectores de la base del sistema de referencia, veamos como nos queda el producto vectorial de dos vectores cualesquiera.

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen por coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respecto de la base ***B*** del sistema de referencia, se pueden expresar dichos vectores como combinación lineal de los vectores de la base de la siguiente forma:

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \qquad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

En consecuencia, el producto vectorial de los vectores nos quedará:

$$\begin{aligned} \vec{u}\times\vec{v} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1.x_2(\vec{i}\times\vec{i}) + x_1.y_2(\vec{i}\times\vec{j}) + x_1.z_2(\vec{i}\times\vec{k}) + y_1.x_2(\vec{j}\times\vec{i}) + y_1.y_2(\vec{j}\times\vec{j}) + \\ &+ y_1.z_2(\vec{j}\times\vec{k}) + z_1.x_2(\vec{k}\times\vec{i}) + z_1.y_2(\vec{k}\times\vec{j}) + z_1.z_2(\vec{k}\times\vec{k}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los productos vectoriales de los vectores de la base, nos queda:

$$\vec{u}\times\vec{v} = x_1.y_2\vec{k} + x_1.z_2(-\vec{j}) + y_1.x_2(-\vec{k}) + y_1.z_2\vec{i} + z_1.x_2\vec{j} + z_1.y_2(-\vec{i}) =$$

$$= (y_1.z_2 - z_1.y_2)\cdot\vec{i} + (z_1.x_2 - x_1.z_2)\cdot\vec{j} + (x_1.y_2 - y_1.x_2)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} =$$

y, en consecuencia,

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO.

- Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{u}(2,-1,1)$ y $\vec{v}(1,2,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (desarrollando) = -3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

Por tanto, el vector $\vec{u}\times\vec{v} = -3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} \equiv (-3,-1,5)$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL.

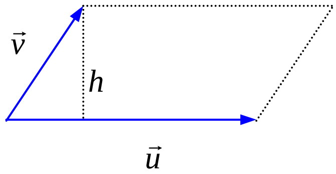
1. **LINEALIDAD:** $\forall \vec{u},\vec{v} \in V_3$ y $\forall k \in R : \begin{cases} (k\cdot\vec{u})\times\vec{v} = k\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \\ \vec{u}\times(k\cdot\vec{v}) = k\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) \end{cases}$

2. $\forall \vec{u},\vec{v} \in V_3 :$ $\vec{v}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{v})$

3. **DISTRIBUTIVA:** $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3 : \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Para todo par de vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, el módulo del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es igual al área del paralelogramo construido sobre esos vectores.



El área del paralelogramo nos viene dada por:

$$\textbf{\textit{Área = Base}} \times \textbf{\textit{Altura}}$$

En nuestro caso, la base del paralelogramo nos viene dada por el módulo del vector $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\|$) y la altura por: $h = \|\vec{v}\| \cdot \text{sen} < \vec{u}, \vec{v} >$

En consecuencia,

$$\textbf{\textit{Área}} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \text{sen} < \vec{u}, \vec{v} > = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

APLICACIONES DEL PRODUCTO VECTORIAL.

1. COORDENADAS DE UN VECTOR PERPENDICULAR A DOS RECTAS *r* Y *s*.

Si $\vec{d}_r$ es el vector de dirección de la recta ***r*** y $\vec{d}_s$ es el vector de dirección de la recta ***s***, el vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$ será un vector perpendicular a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. En consecuencia, el vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$ será perpendicular a ***r*** y a ***s***.

EJEMPLO:

- Si $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{2} = y - 2 = x$

Entonces: $\vec{d}_r(2,3,4)$ y $\vec{d}_s(2,1,1)$ y, por tanto, un vector perpendicular a ***r*** y a ***s*** será:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1,6,-4)$$

COORDENADAS DE UN VECTOR PARALELO A UNA RECTA DADA COMO INTERSECCION DE DOS PLANOS (ECUACIONES CARTESIANAS DE LA RECTA).

Consideremos una recta ***r*** dada por sus ecuaciones cartesianas: las ecuaciones de dos planos π y π'

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Sabemos que $\pi \perp \vec{n}(A,B,C)$ y $\pi' \perp \vec{n}'(A',B',C')$. Por tanto, como ***r*** está contenida tanto en π como en π', también será perpendicular a dichos vectores:

$$r \perp \vec{n} \qquad \text{y} \qquad r \perp \vec{n}'$$

Por otra parte, el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{n}'$ es perpendicular a ambos vectores y, en consecuencia, será paralelo a ***r***, con lo que podremos utilizarlo como su vector dirección.

EJEMPLOS:

- Encontrar el vector dirección de la recta ***r*** dada por $r: \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x \qquad + z + 4 = 0 \end{cases}$

  Los vectores ortogonales a los planos que nos determinan la recta ***r*** son: $\vec{n}(1,-1,1)$ y $\vec{n}'(2,0,1)$. El producto vectorial de estos vectores nos da un vector paralelo a la recta ***r***:

$$\vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n} \times \vec{n} = (-1,1,2)$$

  y podremos considerarlo como dirección de la recta r.

