FUNCIONES CONOCIDAS.

▪ FUNCIONES LINEALES.

Se llaman funciones lineales a aquellas que se representan mediante rectas. Su expresión en forma explícita es $y = f(x) = ax + b$.

En sentido más estricto, se llaman funciones lineales sólo a las funciones que se representan mediante rectas que pasan por el origen de coordenadas y su forma explícita será $y = ax$.

Las de la forma $y = ax + b$ recibirían el nombre de funciones afines.

Nosotros seguiremos llamando funciones lineales a las primeras, dejando para las del tipo $y = ax$ el nombre de funciones de proporcionalidad ya que $\frac{y}{x} = a$, es decir, la relación entre la imagen y el original es constante.

El dominio y el recorrido de cualquier función lineal es el conjunto de números reales:

$$Dom(f) = \mathbb{R} \qquad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

La gran importancia de las funciones lineales nos viene dada por la gran cantidad de aplicaciones de ella:

- ★ El alargamiento de un muelle es proporcional al peso que colguemos: $A = k.p$
- ★ La relación entre la dilatación y la temperatura de un cuerpo.
- ★ Dosis de un medicamento-peso del enfermo.

▪ FUNCIONES CUADRÁTICAS (PARÁBOLAS).

Son funciones en las que la imagen nos viene dada mediante un polinomio de segundo grado: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ y su gráfica es una parábola.

El dominio de la función cuadrática es el conjunto de números reales.

Partiendo de la gráfica de la función cuadrática más elemental $\left(y = x^2\right)$ el efecto de cada uno de los coeficientes es el siguiente:

- ▫ El coeficiente "*a*" de x^2 determina que la curva sea más o menos estirada y su signo, que la parábola tenga las ramas hacia arriba (*a* positivo) o hacia abajo (*a* negativo).

  Si $a > 1$, las ramas se cierran respecto de $y = x^2$. __

  Si $0 < a < 1$, las ramas se abren respecto de $y = x^2$.

- ▫ El coeficiente *c* hace que la curva suba o baje.
- ▫ El coeficiente *b*" desplaza la gráfica hacia la derecha (*b* negativo) o hacia la izquierda (*b* positivo).
- ▫ El vértice de la parábola lo podemos calcular fácilmente mediante derivación, resolviendo la ecuación $y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$.

- **FUNCIONES POLINÓMICAS (de grado superior a dos).**

Están definidas de la forma: $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$

Todas ellas tienen en común las siguientes características:

- Su dominio es el conjunto de números reales y son continuas en él.
- No tienen asíntotas, es decir: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ según sea el coeficiente del término de mayor grado y la paridad de éste.
- Los puntos de corte con el eje OX (ceros de la función) los obtenemos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
- Los puntos críticos los obtenemos de la siguiente manera:

  * $f'(x) = 0 \Rightarrow$ máximos y mínimos relativos.

  * $f''(x) = 0 \Rightarrow$ puntos de inflexión.

  Una vez que hayamos obtenido las abscisas de los puntos críticos, sustituimos en la función para calcular las ordenadas correspondientes y poder representarlos.

- **FUNCIONES RACIONALES.**

Son funciones definidas mediante el cociente de dos funciones polinómicas: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

El dominio de una función racional del tipo $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, es $\mathbb{R}$ menos los puntos que anulan el denominador, ya que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ tienen existencia para cualquier valor real pero al dividirlos encontramos el inconveniente de no poder dividir por cero. En consecuencia, los valores de x que anulen el denominador no tendrán imagen y no pertenecerán al dominio de la función.

$$Dom(f) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) = 0 \}$$

- **FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA**

Hay multitud de fenómenos que ligan dos variables cuya relación es de proporcionalidad inversa (una es inversa de la otra) como sucede con la presión y el volumen a temperatura constante, con la frecuencia de un sonido y su longitud de onda.

Veamos como está definida la función de proporcionalidad inversa y cual es su gráfica.

Se llama función de proporcionalidad inversa a la función definida de la forma:

$$y = f(x) = \frac{k}{x} = k \cdot \frac{1}{x}$$

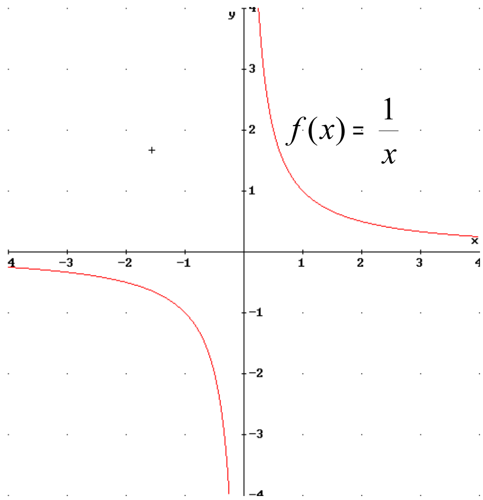
Si tratamos de calcular su gráfica, podemos observar que la función $\dfrac{1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$ y además

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Estudiando el comportamiento de la función en los extremos de la recta real, tenemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

En consecuencia, la gráfica será tangente a la recta $y = 0$ (eje OX) en el infinito (+ o –). Este tipo de rectas reciben el nombre de **asíntotas** (las estudiaremos posteriormente) y como es paralela al eje OX se denominan **horizontales**. Con ello la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ será de la forma:

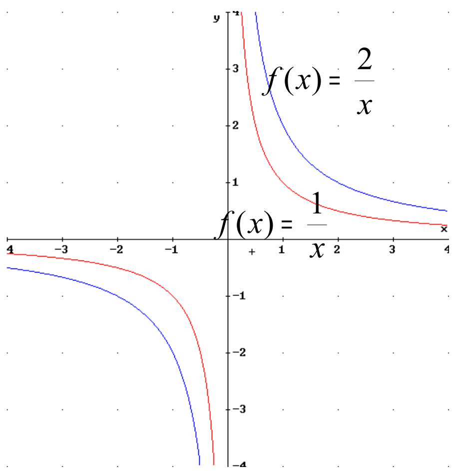


Esta gráfica recibe el nombre de **HIPÉRBOLA.**

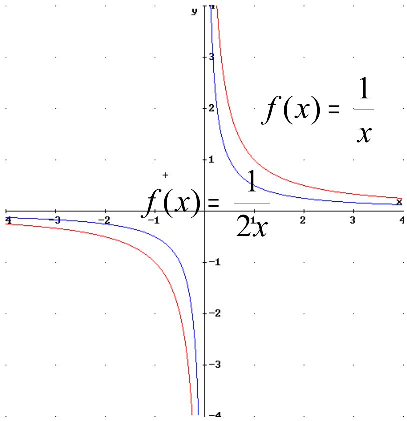
Si queremos representar $f(x) = \frac{k}{x}$, las características que hemos estudiado son las mismas; únicamente debemos tener en cuenta lo siguiente:

Si $k > 0$ podemos establecer:

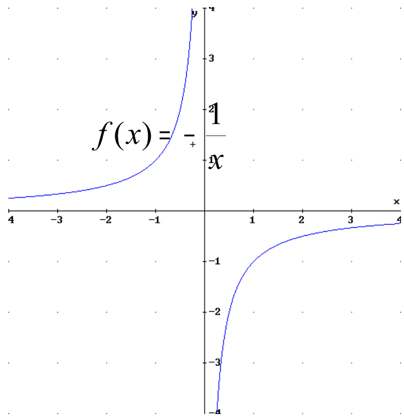
- $k > 1 \Rightarrow$ la gráfica se aleja del origen de coordenadas. Por ejemplo, si $k = 2$, la función nos queda $f(x) = \frac{2}{x}$ y su gráfica sería



- $0 < k < 1 \Rightarrow$ la gráfica se aproxima al origen de coordenadas. Por ejemplo, si $k = 1/2$, la función nos queda $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ y su gráfica sería