- Hallar las coordenadas de un vector perpendicular a las rectas

$$r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} 2x + y + 3z + 1 = 0 \\ x \qquad + \quad z \quad = 0 \end{cases}$$

  Calculamos los vectores de dirección de las rectas igual que en el ejercicio anterior:

  - Dirección de la recta ***r***: $\vec{n}(1,-1,1)$ y $\vec{n}'(2,1,-1)$

$$\vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{d} \approx \vec{n} \times \vec{n}' = (0,3,3) \cong (0,1,1)$$

  - Dirección de la recta ***s***: $\vec{n}(2,1,3)$ y $\vec{n}'(1,0,1)$

$$\vec{n} \times \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{d}' \approx \vec{n} \times \vec{n}' = (1,1,-1)$$

  En consecuencia, el vector perpendicular a dichas rectas será

$$\vec{d}\times\vec{d}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\qquad\Rightarrow\qquad \vec{d}\times\vec{d}'=(-2,1,-1)$$

- Hallar las coordenadas de un vector paralelo a los planos de ecuaciones

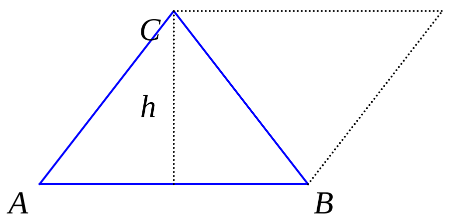
$$x+z=0 \qquad \text{y} \qquad 2x-y+z-3=0$$

Los dos planos determinan una recta ***r*** cuyas ecuaciones cartesianas o implícitas son las ecuaciones de los mismos planos y, además, dicha recta está contenida en ambos planos. Calculando las coordenadas de un vector paralelo a la recta, tendremos las coordenadas del vector pedido. Por tanto:

$$\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\qquad\Rightarrow\qquad \vec{n}\times\vec{n}'=(1,1,-1)$$

<u>ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES</u>.

Sea el triángulo de vértices $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ y $C(x_3,y_3,z_3)$. Estos tres puntos determinan dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



El área del triángulo nos viene dada por:

$$Area(\Delta ABC)=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura$$

La base del triángulo es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, y la altura nos viene dada por

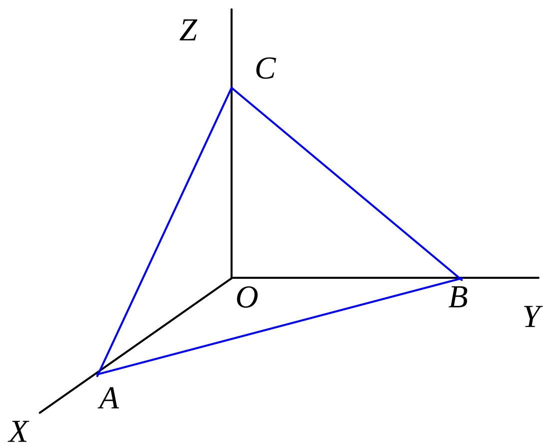
$$h=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot \text{sen} <\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>$$

Entonces:

$$Area(\Delta ABC)=\frac{1}{2}\cdot base\cdot altura=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\text{sen}<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$$

<u>EJEMPLO.</u>

- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $2x+y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas.



1. Calculamos los puntos de intersección del plano con los ejes:

   Eje OX: sus ecuaciones cartesianas son $\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$.

   Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, nos queda:

   $$2x-6=0 \qquad\Rightarrow\qquad x=3$$

   y el punto de intersección tiene por coordenadas $A(3,0,0)$.

Eje OY: sus ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ y sustituyendo en la ecuación del plano nos queda $y-6=0 \quad \Rightarrow \quad y=6$. Por tanto, las coordenadas de B son (0,6,0).

Eje OZ: sus ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. De forma análoga a las anteriores obtenemos: $3z-6=0 \quad \Rightarrow \quad z=2$ y el tercer vértice del triángulo será $C(0,0,2)$.

3. Teniendo ya los vértices del triángulo, podemos calcular su área:

$$\overrightarrow{AB} = (0,6,0)-(3,0,0) = (-3,6,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,0,2)-(3,0,0) = (-3,0,2)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{i}+6\vec{j}+18\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (12,6,18)$$

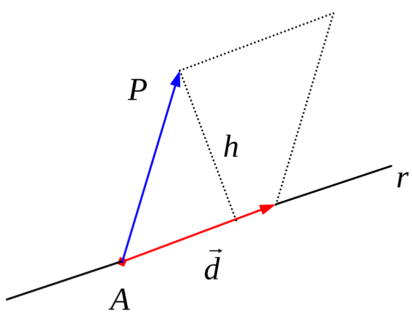
Por tanto,

$$Area(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+6^2+18^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2.6)^2+6^2+(3.6)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2^2+1^2+3^2} = 3\sqrt{14}$$

Con el producto vectorial de dos vectores, podemos calcular de otra forma la

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Consideremos la recta ***r*** determinada por el punto ***A*** y el vector $\vec{d}$. Queremos calcular la distancia del punto ***P*** a la recta ***r***.