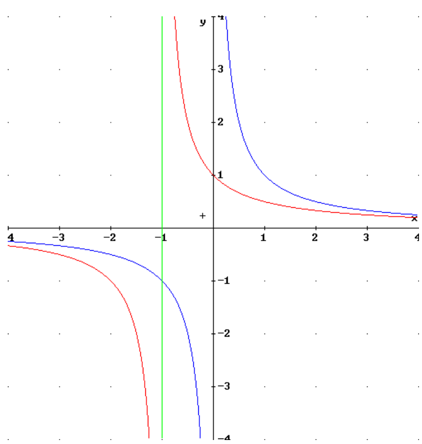
Si $k < 0$, los límites cambian de signo y obtenemos la función opuesta de la anterior:

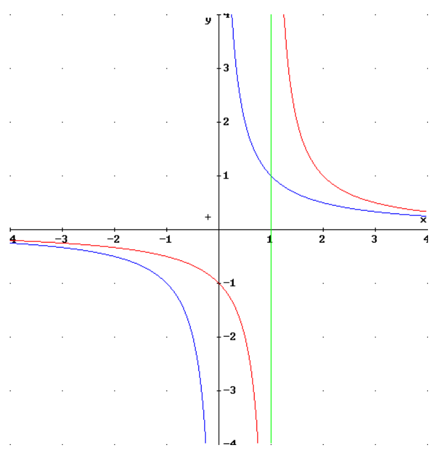


Podemos observar que las funciones de proporcionalidad inversa son funciones impares o simétricas respecto del origen.

Otras funciones relacionadas con la función de proporcionalidad inversa son:

- $f(x) = \dfrac{k}{x \pm r} \Rightarrow$ el $\pm r$ desplaza la gráfica de la función $\dfrac{k}{x}$ hacia la izquierda ($+r$) o hacia la derecha ($-r$). Por ejemplo, las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ serían:



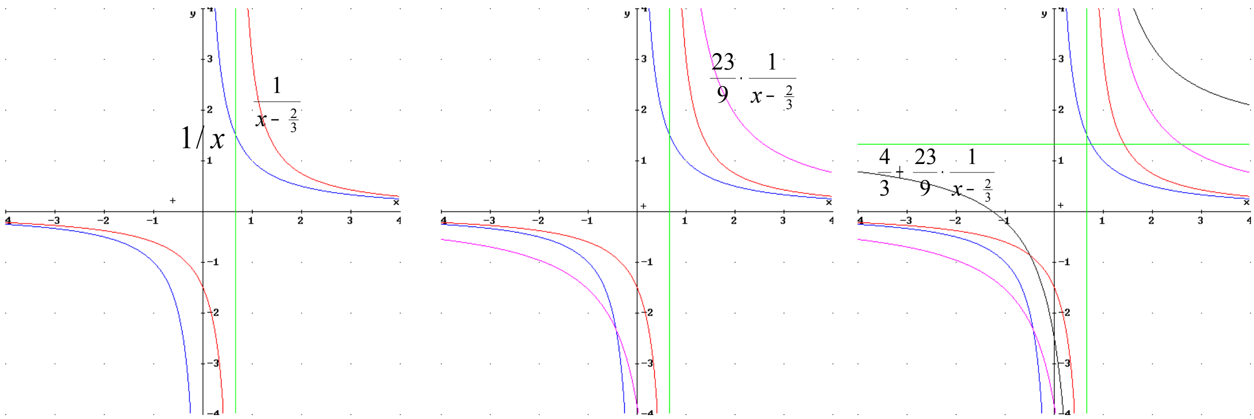


- $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\Rightarrow$ las funciones de este tipo se pueden convertir, efectuando la división, en $f(x)=p+\dfrac{q}{x\pm r}$: $\dfrac{q}{x\pm r}$ es del tipo anterior y "p" sube o baja la gráfica de la función según sea positivo o negativo.

- Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{4x+5}{3x-2}$ se puede expresar de la forma :

$$f(x)=\frac{4x+5}{3x-2}=\frac{4}{3}+\frac{\frac{23}{3}}{3x-2}=\frac{4}{3}+\frac{\frac{23}{9}}{x-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}+\frac{23}{9}\cdot\frac{1}{x-\frac{2}{3}}$$

Entonces, la gráfica de *f* partiendo de $\dfrac{1}{x}$:



Las gráficas de estas funciones también son **HIPÉRBOLAS**.

- **FUNCIONES RADICALES.**

Son funciones donde la variable se encuentra bajo el signo radical (dentro de una raíz).

El dominio de estas funciones dependerá del índice de dicha raíz:

- Si el índice es par, el dominio es el conjunto de puntos que hace el radicando positivo.
- Si el índice es impar, el dominio de nuestra función será el mismo de la función que tengamos en el radicando.

- **FUNCIÓN EXPONENCIAL.**

Definimos la función exponencial en base $a>0$ y $a\neq 0$ como una función real de variable real tal que a cada $x\in\mathbb{R}$ le hacemos corresponder otro número real dado por a^x, es decir:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{\exp_a} & \mathbb{R}_+^* \\ x\in\mathbb{R} & \longrightarrow & y=a^x\end{array}$$

Propiedades:

- El dominio de la función exponencial es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}_+^*$

- Es continua en todo su dominio.
- Se verifica que $f(0) = 1$ y $f(1) = a$ para cualquier $a > 0$.
- Si $a > 1$, f es estrictamente creciente.

  Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente.

  Esto nos indica que la función exponencial es inyectiva, cualquiera que sea la base.
- Si $a > 1$, se verifica que:

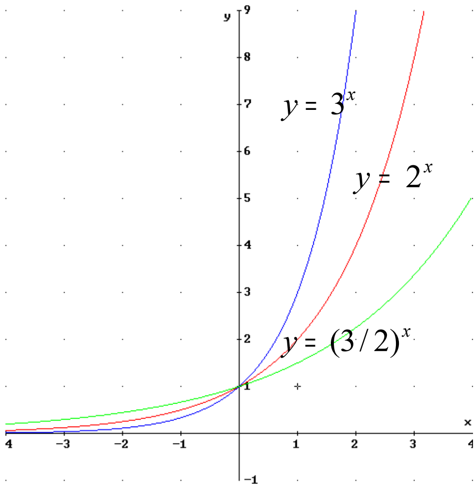
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$$

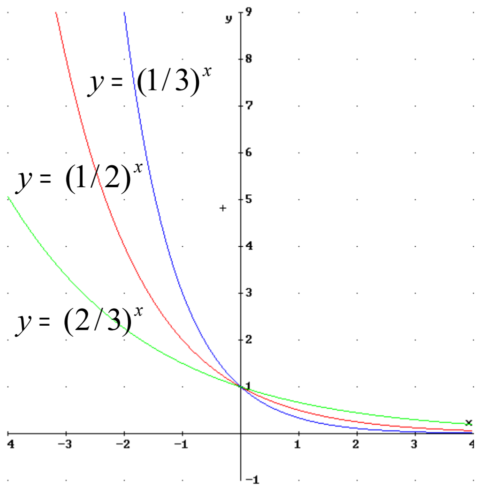
- Si $a < 1$, se verifica que:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

- Si $a = 1$, tenemos $f(x) = 1^x = 1$: nos queda la función unidad (constante).
- Su gráfica nos quedaría de la forma:

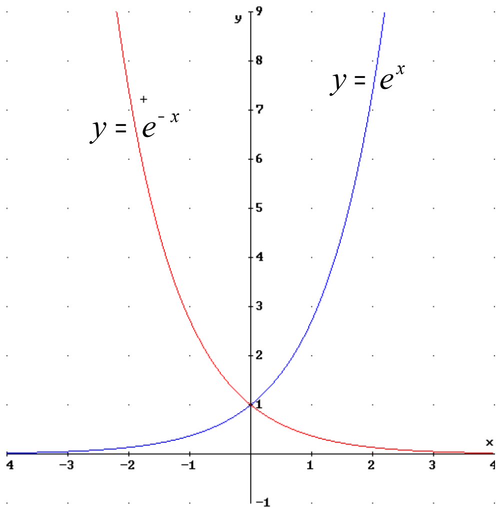
  Si $a > 1$ Si $0 < a < 1$





- Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $f(x) = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

  Si dibujáramos las gráficas de dos funciones exponenciales cuyas bases sean inversas obtendríamos



- **FUNCIONES CIRCULARES.**

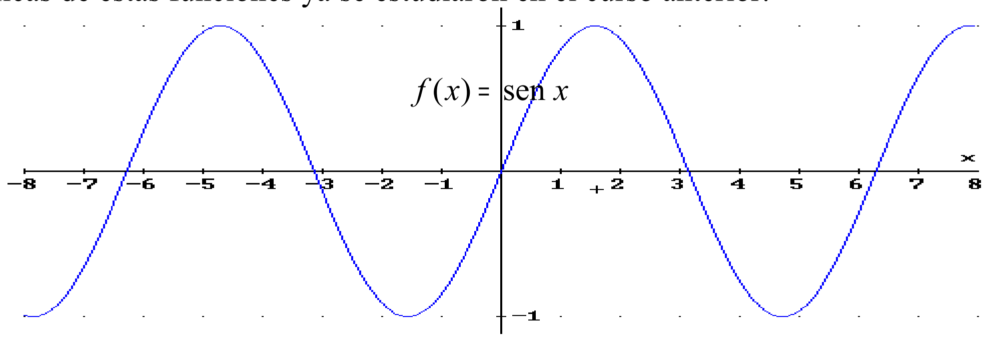
Son funciones que están definidas mediante las razones trigonométricas de los ángulos:

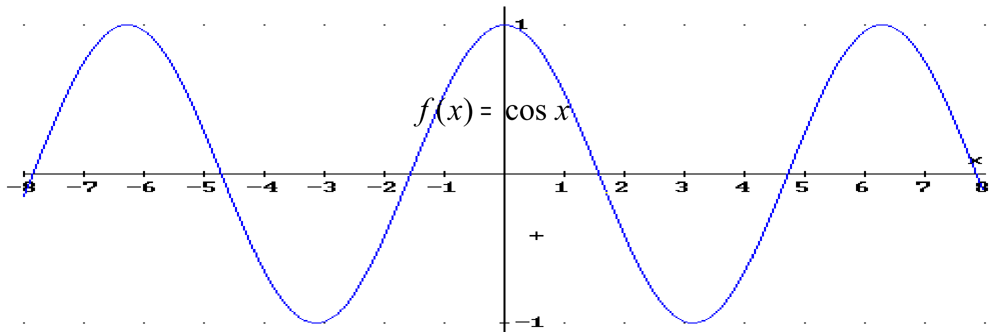
$$f(x) = \text{sen } x \quad \Rightarrow \quad \text{función seno}$$

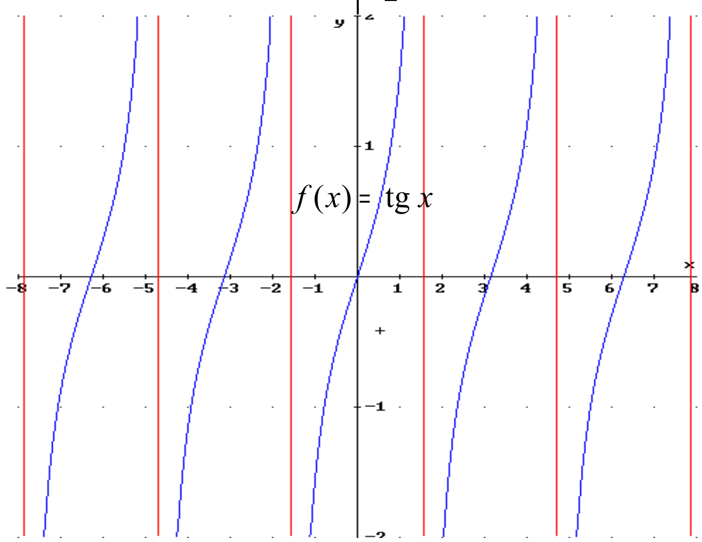
$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \text{función coseno}$$