Con el vector $\vec{d}$ dirección de la recta y el vector $\overrightarrow{AP}$ determinado por los puntos A y P, podemos formar un paralelogramo cuya base es $\left\|\vec{d}\right\|$ y su altura h es la $d(P,r)$.

Teniendo en cuenta que el área del paralelogramo es igual a base por altura y también, teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto vectorial de vectores, es

vectorial de los dos vectores que lo forman, obtenemos:

$$Area = \left\|\vec{d}\times\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\vec{d}\right\|\cdot d(P,r) \qquad \Rightarrow \qquad d(P,r) = \frac{\left\|\vec{d}\times\overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\vec{d}\right\|}$$

EJEMPLO.

- Calcular la distancia del punto $P(2,3,-1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Un punto de la recta es $A(2,5,-1)$ y su vector dirección es $\vec{d}(-3,1,-1)$.
El vector determinado por los puntos A y P tiene por coordenadas

$$\overrightarrow{AP} = (2,3,-1) - (2,5,-1) = (0,-2,0)$$

El producto vectorial de $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{d}$ será:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{k} \cong (2,0,-6)$$

y su módulo $\left\| \overrightarrow{AP} \times \vec{d} \right\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

Por otra parte: $\left\| \vec{d} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

y, en consecuencia: $d(P,r) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AP} \times \vec{d} \right\|}{\left\| \vec{d} \right\|} = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{11}}$ u.l.

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES.

Sean tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ no nulos. Se define el **PRODUCTO MIXTO** de tres vectores no nulos como el producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos. Se representa por $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y el resultado es un número real:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Si alguno de los vectores es nulo, el producto mixto es igual a cero.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO MIXTO.

Sea $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortogonal de $\boldsymbol{V_3}$ y consideremos que las coordenadas de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respecto de dicha base sean (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) respectivamente.

Aplicando las expresiones analíticas de los productos escalar y vectorial, obtendremos la siguiente expresión para el producto mixto:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=$$

$$=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\cdot\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\cdot\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

lo cual nos dice que ***"el producto mixto de tres vectores nos viene dado por el determinante formado por las coordenadas de los mismos".***

PROPIEDADES.

1. $\forall\, \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$ se verifica que:
   $\{\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\,\}=-\{\,\vec{u},\vec{w},\vec{v}\,\}=\{\,\vec{w},\vec{u},\vec{v}\,\}=-\{\,\vec{w},\vec{v},\vec{u}\,\}=\{\,\vec{v},\vec{w},\vec{u}\,\}=-\{\,\vec{v},\vec{u},\vec{w}\,\}$

2. $\{a\cdot\vec{u},b\cdot\vec{v},c\cdot\vec{w}\}=a.b.c.\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

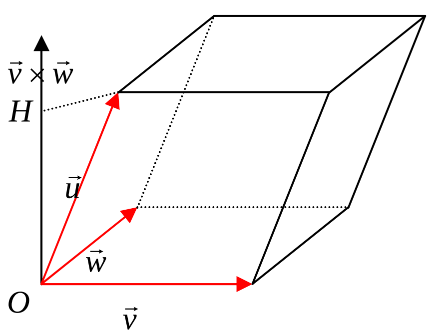
3. $\{\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}+\{\vec{u}',\vec{v},\vec{w}\}$

4. $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}=0$ si, y sólo sí, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son coplanarios (linealmente dependientes) o alguno de los vectores es nulo.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO MIXTO DE VECTORES.

Consideremos tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$. El valor absoluto del producto mixto de ellos será:

$$\left|\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\right|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\times\vec{w}\|\cdot\cos<\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}>$$



$\|\vec{v}\times\vec{w}\|$ es el área de la base del paralelepípedo construido sobre los tres vectores y $\|\vec{u}\|\cdot\cos<\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}>=\overline{OH}=h$ es la altura del mismo.

Entonces:

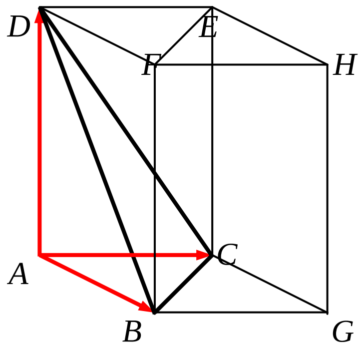
$$\left|\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\right|=\text{(área de la base)}\times\text{(altura)}=\text{ Volumen del paralelepípedo}$$

En consecuencia, ***el valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los tres vectores.***

APLICACIONES DEL PRODUCTO MIXTO.

VOLUMEN DE UN TETRAEDRO

Sea el tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D*. Estos cuatro puntos determinan tres vectores



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sobre los cuales podemos construir un paralelepípedo y descomponerlo en dos prismas triangulares iguales de vértices ***ABCDEF*** y ***BCEHFG*** respectivamente.

Cada uno de estos prismas se puede considerar formado por tres tetraedros todos ellos de igual volumen.

Para el primero de los prismas, los tetraedros serían: ***ABCD***, ***DCEF*** y ***DCFB***. En consecuencia, el paralelepípedo construido sobre los tres vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ estaría formado por seis tetraedros y teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto mixto nos quedará:

$$6 \cdot V_{tetraedro} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} \quad \Rightarrow \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$$

EJEMPLO.

- Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $A(3,5,7)$, $B(1,0,-1)$, $C(7,-1,4)$ y $D(11,4,-6)$.

  Puesto que las coordenadas de *B* son más cómodas de utilizar que las de los otros puntos, consideramos *B* como origen y formamos los vectores:

$$\overrightarrow{BA} = (3,5,7) - (1,0,-1) = (2,5,8)$$
$$\overrightarrow{BC} = (7,-1,4) - (1,0,-1) = (6,-1,5)$$
$$\overrightarrow{BD} = (11,4,-6) - (1,0,-1) = (10,4,-5)$$

En consecuencia,

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & -1 & 5 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10 + 250 + 192 - (-80) - 40 - (-150)}{6} = \frac{642}{6} = 107 \text{ u.l.}$$

PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Se llama **PERPENDICULAR COMÚN** a dos rectas que se cruzan a la recta que corta perpendicularmente a cada una de ellas.

Consideremos las rectas $r(A,\vec{d})$ y $s(B,\vec{d}\,')$. Sabemos que el vector $\vec{d}\times\vec{d}\,'$ es perpendicular a $\vec{d}$ y a $\vec{d}\,'$ y, por tanto, perpendicular a las rectas r y s.

En consecuencia, la perpendicular común a ellas llevará la dirección del vector $\vec{d}\times\vec{d}\,'$. Cómo para tener determinada la recta nos faltaría conocer un punto de la misma, nos resulta más fácil y cómodo obtener la recta perpendicular común mediante sus ecuaciones cartesianas de la siguiente forma:

a. Calculamos el plano que contiene a la recta r y al vector $\vec{d}\times\vec{d}\,'$; es decir, calculamos el plano determinado por el punto A, el vector $\vec{d}$ y el vector $\vec{d}\times\vec{d}\,'$:

$$\pi(A;\vec{d},\vec{d}\times\vec{d}\,')$$

b. Calculamos un segundo plano que contiene a la recta s y al vector $\vec{d}\times\vec{d}\,'$:

$$\pi'(B;\vec{d}\,',\vec{d}\times\vec{d}\,')$$

La intersección de estos dos planos calculados π y π' es una recta que tiene por dirección la común a ambos planos: $\vec{d}\times\vec{d}\,'$

MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Se define la distancia entre dos rectas que se cruzan como la mínima distancia entre los puntos de las rectas, es decir, es la distancia de un punto de ellas al plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera. También podemos definirla como la distancia entre los puntos de intersección de las rectas con la perpendicular común.

Estas definiciones nos están dando algunos procedimientos para calcular la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan. Sin embargo, la forma más rápida de calcular la mínima distancia es la siguiente:

La altura del paralelepípedo construido con los dos vectores de dirección de las rectas y un tercer vector que une dos puntos A y B de las rectas r y s, es precisamente la mínima distancia entre las dos rectas:

$$Volumen_{paralelepípedo} = Area_{base}\times altura$$

$$\{\vec{d},\vec{d}\,',\overrightarrow{AB}\} = \left\|\vec{d}\times\vec{d}\,'\right\|\cdot d(r,s) \qquad \Rightarrow \qquad d(r,s) = \frac{\{\vec{d},\vec{d}\,',\overrightarrow{AB}\}}{\left\|\vec{d}\times\vec{d}\,'\right\|}$$

EJEMPLO.

- Hallar la perpendicular común y la mínima distancia entre las rectas:

$$r \equiv x = y-1 = z \qquad s \equiv x = y = 3z-1$$

La recta r está determinada por el punto $A(0,1,0)$ y su vector dirección $\vec{d}_r\,(1,1,1)$.

Para determinar la recta s hacemos $z=\lambda$ con lo que sus ecuaciones paramétricas serían:

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \qquad \lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B(-1,-1,0) \\ \vec{d}_s\,(3,3,1) \end{cases}$$

Obtenidos los elementos que determinan las dos rectas estudiamos la posición relativa de las mismas. Para ello, calculamos el determinante formado por los vectores $\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,0) - (0,1,0) = (-1,-2,0)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) + (-6) + 0 - 0 - (-3) - (-2) = -2 \neq 0$$

En consecuencia, al ser el determinante distinto de cero, los tres vectores son linealmente independientes y las dos rectas se cruzan.

Vamos a calcular la perpendicular común a ambas rectas y para ello:

- Hallamos el producto vectorial $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-2,2,0)$$

- Plano que contiene a la recta *r* y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\pi(r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -2x - 2(y-1) + 4z = 0 \;\Rightarrow\; x + y - 2z - 1 = 0$$

- Plano que contiene a la recta *s* y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$:

$$\pi'(s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 3 & -2 \\ y+1 & 3 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -2(x+1) - 2(y+1) + 12z = 0 \;\Rightarrow\; x + y - 6z + 2 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas, en su forma cartesiana, nos viene dada por las ecuaciones de los planos calculados:

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Mínima distancia entre las rectas:

Tenemos: $r: \begin{cases} A(0,1,0) \\ \vec{d}_r\,(1,1,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} B(-1,-1,0) \\ \vec{d}_s\,(3,3,1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (-1,-2,0) \approx (1,2,0)$

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-2,2,0) \qquad\qquad \{\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AB}\} = 2$$

y, en consecuencia:

$$d(r,s)=\frac{\{\vec{d}_r,\vec{d}_s.\overrightarrow{AB}\}}{\left\|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right\|}=\frac{2}{\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{2.4}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ u.l.}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Hallar los planos que contienen a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y=0\\x+z=0\end{cases}$ **y forman un ángulo de 60º con el plano** $\pi\equiv x+y+z=0$.

La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r nos viene dada por la ecuación del haz: $(x+y)+k.(x+z)=0 \Rightarrow (1+k).x+y+kz=0$ y su vector ortogonal nos vendrá dado por $\vec{n}'(1+k,1,k)$.

El vector ortogonal al plano π es $\vec{n}(1,1,1)$.

El ángulo formado por los dos planos es igual que el ángulo formado por sus vectores ortogonales. Entonces:

$$\cos<\pi,\pi'>=\cos<\vec{n},\vec{n}'>=\frac{1+k+1+k}{\sqrt{(1+k)^2+1^2+k^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2+2k}{\sqrt{2+2k+2k^2}\sqrt{3}}$$

Como el ángulo que tienen que formar los dos planos es de 60º tendremos:

$$\frac{2+2k}{\sqrt{2+2k+2k^2}\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

Resolviendo la ecuación resultante, obtenemos:

$$\frac{2+2k}{\sqrt{2+2k+2k^2}\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4(1+k)=\sqrt{2+2k+2k^2}\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^2(1+k)^2=\left(\sqrt{2+2k+2k^2}\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow 16(1+2k+k^2)=3(2+2k+2k^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5k^2+13k+5=0\Rightarrow k=\frac{-13\pm\sqrt{169-100}}{10}=\frac{-13\pm\sqrt{69}}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{-13+\sqrt{69}}{10}\cong-0.47\\[2ex]k=\dfrac{-13-\sqrt{69}}{10}\cong-2.13\end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del haz de planos, nos queda:

$$Si\ \ k=-0.47\Rightarrow 0.53x+y-0.47z=0$$
$$Si\ \ k=-2.13\Rightarrow -1.13x+y-2.13z=0$$

que son las ecuaciones de los planos pedidos.

2. **Hallar la ecuación del plano paralelo a $x + 2y - z + 1 = 0$ y que diste $\sqrt{6}$ del origen.**

La ecuación de cualquier plano paralelo al dado será de la forma:

$$x + 2y - z + D = 0$$

Como la distancia del origen a estos planos tiene que ser $\sqrt{6}$, nos quedará:

$$\boldsymbol{d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} \Rightarrow |D| = \left(\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \quad |D| = 6 \quad \Rightarrow \quad D = \begin{cases} 6 \\ -6 \end{cases}}$$

En consecuencia, los planos buscados tienen por ecuación:

$$x + 2y - z + 6 = 0 \qquad\qquad x + 2y - z - 6 = 0$$

3. Dada la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{-2}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z + 3 = 0$.

Encontrar la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π. Determinar el ángulo que forman *r* y π.

- La proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π estará contenida en el plano π, luego la ecuación de este plano será una ecuación cartesiana de la recta pedida.

  La otra ecuación cartesiana será la ecuación de un plano que contenga a la recta *r* y sea perpendicular al plano π. Este plano nos vendrá determinado por el punto base de la recta *r*, su vector dirección y el vector ortogonal al plano π.

  Entonces:

$$\pi' \equiv \left\{ \begin{array}{l} r: \begin{cases} A(1,2,0) \\ \vec{d}(1,-2,-2) \end{cases} \\ \vec{n}(1,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6(x-1) - 3(y-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1) + (y-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 4 = 0$$

  Por tanto, las ecuaciones cartesianas de la recta proyección de *r* sobre el plano π serán:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x + y \qquad - 4 = 0 \end{cases}$$

- Ángulo formado por la recta *r* y el plano π:

$$\boldsymbol{sen < r,\pi > = \frac{\vec{d}_r \cdot \vec{n}}{\|\vec{d}_r\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{(1,-2,-2)\cdot(1,-2,1)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+4+1}} = \frac{1+4-2}{\sqrt{9}\sqrt{6}} = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \quad < r,\pi > = arcsen\frac{1}{\sqrt{6}} = 24^{o}\ 5'\ 41''}$$

4. a) ¿Qué relación debe existir entre α y β para que los vectores

$$\vec{u}_1 = (\alpha \quad -3 \quad 1) \qquad \vec{u}_2 = (3 \quad \beta \quad 5) \qquad \vec{u}_3 = (1 \quad -4 \quad 3)$$

sean linealmente independientes?

b) Determinar, si es posible, un vector no nulo $\vec{v}$ que sea perpendicular a $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ y, además, sea paralelo a $\vec{u}_3$.

Consideremos la matriz *A* formada por los tres vectores dados $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 1 \\ 3 & \beta & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que los tres vectores sean linealmente independientes, el rango de la matriz *A* debe de ser tres. Por tanto, si queremos que el rango de *A* sea tres, su determinante debe ser distinto de cero.

Vamos a calcular el determinante de *A* y hacerlo distinto de cero para que los vectores sean linealmente independientes:

$$|A| = 3\alpha\beta - 15 - 12 - \beta + 20\alpha + 27 = 3\alpha\beta - \beta + 20\alpha = \beta(3\alpha - 1) + 20\alpha$$

Hacemos el determinante de *A* distinto de cero y despejamos β en función de α, obteniendo de esta forma la relación pedida para que los vectores sean independientes:

$$\beta(3\alpha - 1) + 20\alpha \neq 0 \;\Rightarrow\; \beta \neq -\frac{20\alpha}{3\alpha - 1} \neq \frac{20\alpha}{1 - 3\alpha}$$

En consecuencia, para que los tres vectores sean linealmente independientes, se tiene que verificar que

$$\beta \neq \frac{20\alpha}{1 - 3\alpha}$$

b) Consideremos el vector $\vec{v}(x, y, z)$

$$Si \quad \vec{v} \perp \vec{u}_1 \;\Rightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha x - 3y + z = 0$$

$$Si \quad \vec{v} \perp \vec{u}_2 \;\Rightarrow\; \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0 \;\Rightarrow\; 3x + \beta y + 5z = 0$$

$$Si \quad \vec{v} \parallel \vec{u}_3 \;\Rightarrow\; \vec{v} = k \cdot \vec{u}_3 \;\Rightarrow\; \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k$$

Resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \quad k \\ y = -4k \\ z = 3k \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha k - 3(-4k) + 3k = 0 \\ 3k + \beta(-4k) + 5 \cdot 3k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \cdot k + 15k = 0 \\ 18k - 4k\beta = 0 \end{array}\right.$$

Como el vector $\vec{v}$ que buscamos es distinto de cero, obligatoriamente *k* tiene que ser también distinto de cero. Dividiendo ambas ecuaciones por *k*, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 15 = 0 \\ 18 - 4\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -15 \\ \beta = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

En consecuencia, sólo podremos encontrar el vector $\vec{v}$ en las condiciones que nos piden para los valores de $\alpha = -15$ y $\beta = \frac{9}{2}$. Este vector $\vec{v}$ podría ser el mismo vector $\vec{u}_3$ o cualquier otro proporcional a él.

5. **(1) Dados los planos de ecuaciones respectivas $x = 0$ e $y = 0$, hallar la ecuación del plano π que contiene al punto *P*(1,2,3) y a la recta común a los planos dados.**
(2) Determinar la recta que pasa por el punto *P* y corta perpendicularmente a la recta dada por las ecuaciones $x = 3$ e $y = 3$.

Las ecuaciones de los planos dados serán las ecuaciones cartesianas de la recta común a ambos. La ecuación de cualquier plano que contenga a dicha recta nos viene dada por la ecuación del haz:

$$x + \lambda y = 0$$

Como el plano que nos interesa es el que contiene al punto P(1,2,3), las coordenadas de éste tendrán que verificar la ecuación del haz: $1 + 2\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}$

Sustituyendo este valor en la ecuación del haz y operando, obtendremos el plano pedido:

$$x - \frac{1}{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 0$$

(2) Determinar la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta dada por las ecuaciones x = 3 e y = 3.

<u>Primer método:</u>

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada serán $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ y, por tanto el punto de corte *Q* con la recta pedida tendrá unas coordenadas de la forma *Q*(3,3,λ). Los puntos *P* y *Q* determinan la recta pedida que tendrá una dirección

$$\overrightarrow{PQ} = (3,3,\lambda) - (1,2,3) = (2,1,\lambda - 3)$$

que debe ser perpendicular a la dirección de la recta dada $\vec{d}(0,0,1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d} = 0 \;\Rightarrow\; (2,1,\lambda - 3)\cdot(0,0,1) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3$$

En consecuencia, el punto de corte de ambas rectas será el punto *Q*(3,3,3) y la recta pedida tendrá por ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{0}$.

<u>Segundo método:</u>

Calculamos un plano que contenga a la recta dada y pase por *P*. Para ello operamos como en el apartado (1) tomando la ecuación del haz de planos que contiene a la recta dada:

$$(x-3) + \lambda(y-3) = 0$$

quedándonos con el que pasa por *P*(1,2,3):

$$(1-3) + \lambda(2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

y sustituyendo en la ecuación del haz, obtenemos:

$$(x-3)-2(y-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x-2y+3=0$$

Por otra parte, calculamos la ecuación de un plano perpendicular a la recta dada que pase por P:

Como el vector dirección de la recta es $\vec{d}(0,0,1)$, la ecuación de cualquier plano perpendicular a ella será de la forma:

$$0.x+0.y+1.z+k=0 \quad \Rightarrow \quad z+k=0$$

Como tiene que pasar por $P(1,2,3)$, éste debe de verificar dicha ecuación: $3+k=0 \Rightarrow k=-3$. La ecuación del plano buscado será $z-3=0$.

Por tanto, la recta pedida dada por sus ecuaciones cartesianas será:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ z-3=0 \end{cases}$$

6. Dado un punto arbitrario P de $\mathbb{R}^3$, sea Q el punto del plano $2x-2y-z=0$ que está más cerca de P. Construye una matriz A tal que si las coordenadas del punto $P=(a,b,c)$ se escriben en un vector columna $v=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces las coordenadas de Q son las componentes del vector $A\cdot v$.

El punto del plano dado más cercano al punto P será el pie de la perpendicular a dicho plano que pase por P. Para calcular el pie de la perpendicular calcularemos la recta perpendicular al plano que pasa por P y, después, buscaremos la intersección de la recta calculada con el plano dado.

La recta perpendicular al plano dado tendrá por dirección la misma que la del vector ortogonal al plano; por tanto, como el vector ortogonal al plano tiene por coordenadas $(2,-2,-1)$, la ecuación de la recta en su forma paramétrica será:

$$r: \begin{cases} x=a+2\lambda \\ y=b-2\lambda \\ z=c-\lambda \end{cases}$$

Para buscar las coordenadas del punto Q, calculamos la intersección de la recta y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} \begin{cases} x=a+2\lambda \\ y=b-2\lambda \\ z=c-\lambda \end{cases} \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2(a+2\lambda)-2(b-2\lambda)-(c-\lambda)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (2a-2b-c)+\lambda(4+4+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{2a-2b-c}{9}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la recta obtenemos las coordenadas del punto Q

$$\begin{cases} x = a + 2(-\dfrac{2a-2b-c}{9}) = \dfrac{9a-4a+4b+2c}{9} = \dfrac{5a+4b+2c}{9} \\ y = b + 2\cdot\dfrac{2a-2b-c}{9} = \dfrac{9b+4a-4b-2c}{9} = \dfrac{4a+5b-2c}{9} \\ z = c + \dfrac{2a-2b-c}{9} = \dfrac{9c+2a-2b-c}{9} = \dfrac{2a-2b+8c}{9} \end{cases}$$

Teniendo las coordenadas de Q vamos a tratar de buscar la matriz A que verifica que las coordenadas de Q son las componentes de Av. Tendremos

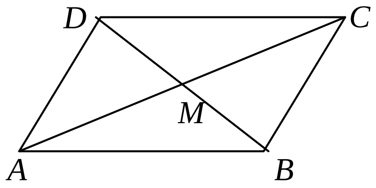
$$A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5a+4b+2c \\ 4a+5b-2c \\ 2a-2b+8c \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$A = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

7. De un paralelogramo *ABCD* se conocen el centro *M*(2,1,2) y dos vértices consecutivos A(1,2,5) y *B*(0,1,4). Determina:
(1) Las coordenadas de los otros dos vértices *C* y *D*.
(2) El área del paralelogramo.
(3) La ecuación del plano Π que lo contiene.
(4) La ecuación del plano que es perpendicular a Π y contiene a la diagonal *AC*.

(1) Si tenemos en cuenta que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, tendremos que:



Vértice C: $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AM}$

Vértice D: $\overrightarrow{BD} = 2.\overrightarrow{BM}$

Si consideramos que las coordenadas de C son (x_1, y_1, z_1) y las de D son (x_2, y_2, z_2), entonces:

$$\overrightarrow{AM} = (2,1,2) - (1,2,5) = (1,-1,-3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_1 - 1, y_1 - 2, z_1 - 5) = 2.(1,-1,-3) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1 - 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 3 \\ y_1 - 2 = -2 \Rightarrow y_1 = 0 \\ z_1 - 5 = -6 \Rightarrow z_1 = -1 \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{BM} = (2,1,2) - (0,1,4) = (2,0,-2)$$

$$\overrightarrow{BD} = (x_2, y_2 - 1, z_2 - 4) = 2.(2,0,-2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 \\ y_2 - 1 = 0 \Rightarrow y_2 = 1 \\ z_2 - 4 = -4 \Rightarrow z_2 = 0 \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas de C son $(3,0,-1)$ y las de $D(4,1,0)$.

(2) Teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto vectorial, el módulo de éste es igual al área del paralelogramo construido con base los dos factores, vamos a calcular primero los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,4) - (1,2,5) = (-1,-1,-1)$$
$$\overrightarrow{AD} = (4,1,0) - (1,2,5) = (3,-1,-5)$$

El producto vectorial de ellos será

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} \approx (4,-8,4)$$

y su módulo:

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 64 + 16} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6} \text{ u.s.}$$

(3) Teniendo en cuenta que el vector producto vectorial es ortogonal al plano determinado por los vectores, el vector $(4,-8,4) \approx (1,-2,1)$ es un vector ortogonal al plano determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ y, en consecuencia, la ecuación del plano nos vendrá dada por $x - 2y + z + k = 0$

y como tiene que pasar por cualquiera de los cuatro puntos que determinan el paralelogramo, las coordenadas de éstos tendrán que verificar su ecuación:

$$A \in \Pi \;\Rightarrow\; 1 - 2 \cdot 2 + 5 + k = 0 \;\Rightarrow\; 2 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = -2$$

Por tanto, la ecuación del plano que contiene al paralelogramo será:

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

(4) El plano perpendicular a Π que contiene a la diagonal $\overline{AC}$ nos vendrá determinado por el punto A y los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{n}$, siendo $\vec{n}$ el vector ortogonal al plano. La ecuación de este plano nos vendrá dada por:

$$\Pi'(A, \overrightarrow{AC}, \vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -2 & -1 \\ z-5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 7.(x-1) + 4.(y-2) + 1.(z-5) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 7x + 4y + z - 20 = 0$$

8. **¿Existe alguna recta cuyas proyecciones ortogonales sobre los planos coordenados son, respectivamente,**

$4x = 1$ sobre XOY, $3x - z = 1$ sobre XOZ, $3y - 5z = 2$ sobre YOZ?

Si existe, determinarla. Si no existe, explica por qué.

Para calcular la proyección de una recta sobre un plano, el método más fácil es encontrar sus ecuaciones cartesianas (recta dada como intersección de dos planos): uno de ellos es el plano sobre el que proyectamos y el segundo es un plano perpendicular al primero que contiene a la recta que proyectamos.

En nuestro problema, las rectas proyección sobre cada uno de los planos cartesianos nos vienen dadas por sus ecuaciones cartesianas:

$$\left.\begin{aligned} 4x &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3x - z &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 3y - 5z &= 2 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Podemos comprobar fácilmente que los planos que determinan cada una de las rectas proyección son ortogonales entre sí. Para comprobar si existe una recta cuyas proyecciones sean las dadas, los planos perpendiculares a los planos cartesianos tendrían que tener una recta en común (la que estaríamos proyectando).

Veamos si es cierto: para ello estudiamos la posición relativa de los planos a ver si tienen una recta en común, resolviendo el sistema formado por los tres planos

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 4x & & & = & 1 \\ 3x & - & z & = & 1 \\ & 3y - & 5z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Tomamos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema y estudiamos sus rangos:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Si tenemos en cuenta que $|M| = 12 \quad \Rightarrow \quad r(M) = 3$ y $r(M^*) = 3$, entonces el sistema es compatible y determinado: los tres planos se cortan en un punto y no en una recta.

Por tanto, no existe ninguna recta cuyas proyecciones sobre los ejes son las rectas dadas.

9. **Hallar de forma razonada un punto *P* del plano determinado por los puntos *A*(2,0,0), *B*(0,4,0) y *C*(0,0,6) que esté a igual distancia de los tres (*P* se llama circuncentro del triángulo cuyos vértices son *A, B* y *C*).**

La ecuación del plano determinado por los tres puntos será (en su forma segmentaria):

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad 6x + 3y + 2z = 12$$

El punto P que se nos pide equidista de los vértices del triángulo, luego se encontrará en los planos mediadores de cada uno de los lados del triángulo.

- Plano mediador del segmento $\overline{AB}$:

  Punto medio del segmento: $M = (1,2,0)$

  Vector determinado por los puntos: $\overrightarrow{AB} = (0,4,0) - (2,0,0) = (-2,4,0) \approx (-1,2,0)$

  Plano mediador:

  $$-x + 2y + D = 0$$

  Como tiene que pasar por M: $-1 + 2.2 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -3$

  $$\Rightarrow \; -x + 2y - 3 = 0$$

4. Hallar el punto simétrico del punto $P(2,0,1)$ respecto de la recta $r: x-1 = y = z+1$

5. Hallar el punto simétrico del punto $P(2,3,1)$ respecto del plano $\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$.

6. Hallar el área del triángulo de vértices $A(1,3,0)$, $B(4,2,1)$ y $C(0,-3,2)$.

7. Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x + \ \ y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z \quad\ \ = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\alpha \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$. Obtener también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y α.

8. Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al $5x + y + 4z = 0$ y pasa por los puntos $A(3,1,2)$ y $B(3,4,4)$.

9. Hallar la ecuación del plano paralelo a $x + 2y - z + 1 = 0$ y que diste $\sqrt{6}$ del origen.

10. Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano de ecuación $x + 2y + 2z - 4 = 0$ con los ejes coordenados.

10. Hallar la distancia entre los planos:

$$x + y + z - 3 = 0$$
$$3x + 3y + 3z - 5 = 0$$

11. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a $r: \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 2y + 3 \end{cases}$ y $s: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

12. Estudiar la posición relativa entre las rectas

$$r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3\mu \\ y = \quad\ \ 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

y, en el caso de que se crucen, calcular la perpendicular común y la mínima distancia entre ellas.