$$f(x) = \text{tg } x \quad \Rightarrow \quad \text{función tangente}$$

Son funciones periódicas de período $T = 2\pi$ salvo las funciones tangente y cotangente que tienen de período π. Son continuas y derivables en todo su dominio.
Las gráficas de estas funciones ya se estudiaron en el curso anterior:







Podríamos generalizar estas funciones a

$$f(x) = \text{sen }(ax + b)$$

$$f(x) = \cos (ax + b)$$

teniendo ellas las siguientes características:

- Están definidas y son continuas en $\mathbb{R}$.
- Su recorrido es el intervalo cerrado $[-1,1]$, por lo que están acotadas.
- Su período es $T = \dfrac{2\pi}{a}$: el efecto que produce el coeficiente a es el de comprimir o estirar la gráfica de dichas funciones.
- El coeficiente b desplaza la gráfica a izquierda o derecha.

▪ FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Son funciones en las que en cada tramo (intervalo) están definidas mediante una función cualquiera.

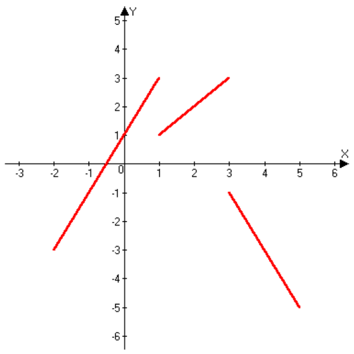
Para definir este tipo de funciones es imprescindible indicar el tramo o intervalo que corresponde a cada función.

Para representar gráficamente las funciones definidas a trozos, tendremos que representar en cada trozo la función mediante la que esté definida.

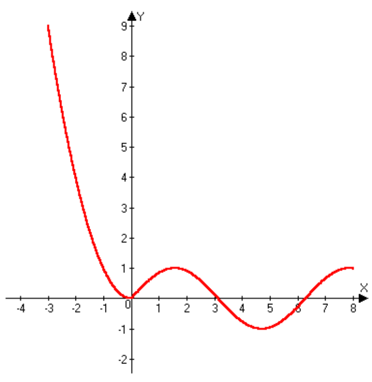
Ejemplos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad -2 \le x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 3-2x & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$

Su dominio será el intervalo cerrado $[-2,5]$ y su gráfica sería



b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y su gráfica:



Veamos algunas funciones conocidas definidas a trozos:

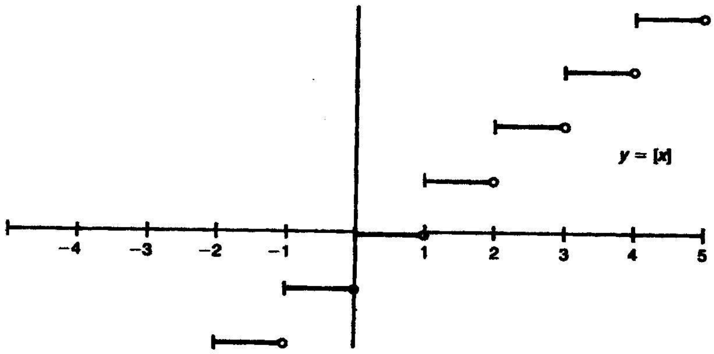
- **Función PARTE ENTERA de un número.**

Es una función entera de variable real definida de la siguiente forma:

$$y = f(x) = Ent(x) = [x]$$

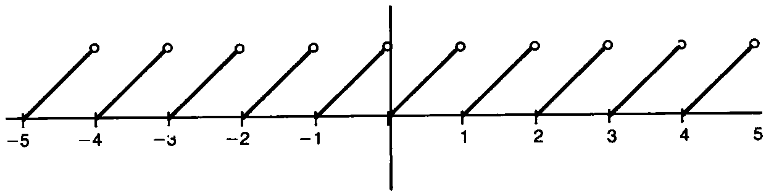
parte entera de un número real *x* es el mayor entero menor o igual que *x*.

Su gráfica, teniendo en cuenta la definición, es la siguiente:



- **Función PARTE DECIMAL o MANTISA.**

Está definida por $y = f(x) = Dec(x) = Mant(x) = x - [x]$
Su gráfica nos viene dada por:



Como podemos observar en la gráfica, se trata de una función periódica, de período T=1. Esta función parte decimal nos da la distancia de un número al entero más próximo.

- **Función VALOR ABSOLUTO.**

El valor absoluto de un número real se define como el máximo entre dicho número y su opuesto:

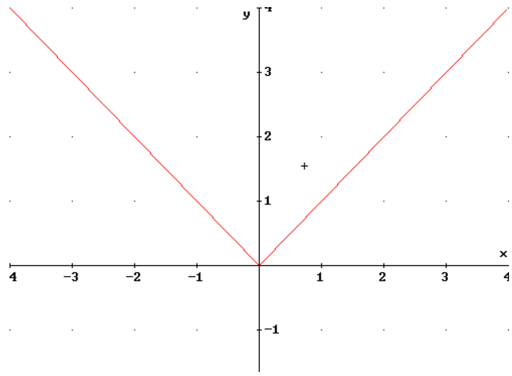
$$|x| = \text{máx}\{x, -x\}$$

De esta manera el valor absoluto de un número siempre será positivo: si el número es negativo, su valor absoluto es igual a su opuesto y si es positivo, el valor absoluto coincide con el propio número.

La función **valor absoluto** es una función real de variable real en la que a cada número le hacemos corresponder su valor absoluto. Nos queda definida de la siguiente forma:

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica será:

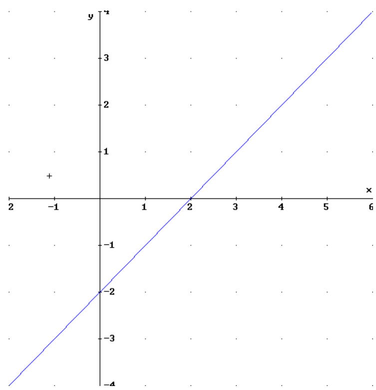


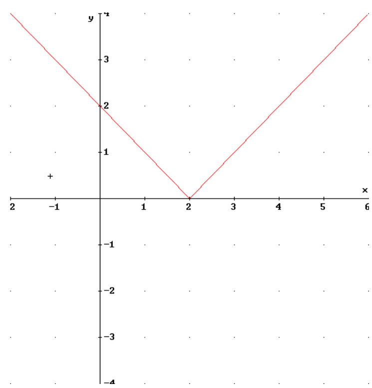
La gráfica de una función $y = |f(x)|$ es fácil de construir si conocemos la gráfica de la función $y = f(x)$, pues bastaría considerar la función opuesta donde $f(x)$ fuese negativa.

Para obtener la expresión analítica de $y = |f(x)|$ debemos conocer las abscisas de los puntos en donde $f(x)$ cambia de signo, es decir, donde $f(x) = 0$.

Ejemplo:

- $y = f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -(x-2) & si \quad x - 2 < 0 \\ x - 2 & si \quad x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$





- $y = f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

  ya que la función $x^2 - 1$ se anula en los puntos -1 y 1 siendo negativa en los valores comprendidos entre ellos.
  Gráficamente: