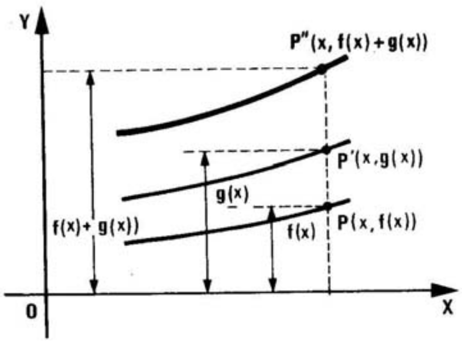
OPERACIONES CON FUNCIONES.

Sean f y g dos funciones reales de variable real, cuyos dominios nos vengan dados por: $Dom(f) = D_1$ y $Dom(g) = D_2$.

➜ SUMA DE FUNCIONES: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ **(La imagen mediante la función suma es igual a la suma de las imágenes)**

El dominio de la función suma será la intersección de los dominios ya que para tener definida la función suma en un punto, éste debe pertenecer a los dominios de las dos funciones para asegurarnos de la existencia de *f*(*x*) y de *g*(*x*):



$$Dom(f + g) = D_1 \cap D_2$$

Conocidas las gráficas de las funciones f y g, para hallar la gráfica de $f + g$ basta sumar en cada punto del dominio de definición de $f + g$ los valores de $f(x)$ y de $g(x)$.

Esta suma, así definida, verifica las siguientes propiedades:

a. Asociativa: $(f + g) + h = f + (g + h)$

b. Conmutativa: $f + g = g + f$

c. Elemento neutro o nulo: **función cero** $0(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d. Elemento simétrico u opuesto: **Función opuesta** $(-f)(x) = -f(x)$

Con todo esto, el conjunto de funciones reales de variable real con la operación suma tiene estructura de **Grupo conmutativo**.

La existencia de elemento opuesto respecto de la suma de funciones nos permite definir la

DIFERENCIA DE FUNCIONES: se suma a la función minuendo la opuesta de la función sustraendo

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

➜ PRODUCTO: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ **(la imagen mediante la función producto es igual al producto de las imágenes).**

El dominio de la función producto será la intersección de los dominios ya que para tener definida la función producto en un punto, éste debe pertenecer a los dominios de las dos funciones para asegurarnos de la existencia de *f*(*x*) y de *g*(*x*): $Dom(f \cdot g) = D_1 \cap D_2$

Propiedades:

a. Asociativa: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

b. Conmutativa: $f \cdot g = g \cdot f$

c. Elemento neutro. Función unidad: $g(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d. Elemento inverso. Función inversa (no existe en general)

Este elemento inverso, de existir, debe verificar que $f \cdot g = 1$. Si esta relación fuese cierta, tendríamos:

$$(f \cdot g)(x) = 1(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \forall x \in D$$

Estas relaciones serán ciertas si $f(x) \neq 0$, cosa que no tiene por qué suceder.

- Si $f(x) = 0$ en algún punto del dominio, no existirá la función *g*.
- Si $f(x) \neq 0$ en todos los puntos del dominio, existe la función *g*.

En este segundo caso, la función *g* recibe el nombre de función inversa de *f* y se designa por $\dfrac{1}{f}$.

Función inversa: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

En la práctica, cuando se escribe $\dfrac{1}{f}$, se trata de una función definida en el conjunto de puntos donde no se anula *f*. Este conjunto recibe el nombre de **dominio de inversión de *f*.**

Si tenemos en cuenta esta función inversa, en el dominio de inversión del denominador, es posible definir el cociente de dos funciones de la siguiente manera:

COCIENTE: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \left(f \cdot \dfrac{1}{g}\right)(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Las operaciones suma y producto se relacionan mediante la propiedad Distributiva:

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$$

En consecuencia, con todo lo anterior, el conjunto de funciones reales de variable real con las operaciones suma y producto tiene estructura de Anillo conmutativo y unitario.

➜ MULTIPLICACIÓN POR UN NÚMERO REAL: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

Teniendo en cuenta la definición se verifica que $Dom(k \cdot f) = Dom(f)$.

Propiedades:

a. $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$

b. $(a + b) \cdot f = a \cdot f + b \cdot f$

c. $a \cdot (b \cdot f) = (a \cdot b \cdot f$

d. $1 \cdot f = f$

Con ello, el conjunto de funciones reales de variable real con las operaciones suma y producto por un número real verificando las propiedades enumeradas anteriormente tiene estructura de **Espacio vectorial real.**

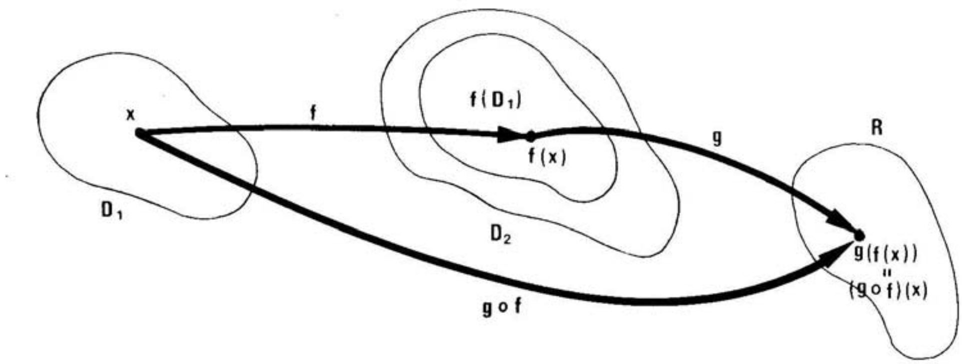
➜ COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

Sean $f : D_1 \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \to \mathbb{R}$ dos funciones con $f(D_1) \subset D_2$. Se llama función compuesta de f y g, y la representaremos por $g \circ f$, a la función de D_1 en $\mathbb{R}$, dada por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

La imagen de x por $g \circ f$ es única, por serlo la imagen de x por f y la imagen de $f(x)$ por g. En consecuencia, se trata de una función.

Esquemáticamente:



El dominio máximo de $g \circ f$ no coincide, en general, con el dominio máximo de f: tenemos la relación $Dom(g \circ f) \subseteq Dom(f)$

<u>EJEMPLOS:</u>

➜ Dadas las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, calcular los dominios máximos de $f \circ g$ y de $g \circ f$

- Calculamos la expresión de $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right) = \frac{1}{x^2 - 4} + 1 = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}$$

Tendremos $Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = Dom(g)$

- Calculamos la expresión de $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{(x+1)^2 - 4} = \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$$

En este caso tendremos: $Dom(g \circ f) = R - \{-3, 1\} \subset R = Dom(f)$

➜ Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(x-1}}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, calcular las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$

- $$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\frac{x^2}{x^2+1})=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}-1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{x^2-(x^2+1)}{x^2+1}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{-x^2}{(x^2+1)^2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{-x^2}}{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^2}}$$

La función compuesta $f\circ g$ tiene como dominio el conjunto vacío, puesto que en el denominador tenemos la raíz cuadrada de un número negativo que no tiene existencia en $\mathbb{R}$.

➜ $$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{x(x-1)}}{\frac{1}{x(x-1)}+1}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x(x-1)}}{\frac{1+x(x-1)}{x(x-1)}}=\frac{1}{x^2-x+1}$$

El denominador de esta función no se anula en ningún punto, con lo que podría pensarse que el dominio de la función $g\circ f$ sería $\mathbb{R}$ y, sin embargo, el dominio es el dominio de la función *f*.

<u>Propiedades de la composición de funciones.</u>

a. **Asociativa:** $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

b. **Conmutativa:** No se verifica como puede verse en los ejemplos anteriores.

c. **Función Identidad:** es una función I definida de *D* en $\mathbb{R}$ mediante $I(x)=x,$ es decir, cada número real se transforma en sí mismo.

d. Si *f* es una función cualquiera de *D* en $\mathbb{R}$, se verifica que $f\circ I=I\circ f=f$

e. **Función inversa o recíproca:** Dada una función *f*, se llama función inversa o recíproca de *f* y se representa por f^{-1}, a aquella función que verifica:

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=I(x)=x$$
$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=I(x)=x$$

Puesto que al componer las dos funciones obtenemos la función identidad, las gráficas de una función y su inversa (recíproca) serán simétricas respecto de la recta $y = x$ (gráfica de la función identidad).

Para que una función tenga inversa o recíproca es necesario que sea inyectiva (cada imagen tiene un solo original). Si una función no es inyectiva, puede descomponerse en trozos de forma que en cada uno de ellos sí lo sea y, entonces, en cada uno de esos trozos tendrá su función inversa.

EJEMPLO.

- La función $f(x) = x^2$ no es una función inyectiva, pero si la descomponemos en trozos de forma que en cada uno de ellos sí lo sea, nos quedará:

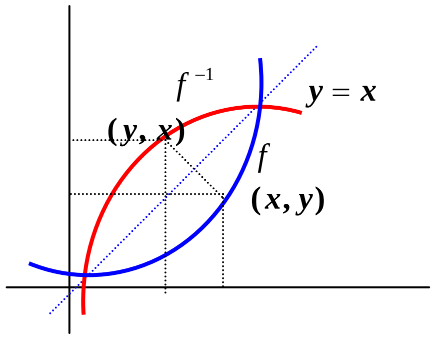
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ f_2(x) = x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y en cada uno de ellos la función $f(x) = x^2$ tendrá su función inversa:

$$\begin{cases} f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x} & \text{es inversa de} \quad f_1(x) = x^2 \quad \text{si} \quad x < 0 \\ f_2^{-1}(x) = +\sqrt{x} & \text{es inversa de} \quad f_2(x) = x^2 \quad \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cómo calculamos la inversa de una función?

Gráficamente, la inversa de una función f la obtenemos dibujando su simétrica respecto de la recta $y = x$.



Podemos observar que a cada punto (x, y) de la gráfica de f le corresponde en f^{-1} el punto que resulta de intercambiar sus coordenadas, es decir, (y, x).

Teniendo en cuenta esto, podremos obtener la expresión analítica de f procederemos de la siguiente forma:

1. Estudiaremos si f es inyectiva y si no lo es, descomponemos en trozos de forma que sí lo sea en cada uno de ellos.
2. En la función f, procederemos a cambiar el original a imagen y la imagen a original: $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad x = f(y)$
3. Despejando y en la expresión obtenida nos queda:

$$f^{-1}(f(y)) = f^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad y = f^{-1}(x)$$

que es la función que buscamos.

EJEMPLOS:

- **Calcular la función inversa de** $f(x) = 3x - 5$.

a) Estudiamos si la función dada es inyectiva:

Para que la función *f* sea inyectiva se debe verificar que si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

En nuestro caso:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow 3x - 5 = 3x' - 5 \Rightarrow x = x'$$

lo que significa que *f* es inyectiva.

b) Puesto que la función *f* es inyectiva, pasamos a calcular su inversa:

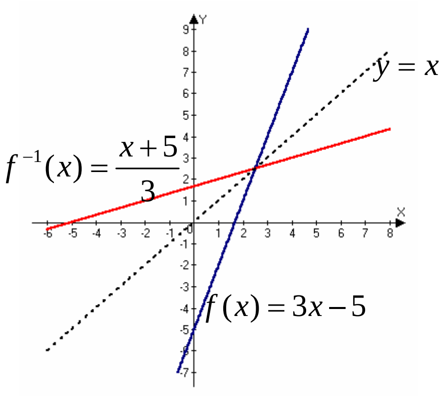
$$y = 3x - 5 \Rightarrow x = 3y - 5$$

Despejando y obtenemos: $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3}$

que es la función inversa de la dada. Esto podemos comprobarlo sin más que componer *f* con la f^{-1} obtenida:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-5) = \frac{(3x-5)+5}{3} = x$$

Gráficamente:



- **Calcular la función inversa de** $f(x) = x^2 - 4$

La función cuadrática no es inyectiva, pero si descomponemos su dominio en dos trozos separados por el vértice de la parábola:

$$f(x) = x^2 - 4 = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = x^2 - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

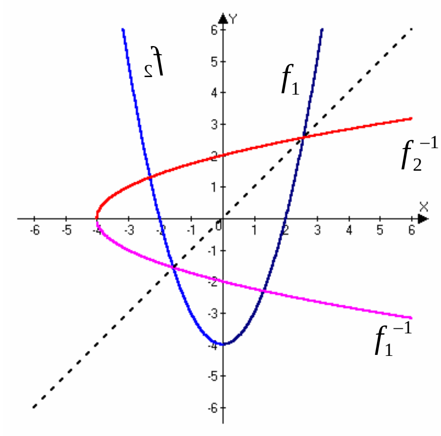
en cada uno de ellos, la función si es inyectiva y podremos calcular su inversa:

$$y = x^2 - 4 \Rightarrow x = y^2 - 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+4}$$

y, hablando con mayor propiedad, la inversa será:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{-1}(x) &= -\sqrt{x+4} \\ f_2^{-1}(x) &= +\sqrt{x+4} \end{aligned}\right\} \text{ si } x \geq 4$$

Gráficamente:



- **Encontrar la función inversa de** $f(x) = x^2 - 6x + 4.$

  El vértice de la parábola es el punto de abscisa $x = 3$ que será el que nos descompone el dominio en trozos de forma que en cada uno de ellos la función es inyectiva:

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 6x + 4 & \text{si} \quad x < 3 \\ f_2(x) = x^2 - 6x + 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

  Calculamos su inversa:

$$y = x^2 - 6x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 6y + 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 6y + (4 - x) = 0$$

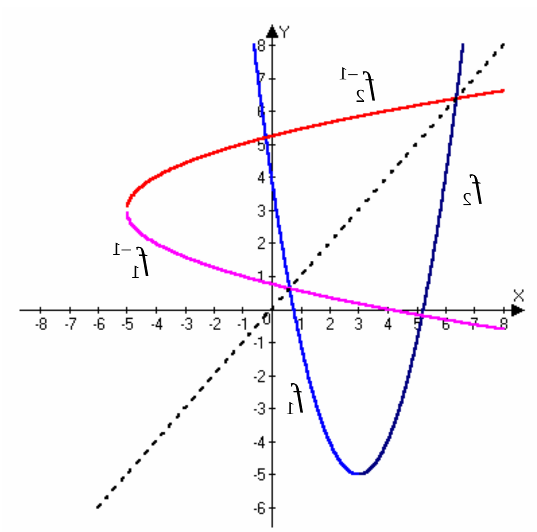
  y, despejando:

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(4 - x)}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{9 - (4 - x)}}{2} = 3 \pm \sqrt{5 + x}$$

  En consecuencia,

$$\left.\begin{array}{l} f_1^{-1}(x) = 3 - \sqrt{5 + x} \\ f_2^{-1}(x) = 3 + \sqrt{5 + x} \end{array}\right\} \text{ si } \quad x \geq -5$$

  Gráficamente:



EJERCICIOS.

Calcular la función inversa o recíproca de las siguientes funciones:

- $f(x) = 7x - 3$
- $f(x) = \dfrac{3x+2}{5x+7}$
- $f(x) = x^2 + 2x - 1$
- $f(x) = \sqrt{x-2}$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Recordemos que la función exponencial *f* es una aplicación biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+^*$ tal que a cada $x \in \mathbb{R}$ le hacemos corresponder a^x, siendo a un número real positivo distinto de uno.

Por ser *f* biyectiva (cada punto de $\mathbb{R}$ está asociado con uno y sólo uno de $\mathbb{R}_+^*$ y recíprocamente), su recíproca f^{-1} es también biyectiva, pero ahora de $\mathbb{R}_+^*$ en $\mathbb{R}$.

Se llama función logarítmica de base a ($a > 0$ y $a \neq 1$) a la función recíproca de la función exponencial en base a, es decir:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad \text{tal que a cada } x \in \mathbb{R}_+^* \to \log_a x \in \mathbb{R} \quad (a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

La expresión $\log_a x$ se lee "logaritmo en base *a* de *x*" y se verifica que:

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Observaciones:

1. Si la base es el número "*e*", se escribe $\ln x$ o Ln(*x*), en vez de $\log_e x$ y se lee "logaritmo neperiano o logaritmo natural de *x*".
   Se verifica, pues que $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$
2. Si la base es 10 se escribe log *x*, sin indicar la base, y se lee "logaritmo decimal de *x*" o simplemente "logaritmo de *x*"
   $$\log x = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x$$
   Cuando la base toma otros valores, se escriben éstos como subíndices de la abreviatura log

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

1. Los números negativos no tienen logaritmo, ya que a^x nunca adquiere valores negativos, de ahí que su dominio sea $\mathbb{R}_+^*$
2. El logaritmo de la unidad es cero: $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1 \quad \forall a$
3. El logaritmo de la base es uno: $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a \quad \forall a$
4. $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$
5. La función logarítmica es continua.

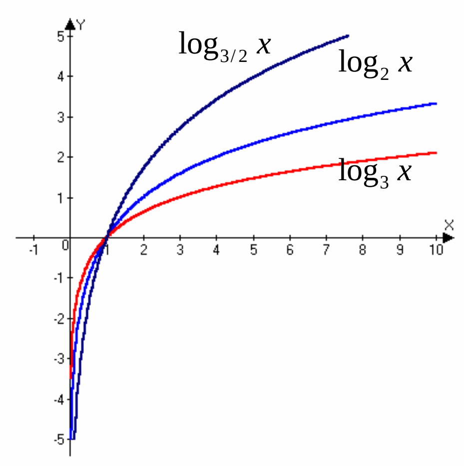
6. Si la base $a > 1$, la función logarítmica es estrictamente creciente y se verifica

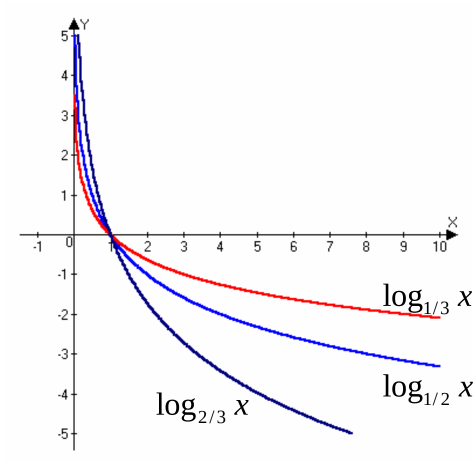
$$\log_a x > 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$
$$\log_a x < 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

7. Si la base a es tal que $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente y se verifica

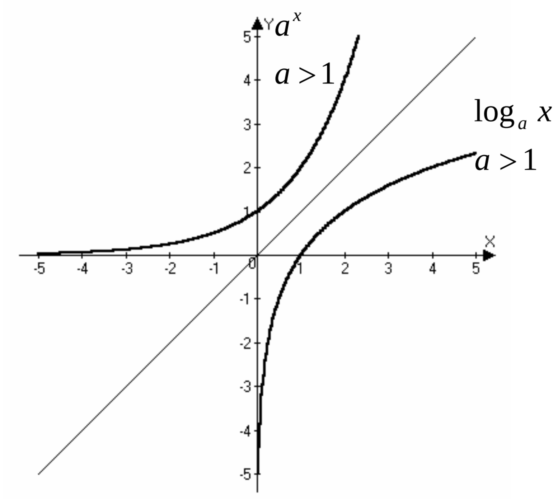
$$\log_a x < 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$
$$\log_a x > 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

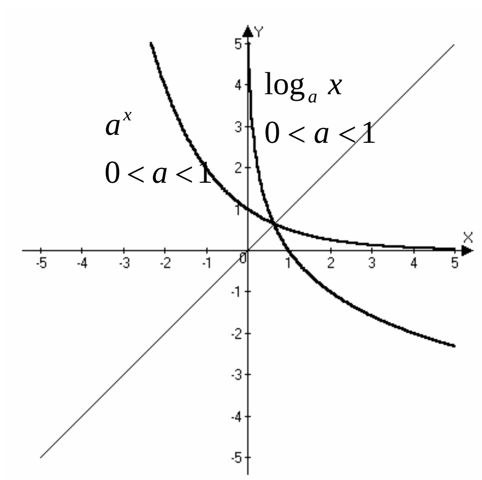
Su gráfica sería



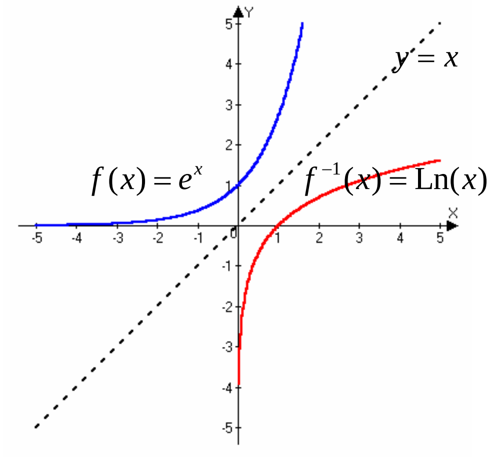


En general,





En particular, la exponencial y la logarítmica más utilizada es la de base el número "***e***", $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \text{Ln}(x)$ (logaritmo neperiano de x), y sus gráficas nos quedarían de la forma:



8. **Logaritmo del producto**.

   El logaritmo de un producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de cada factor, esto es: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \quad \log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$

9. **Logaritmo del cociente**.

   El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

10. **Logaritmo de una potencia**.

    El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base: $\forall x \in R_+^* \ : \quad \log_a b^x = x.\log_a b$

11. **Logaritmo de una raíz.**

    El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz: $\forall x \in R_+^* \ : \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$

De todo lo dicho, podemos concluir que la función logarítmica de base "*a*" es la función inversa de la función exponencial *a*. Esta nueva función nos permitirá bajar el exponente en la función exponencial a la hora de calcular su inversa.

LAS FUNCIONES ARCO.

Son las funciones inversas de las funciones trigonométricas o circulares.

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \mathrm{sen}\, x$ no es inyectiva, para poder definir su función inversa nos quedaremos con un tramo en el que sí lo sea: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Él quedarnos con este intervalo es puramente convencional, puesto que podíamos tomar cualquier otro donde la función seno fuese inyectiva.

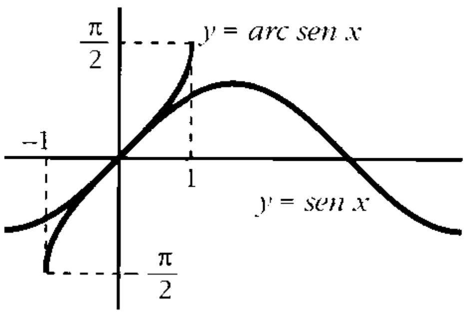
La función inversa de la función seno recibe el nombre de "***arco seno***" y se pone *arcsen*.

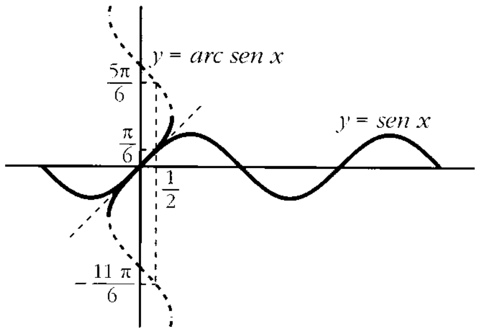
Está definida de la forma:

$$\text{arcsen}: [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

donde a cada valor del seno se le hace corresponder el arco correspondiente.

Se verifica que $\text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x$ y $\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x$





De análoga manera se definirían las funciones arco coseno (inversa del coseno) y la función arco tangente (inversa de la tangente).

EJERCICIOS.

➜ Calcular las funciones inversas o recíprocas de las siguientes funciones:

- $f(x) = 3^{\sqrt{x}} + 5$
- $f(x) = L(x^2 + 1)$
- $f(x) = \text{sen}(e^x + 3)$
- $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$
- $f(x) = e^{\text{sen}\, x} - 1$
- $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES A PARTIR DE OTRAS CONOCIDAS

Sean $f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con $f(D_1) \subset D_2$. Se llama función compuesta de *f* y *g*, y la representaremos por $g \circ f$, a la función de D_1 en $\mathbb{R}$, dada por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Podemos observar que componer dos funciones es hacer actuar una de ellas sobre las imágenes de la otra.

EJEMPLO.

Sean las funciones $x \xrightarrow{f} \text{sen}\, x$ y $x \xrightarrow{g} x^2$ según se realice la composición tendremos:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\text{sen}\, x) = \text{sen}^2 x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \text{sen}(x^2)$$

Podemos observar, nuevamente, que la composición de funciones no verifica la propiedad conmutativa, es decir, $g \circ f \neq f \circ g$.

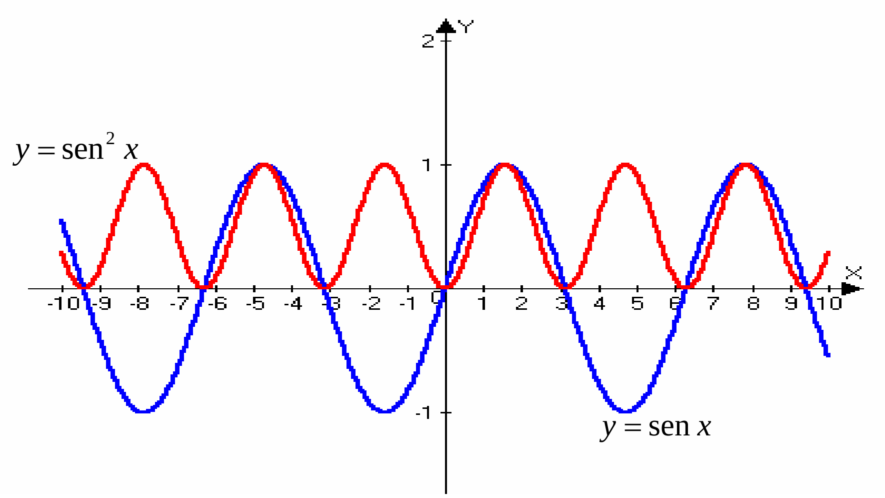
Sin embargo, el conocimiento de las gráficas de las gráficas de las funciones componentes es de gran ayuda para la representación de la función compuesta.

Ejemplo.

Para realizar la gráfica de la función $g \circ f$ del ejemplo anterior debemos tener en cuenta que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y, por tanto, se verifica que $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$.

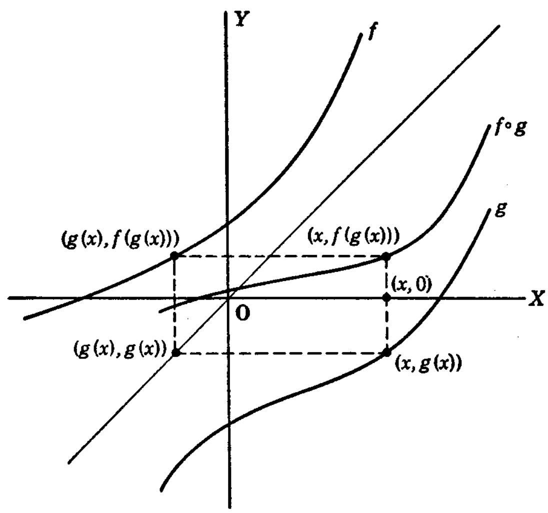
Por otra parte, cuando $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 x \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$.

Teniendo en cuenta que los máximos y mínimos de esta función son evidentes, la gráfica de esta función nos queda de la forma:



Si f y g son funciones reales de variable real, entonces la gráfica de la función $f \circ g$ puede construirse a partir de las gráficas de f y g de la siguiente forma:

- Tomamos un punto cualquiera $x \in Dom(g)$ y trazamos la recta vertical que pasa por el punto $(x, 0)$. Esta recta intersecta a la gráfica de f en el punto $(x, g(x))$.
- Si $x \in Dom(f \circ g)$, entonces $g(x) \in Dom(f)$ y la recta vertical que pasa por $(g(x), g(x))$ cortará a la gráfica de f en el punto $(g(x), f(g(x)))$. Entonces, el punto $(x, f(g(x)))$ que buscamos se obtiene como intersección de la reta horizontal que pasa por $(g(x), f(g(x)))$ y la vertical que pasa por $(x, 0)$.



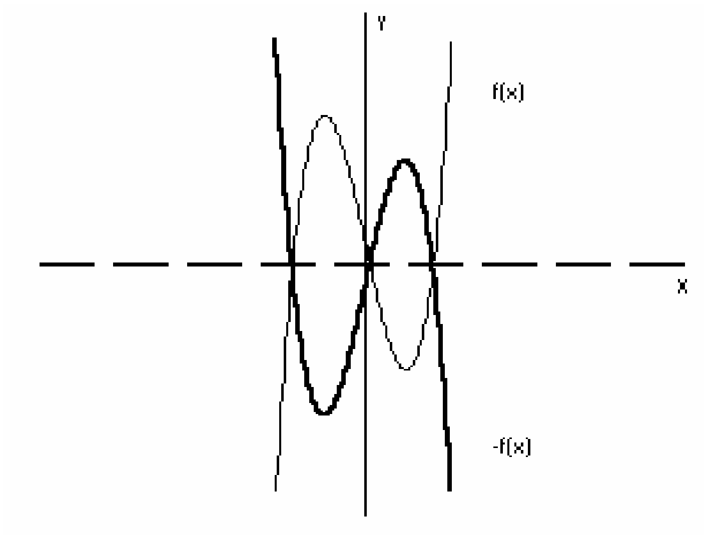
Considerando que la primera transformación sea elemental, veamos como podemos representar la gráfica de la función compuesta Diferenciaremos las operaciones que realizaremos a la función $f(x)$ de las operaciones que realizaremos a la variables *x*. En realidad no se debiera hacer tal distinción si tuviésemos en cuenta el orden de composición, recuérdese que no es conmutativa..

Supongamos que conocemos la representación de *f(x)* veremos:

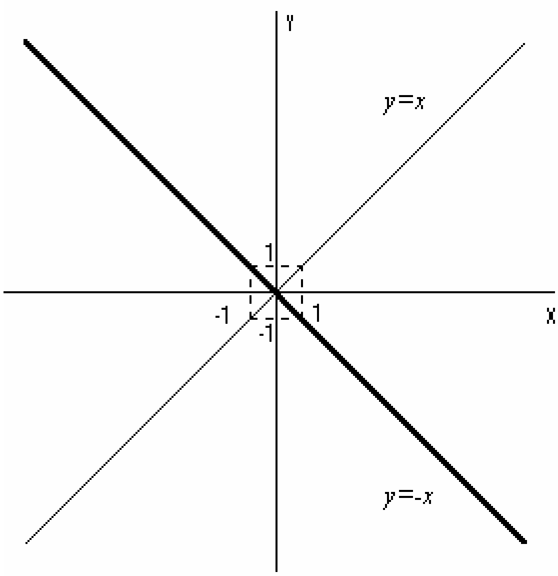
TRANSFORMACIONES A LA FUNCIÓN	TRANSFORMACIONES A LA VARIABLE
$-f(x)$	$f(-x)$
$f(x)+k$	$f(x+k)$
$k \cdot f(x)$	$f(k \cdot x)$
$\lvert f(x) \rvert$	$f(\lvert x \rvert)$
$f^{-1}(x)$	
$\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)}$	

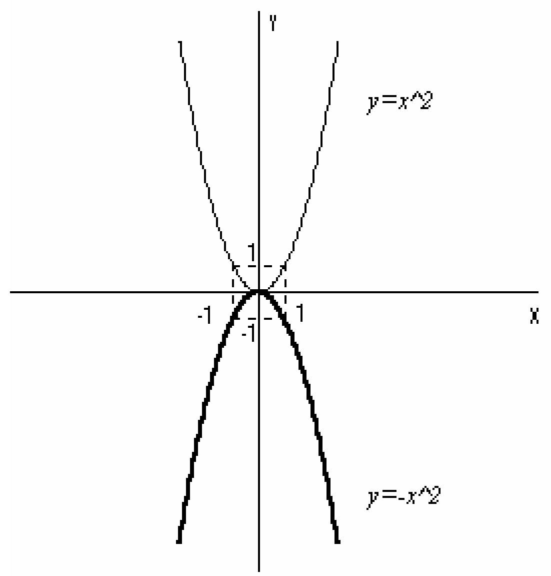
A) REPRESENTACIÓN DE $y = -f(x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$ (FUNCIÓN OPUESTA)

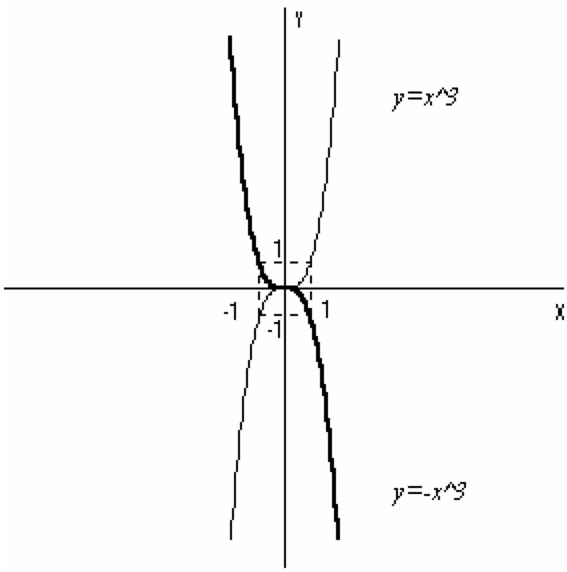
La gráfica de ***–f(x)***, función opuesta, será simétrica a ***f(x)*** respecto al eje ***x*** o de **abscisas.**

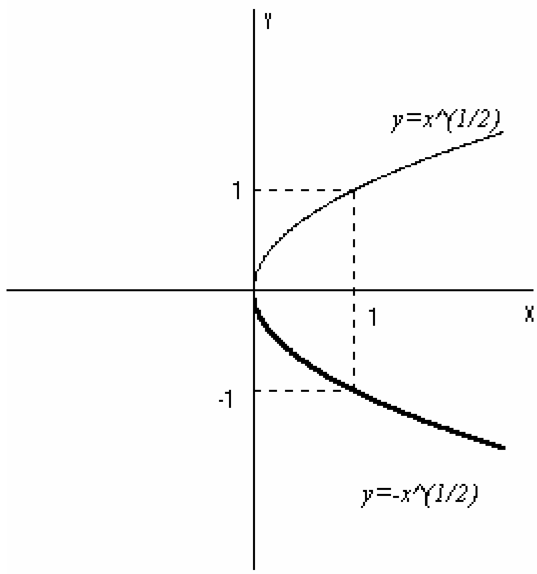


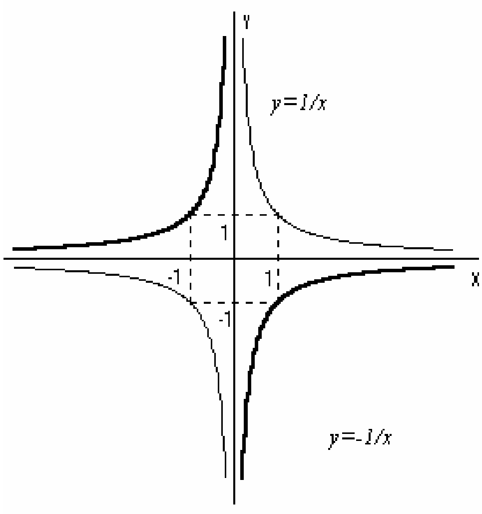
Ejemplos:

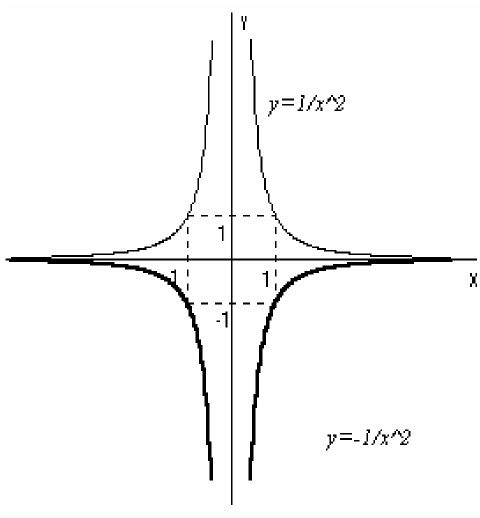

Y
y=x
1
-1
1
-1
X
y=-x

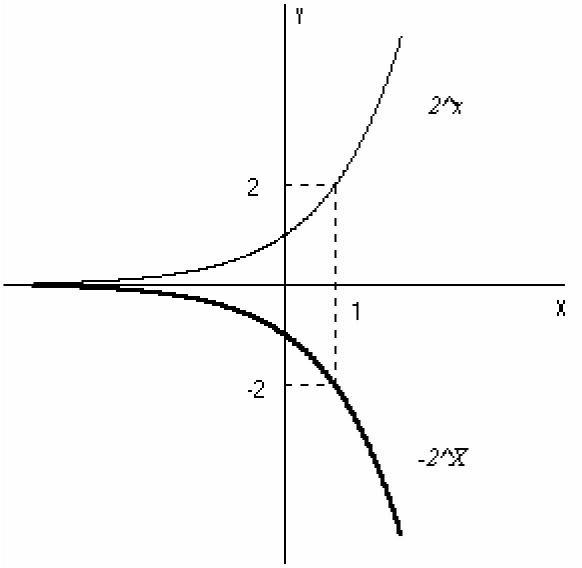

Y
y=x^2
1
-1
1
-1
X
y=-x^2

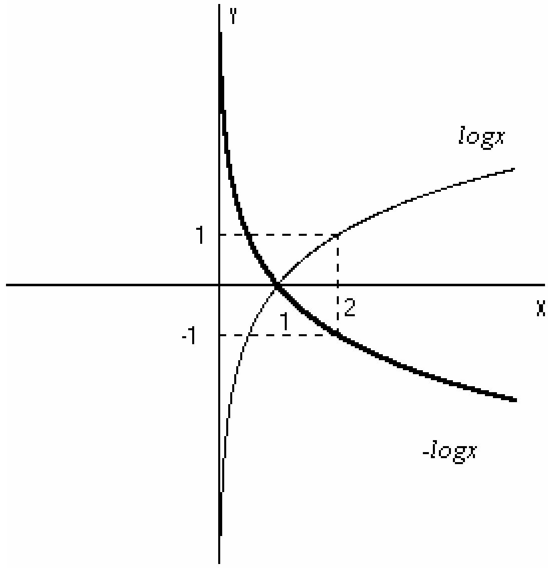

Y
y=x^3
1
-1
1
-1
X
y=-x^3


Y
y=x^(1/2)
1
1
X
-1
y=-x^(1/2)


Y
y=1/x
1
-1
1
X
-1
y=-1/x

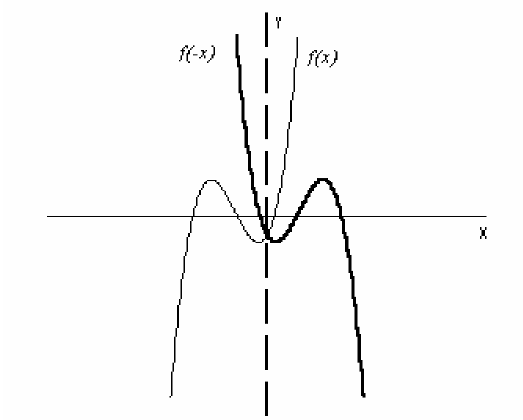

Y
y=1/x^2
1
-1
1
X
-1
y=-1/x^2



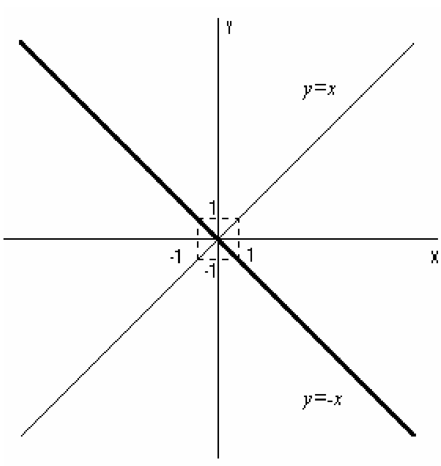


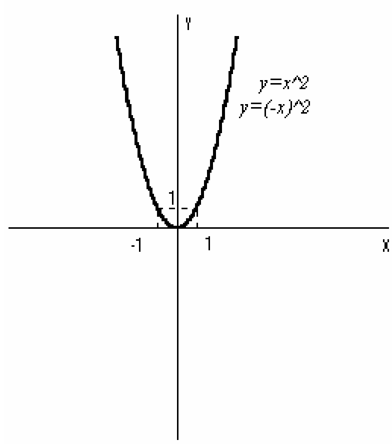
B) REPRESENTACIÓN DE $y = f(-x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

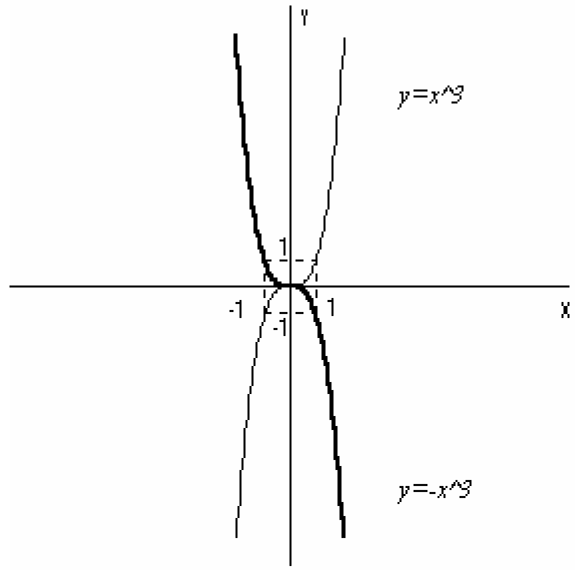
La gráfica de $f(-x)$ será <u>simétrica</u> a $f(x)$ respecto al eje ***y*** o de **ordenadas**

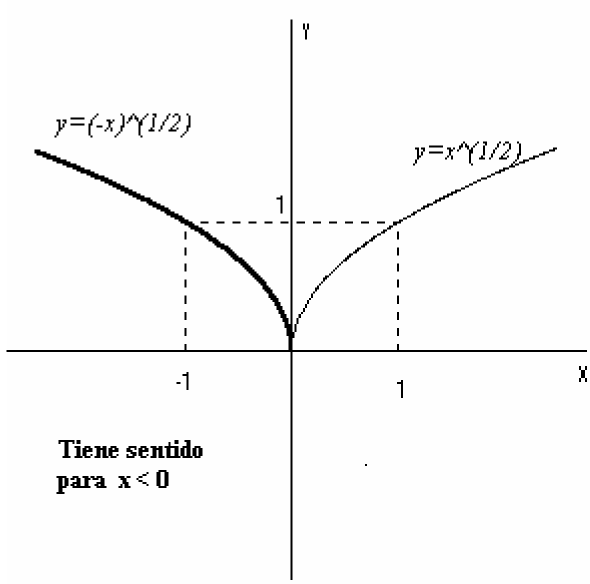


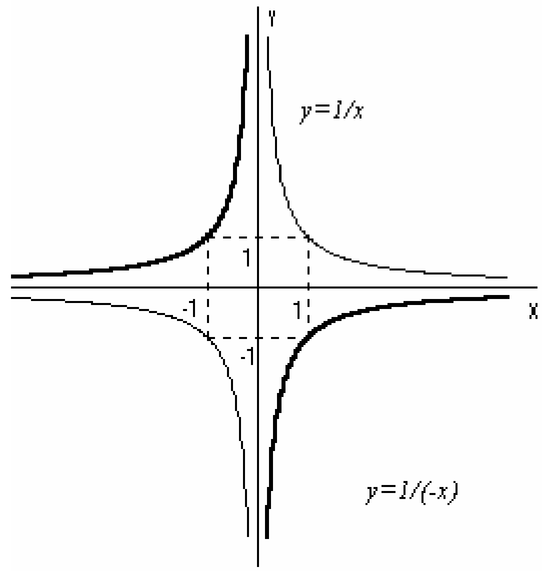
Ejemplos:

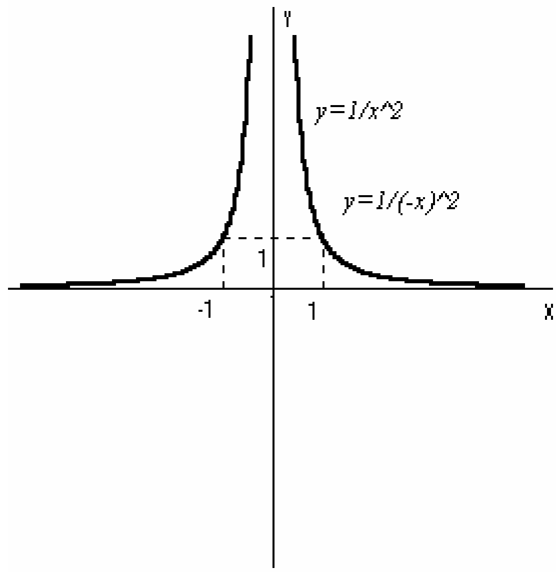


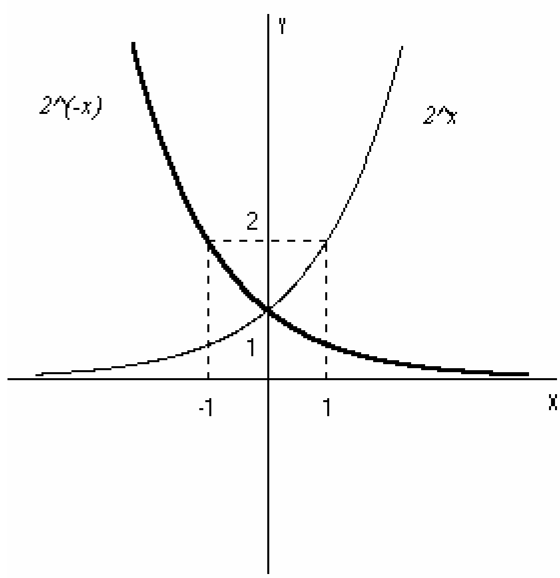


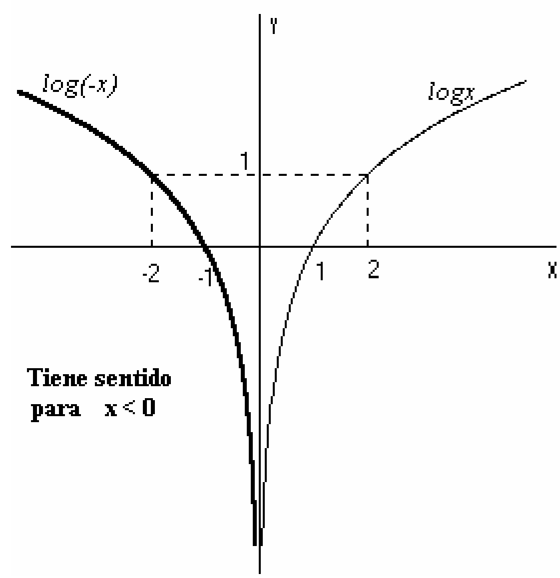

Y
y=x^3
1
-1
1
-1
X
y=-x^3


Y
y=(-x)^(1/2)
y=x^(1/2)
1
-1
1
X
Tiene sentido
para x < 0


Y
y=1/x
1
-1
1
-1
X
y=1/(-x)


Y
y=1/x^2
y=1/(-x)^2
1
-1
1
X

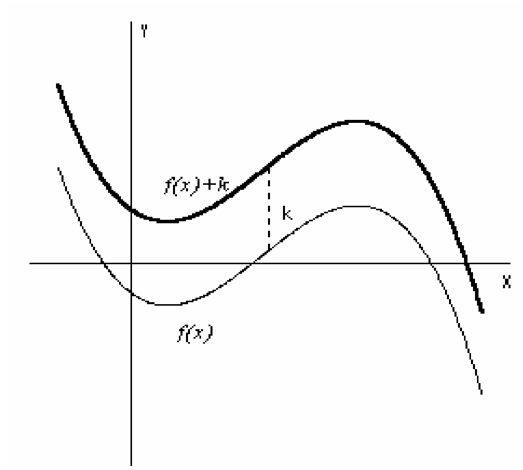

Y
2^(-x)
2^x
2
1
-1
1
X


Y
log(-x)
logx
1
-2
-1
1
2
X
Tiene sentido
para x < 0

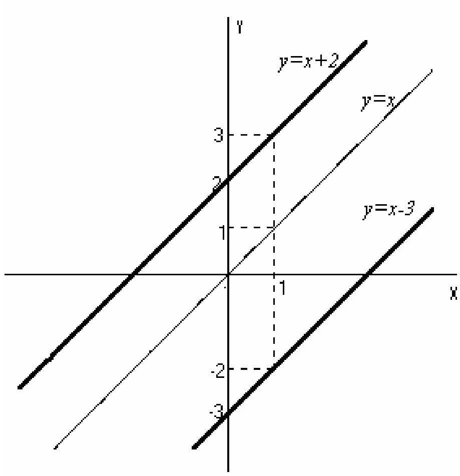
C) REPRESENTACIÓN DE $y = f(x) + k$ A PARTIR DE $y = f(x)$

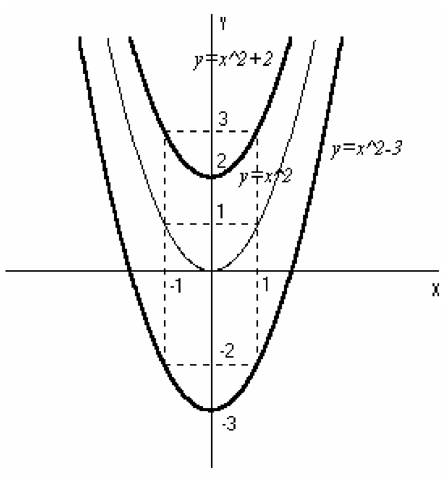
Si sumamos un número a la función la gráfica de *f(x)+k* se obtiene trasladando, a lo largo del eje **y** o de **ordenadas**, la gráfica de *f(x) k* unidades hacia arriba.

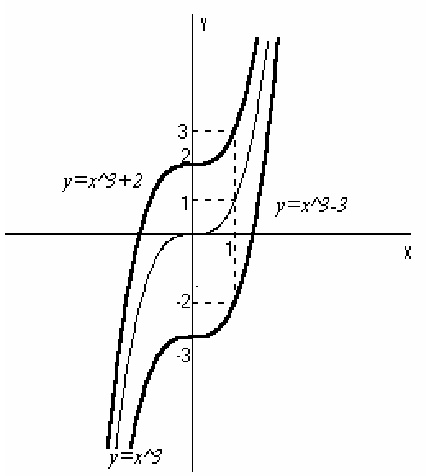
Si restamos un número a la función la gráfica de *f(x)-k* se obtiene de trasladando, a lo largo del eje **y** o de **ordenadas**, la gráfica de *f(x) k* unidades hacia abajo.

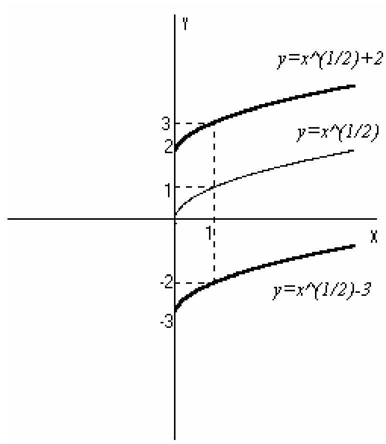


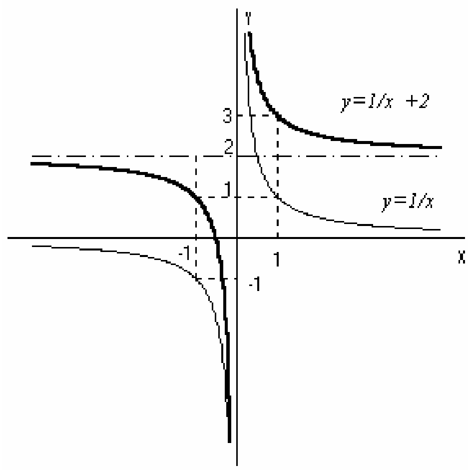
Ejemplos:

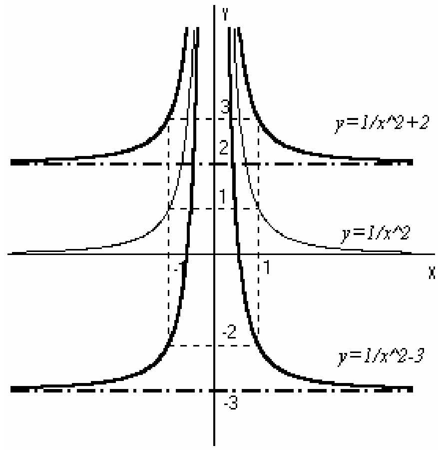


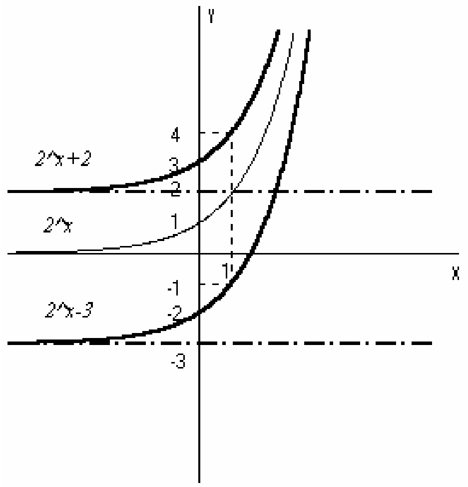


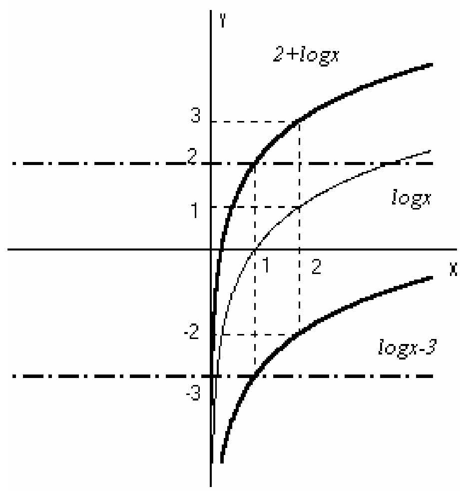








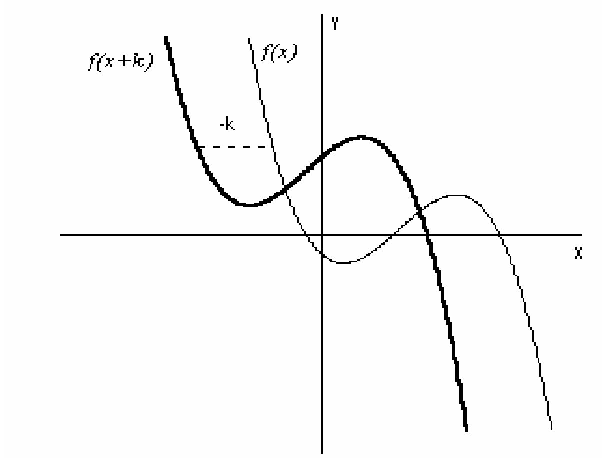




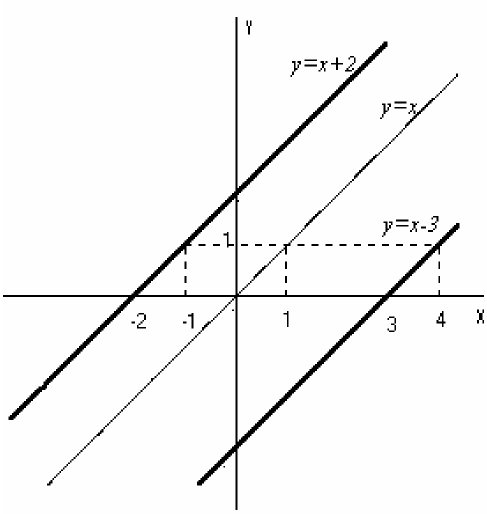
D) REPRESENTACIÓN DE $y = f(x+k)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

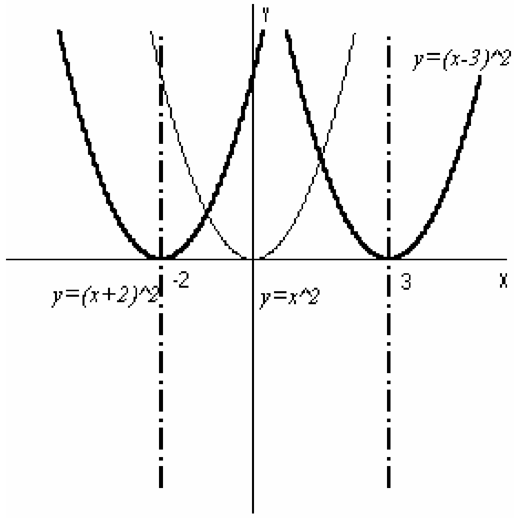
Si <u>sumamos</u> un número a la variable, la gráfica de $f(x+k)$ se obtiene <u>trasladando</u> k unidades hacia la <u>izquierda</u>, a lo largo del eje ***x*** o de **abscisas**, la gráfica de $f(x)$.

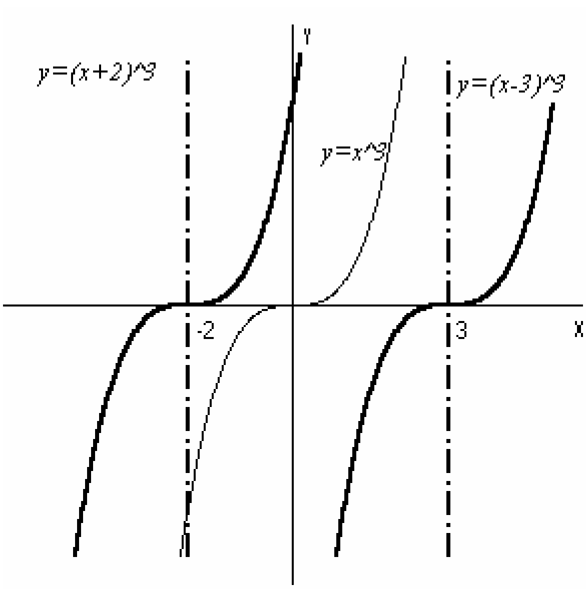
Si <u>restamos</u> un número a la variable, la gráfica de $f(x-k)$ se obtiene <u>trasladando</u> k unidades hacia la <u>derecha</u>, a lo largo del eje ***x*** o de **abscisas**, la gráfica de $f(x)$.

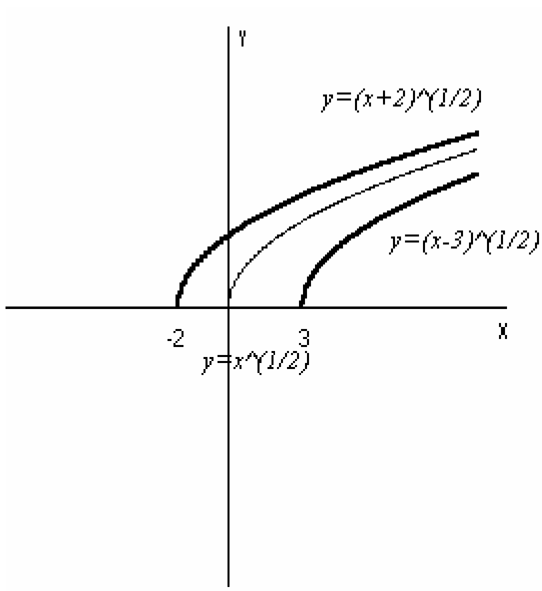


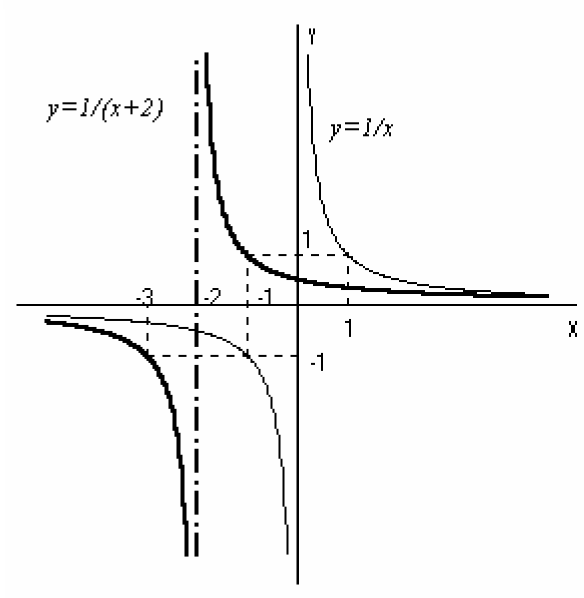
Ejemplos:

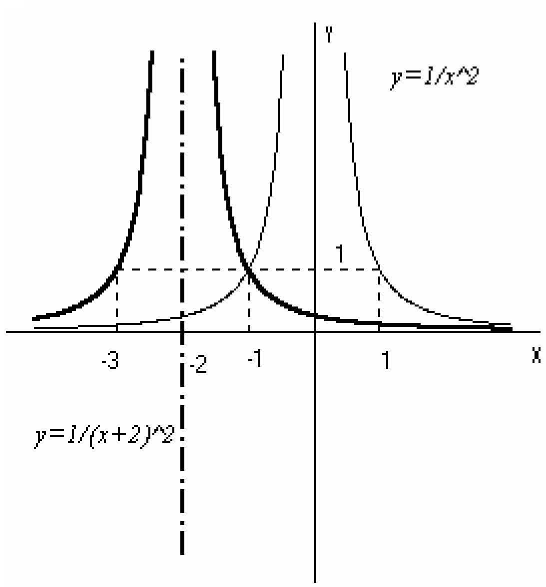

Y
y=x+2
y=x
y=x-3
1
-2
-1
1
3
4
X

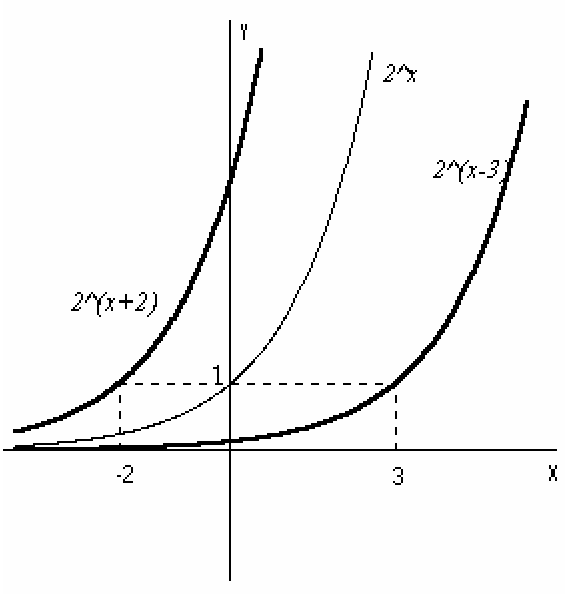

Y
y=(x-3)^2
y=(x+2)^2
-2
y=x^2
3
X

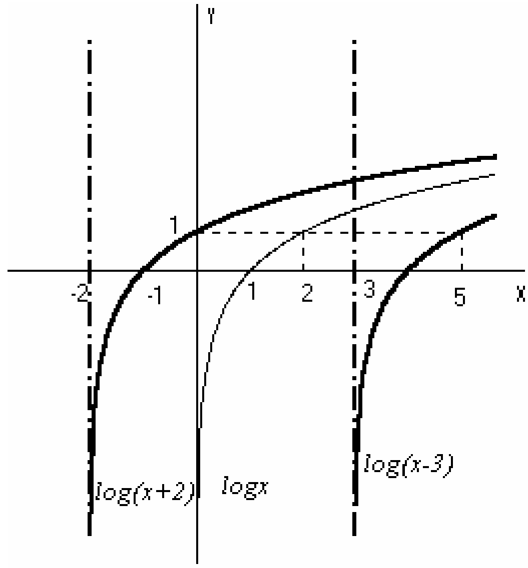

Y
y=(x+2)^3
y=(x-3)^3
y=x^3
-2
3
X


Y
y=(x+2)^(1/2)
y=(x-3)^(1/2)
-2
3
y=x^(1/2)
X


Y
y=1/(x+2)
y=1/x
1
-3
-2
-1
1
-1
X


Y
y=1/x^2
1
-3
-2
-1
1
X
y=1/(x+2)^2



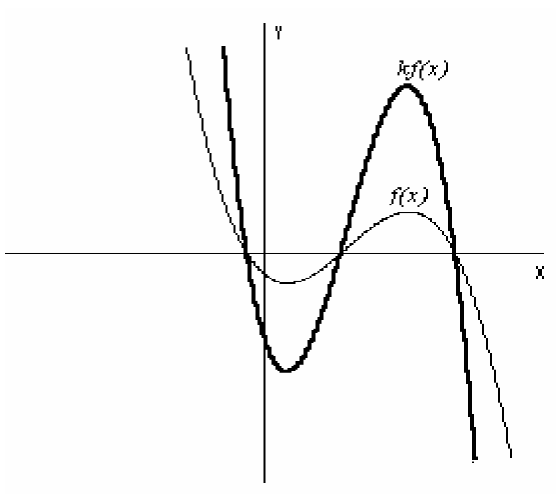


E) REPRESENTACIÓN DE $y = k \cdot f(x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

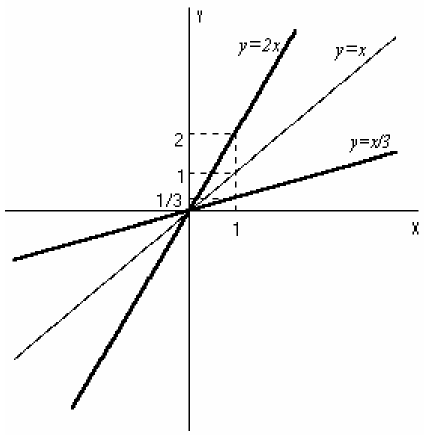
DILATACIÓN O CONTRACCIÓN VERTICAL

Si multiplicamos por un número mayor que 1, la función, la gráfica de $y = k \cdot f(x)$ se obtiene dilatando, a lo largo del eje **y** o de **ordenadas**, la gráfica de $y = f(x)$.

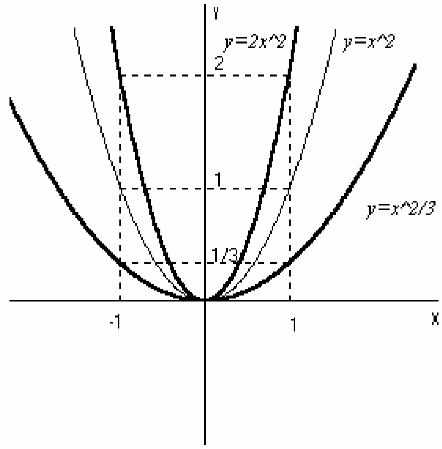
Si multiplicamos por un número mayor que 0 y menor que 1, la función, la gráfica de $y = k \cdot f(x)$ se obtiene contrayendo, a lo largo del eje **y** o de **ordenadas**, la gráfica de $y = f(x)$.



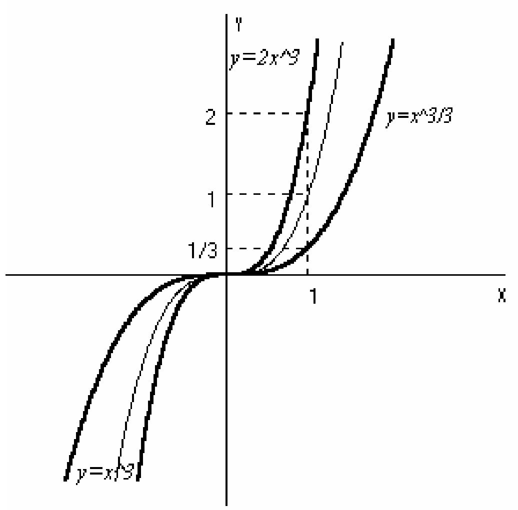
Ejemplos:



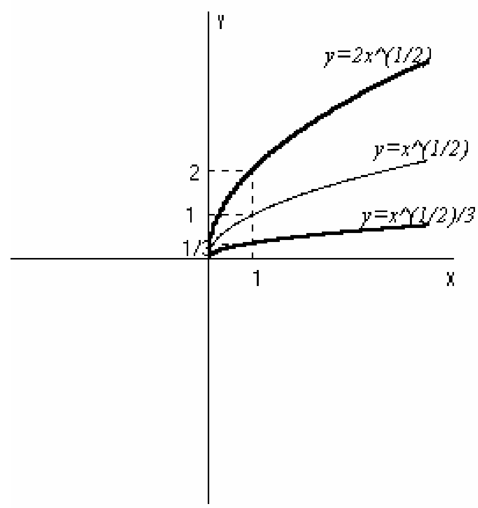
Y
y=2x
y=x
y=x/3
2
1
1/3
1
X



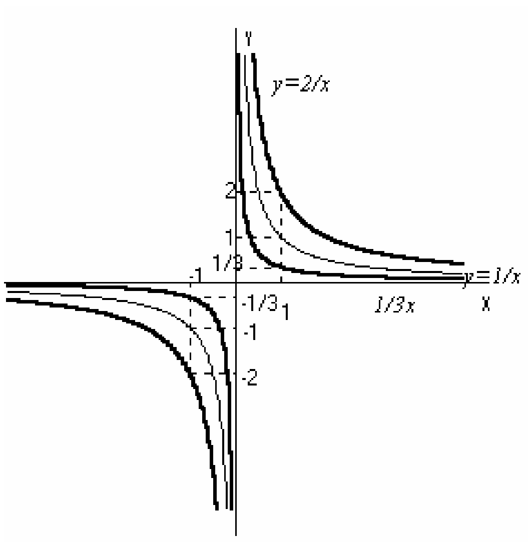
Y
y=2x^2
y=x^2
2
1
y=x^2/3
1/3
-1
1
X



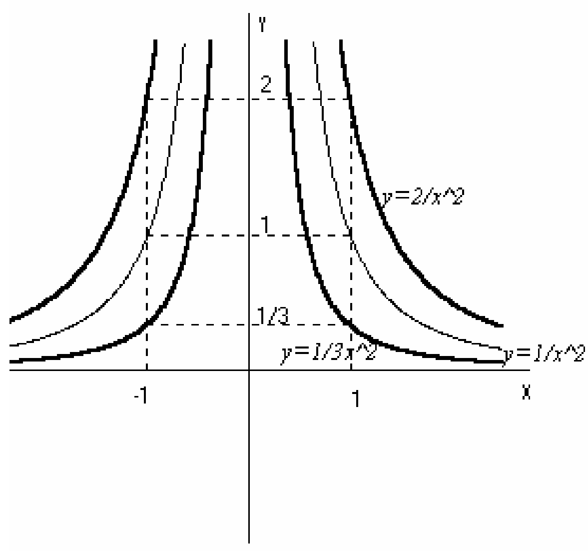
Y
y=2x^3
2
y=x^3/3
1
1/3
1
X
y=x^3



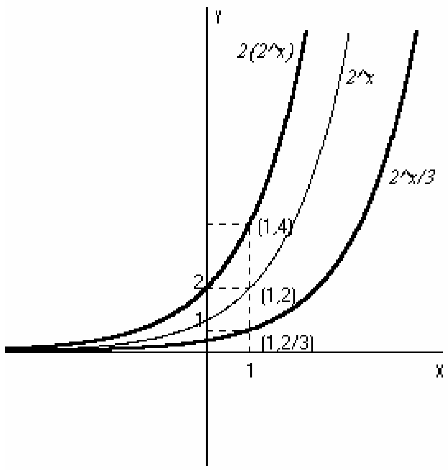
Y
y=2x^(1/2)
y=x^(1/2)
2
1
y=x^(1/2)/3
1/3
1
X

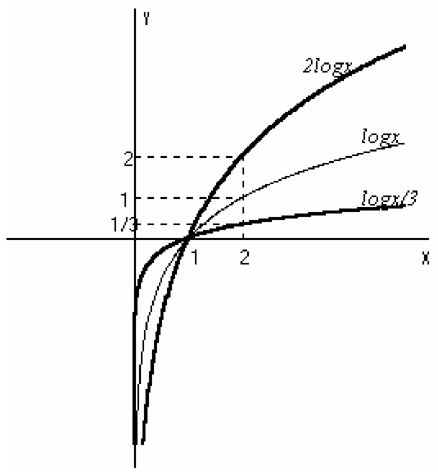


Y
y=2/x
2
1
1/3
-1
y=1/x
-1/3
1
1/3x
X
-1
-2



Y
2
y=2/x^2
1
1/3
y=1/3x^2
y=1/x^2
-1
1
X



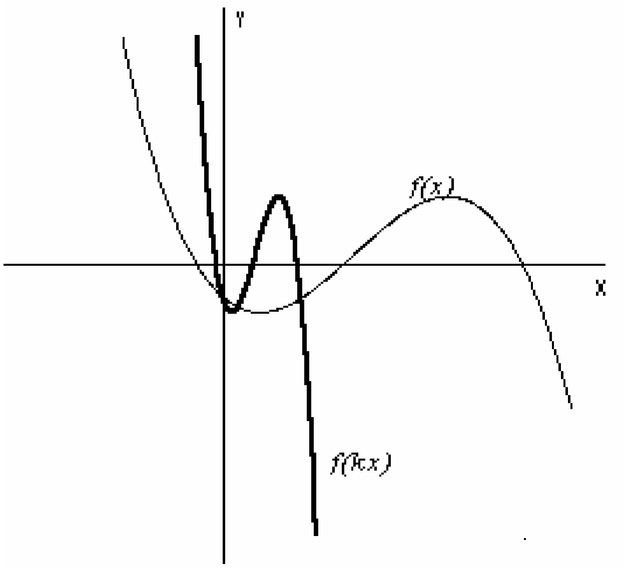


F) REPRESENTACIÓN DE $y = f(k \cdot x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

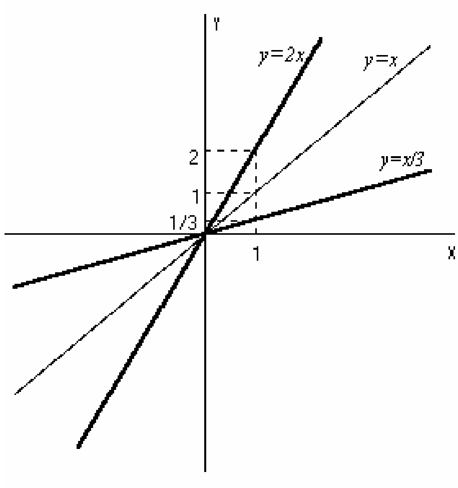
DILATACIÓN O CONTRACCIÓN HORIZONTAL

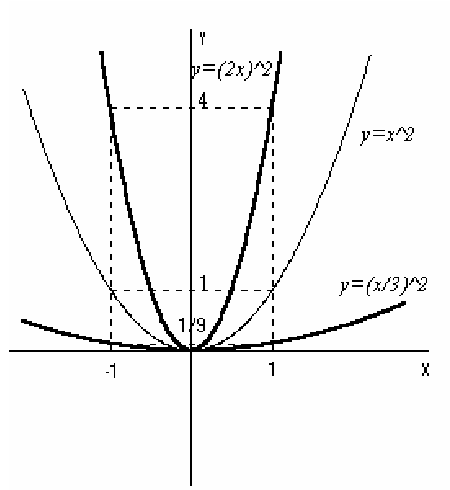
Si multiplicamos por un número mayor que 1, la variable, la gráfica de *kf(x)* se obtiene contrayendo, a lo largo del eje **x** o de **abcisas**, la gráfica de *f(x)*.

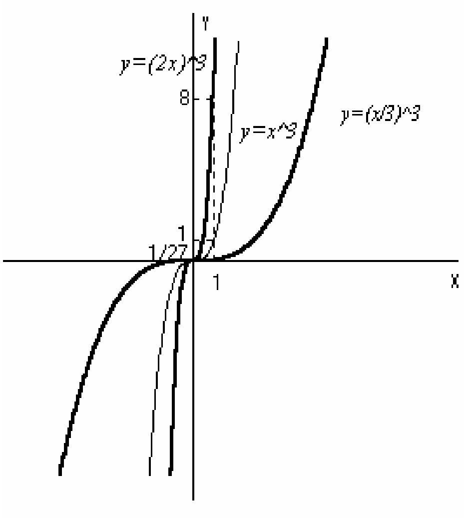
Si multiplicamos por un número mayor que 0 y menor que 1, la variable, la gráfica de *kf(x)* se obtiene dilatando, a lo largo del eje **x** o de **abcisas**, la gráfica de *f(x)*.

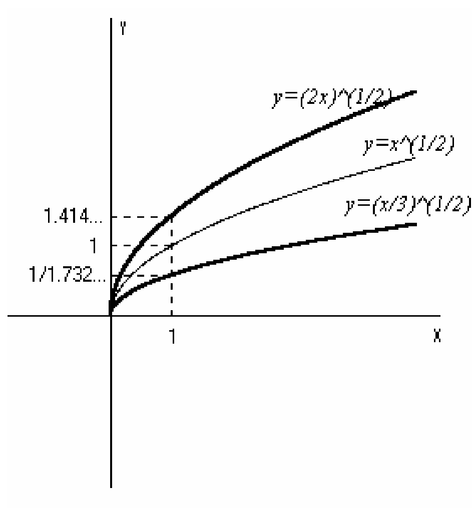


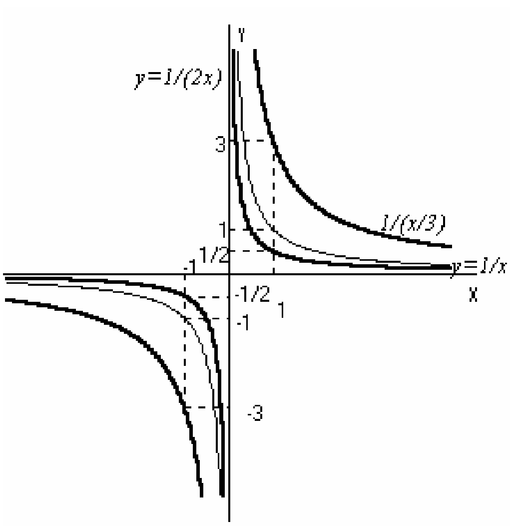
Ejemplos:

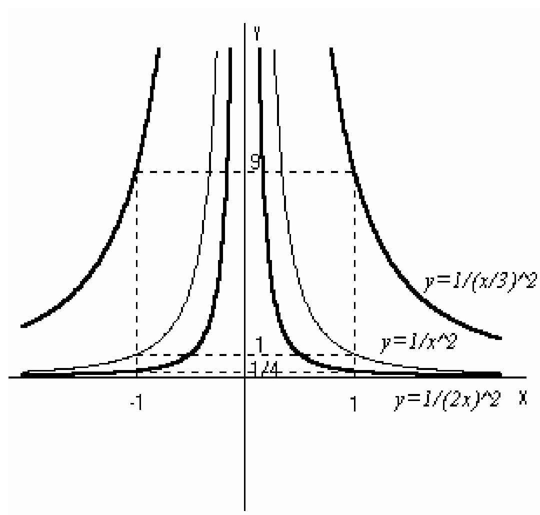

Y
y=2x
y=x
y=x/3
2
1
1/3
1
X

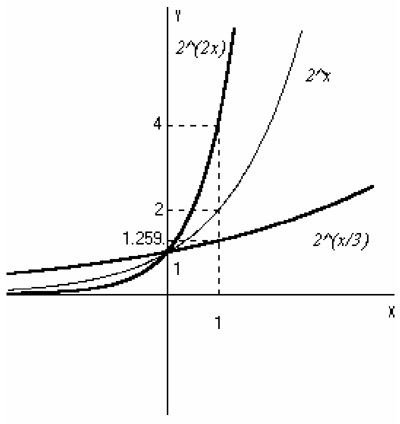

Y
y=(2x)^2
4
y=x^2
1
y=(x/3)^2
1/9
-1
1
X

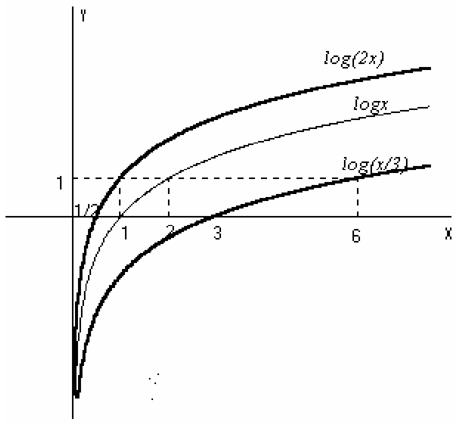

Y
y=(2x)^3
8
y=x^3
y=(x/3)^3
1
1/27
1
X


Y
y=(2x)^(1/2)
y=x^(1/2)
y=(x/3)^(1/2)
1.414...
1
1/1.732...
1
X


Y
y=1/(2x)
3
1/(x/3)
1
1/2
-1
y=1/x
-1/2
1
X
-1
-3


Y
9
y=1/(x/3)^2
y=1/x^2
1
1/4
-1
1
y=1/(2x)^2
X

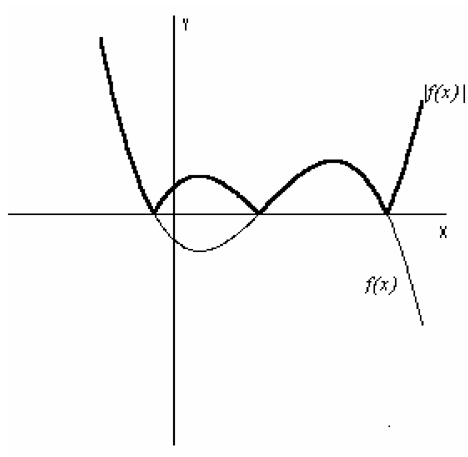




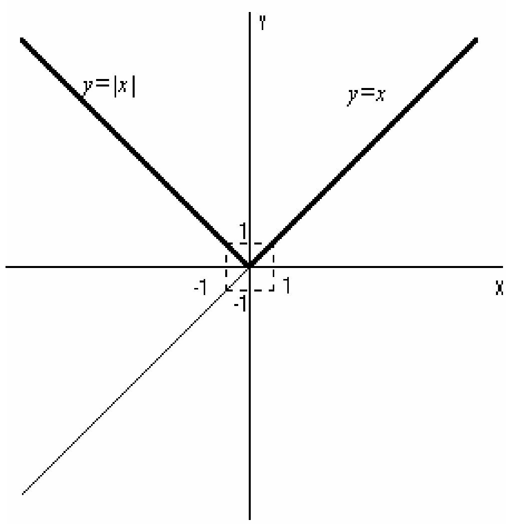
G) REPRESENTACIÓN DE $y =$ $y = | f(x) |$ A PARTIR DE $y = f(x)$

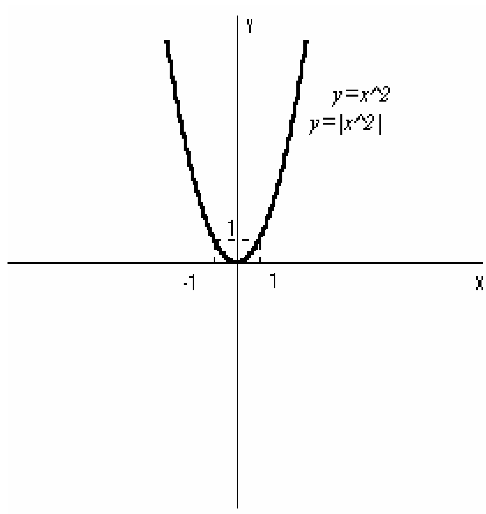
Para representar el valor absoluto de una función distinguimos:

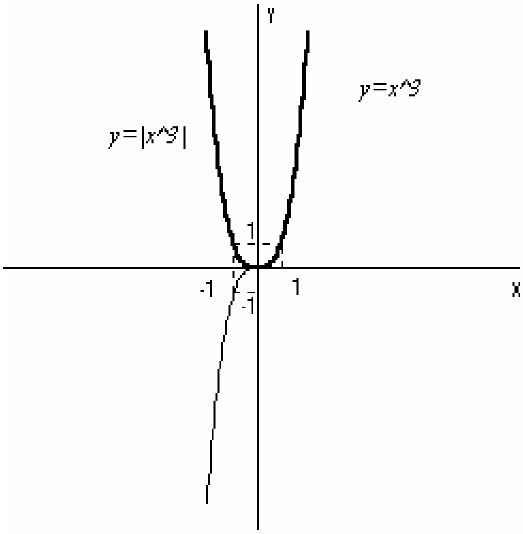
- los trozos en los que la curva es positiva (están por encima del eje ***x***) se dejan igual.
- Los trozos en los que la curva es negativa (están por debajo del eje ***x***) se sustituyen por trozos simétricos de aquellos respecto al eje ***x*** o de **abscisas**



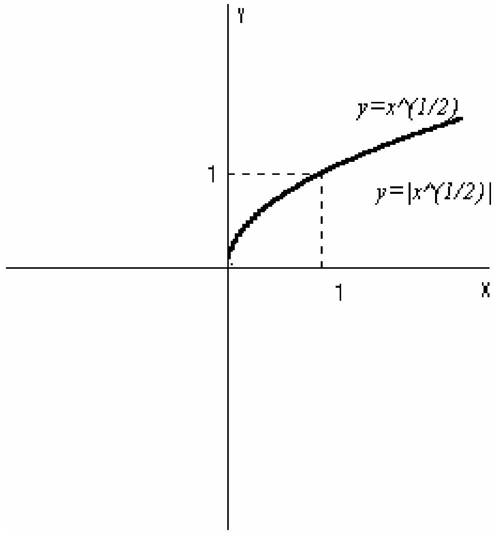
Ejemplos:



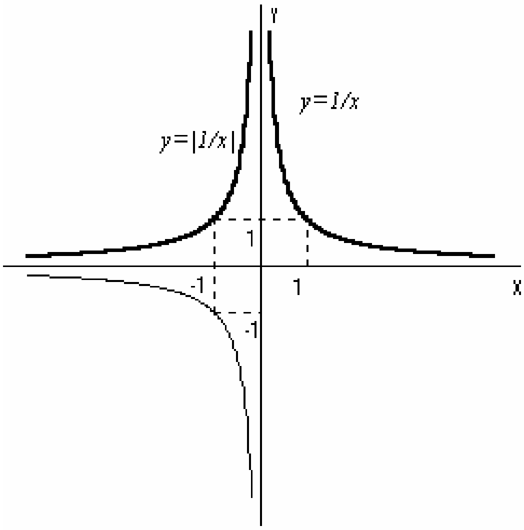




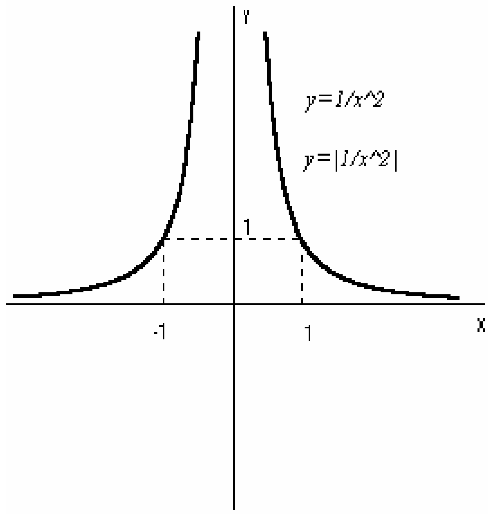
y=x^3
y=|x^3|



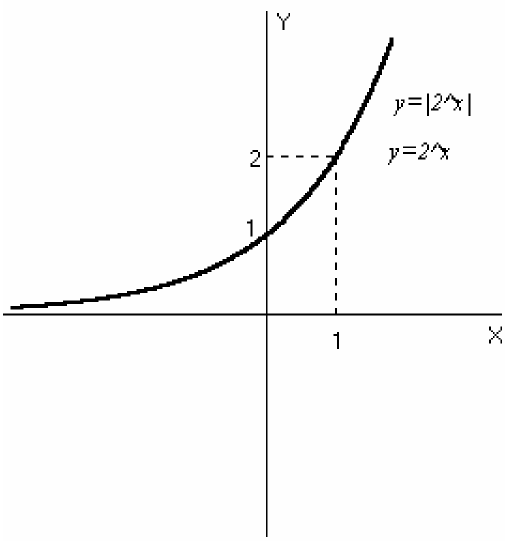
y=x^(1/2)
y=|x^(1/2)|



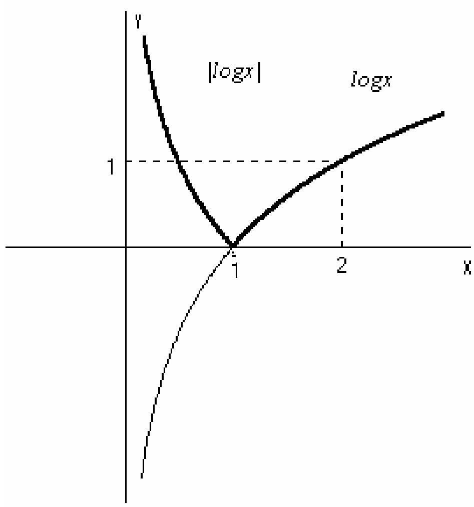
y=1/x
y=|1/x|



y=1/x^2
y=|1/x^2|



y=|2^x|
y=2^x

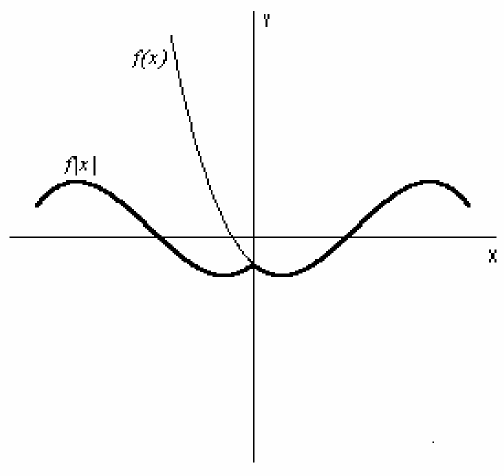


|logx|
logx

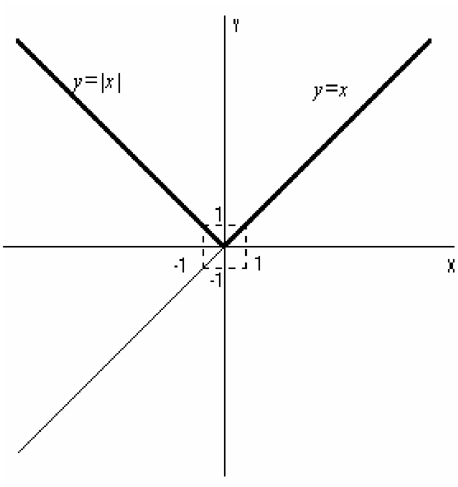
H) REPRESENTACIÓN DE $y = f(|x|)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

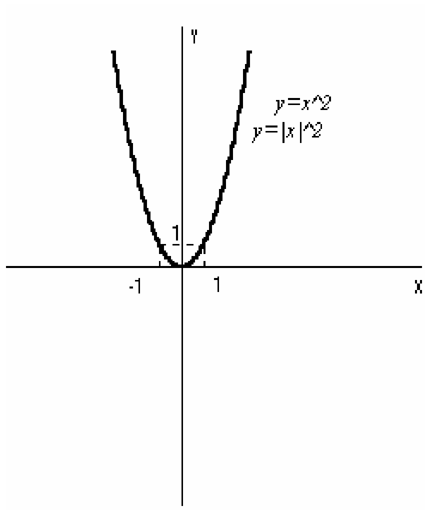
Para representar una función valor absoluto de la variable procederemos del siguiente modo:

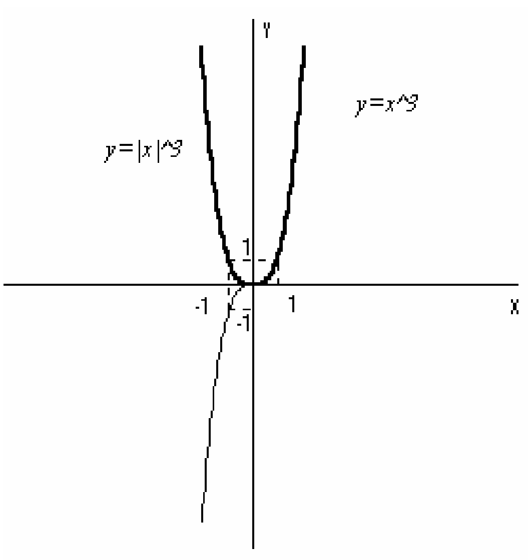
- se dibuja primero la función $f(x)$ sin valor absoluto para los valores de *x* positivos ($x > 0$)
- Para los valores negativos de *x* , la gráfica es la simétrica respecto al eje ***y*** o de **ordenadas** de la parte anterior dibujada

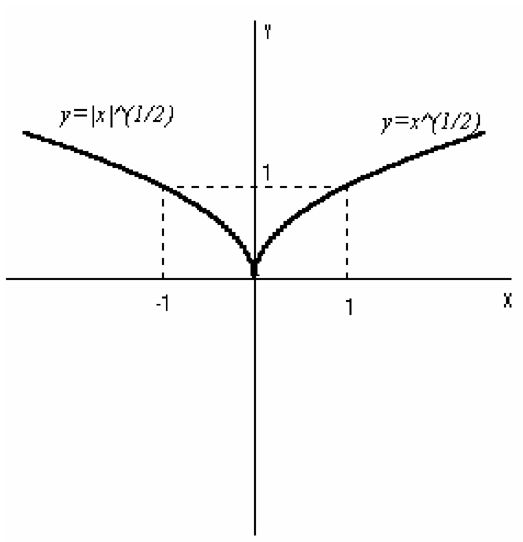


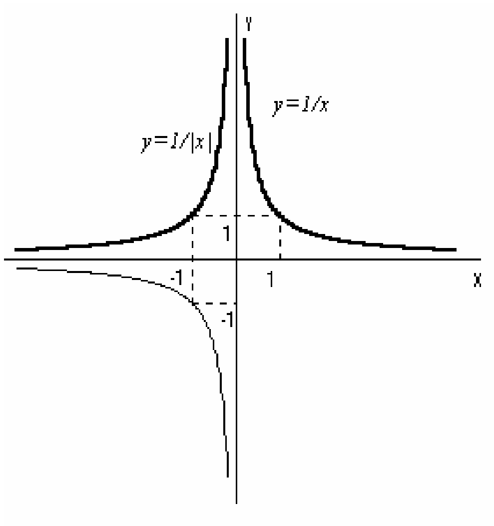
Ejemplos:

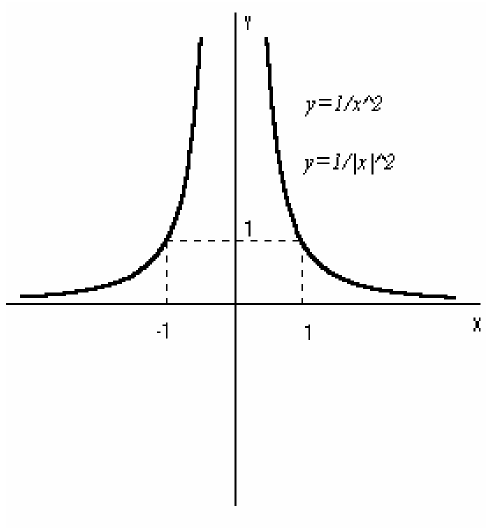


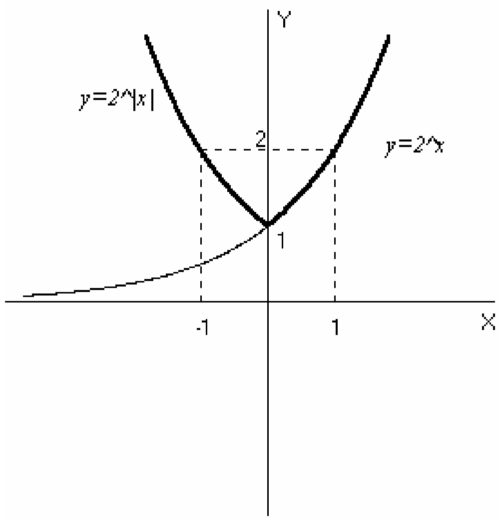


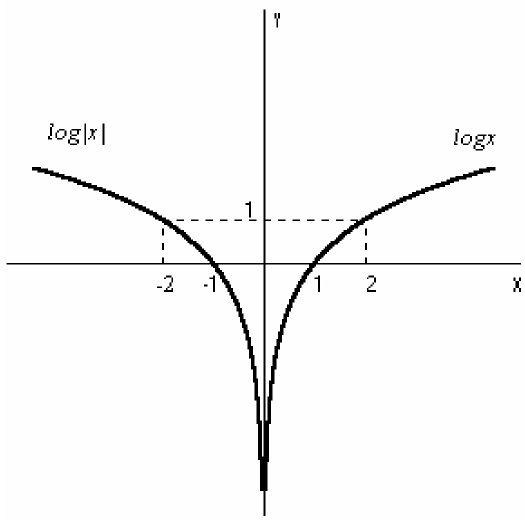










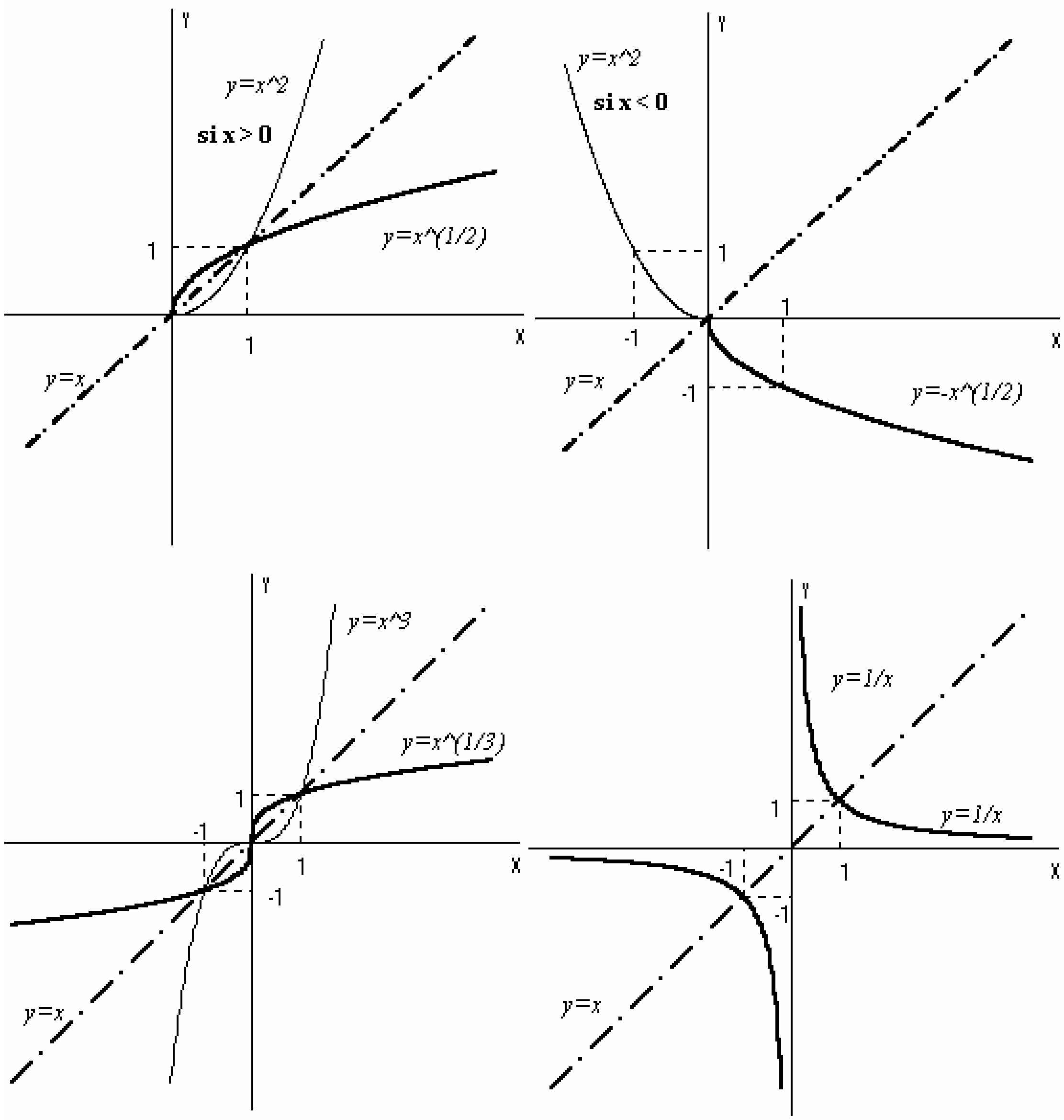


I) REPRESENTACIÓN DE $y = f^{-1}(x)$ A PARTIR DE $y = f(x)$

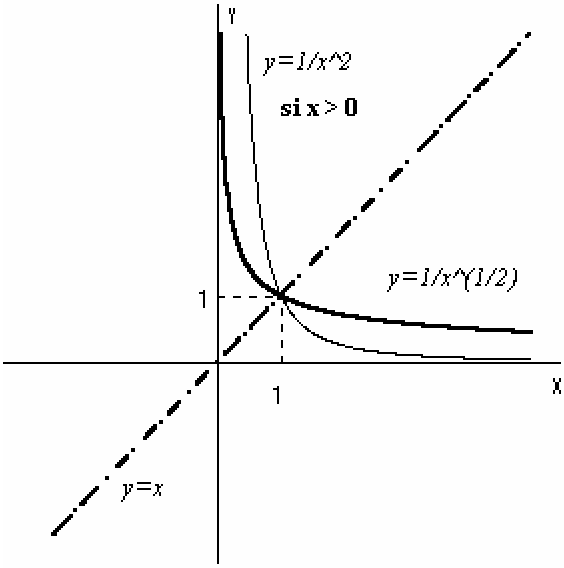
Para que una función tenga inversa o recíproca ha de ser **inyectiva**, es decir, cada valor de *y* ha de corresponder de un único valor de *x*. Si no es así ha de descomponerse en tramos en los que sea inyectiva, cada uno de los cuales tendrá su función inversa. Esto le ocurre por ejemplo a $y = x^2$

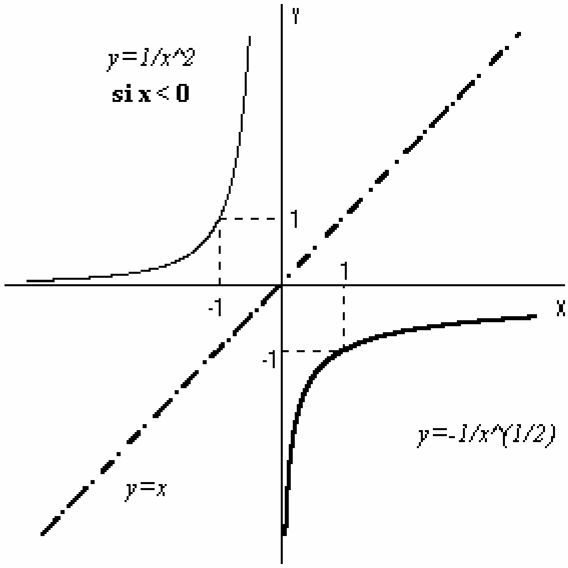
Para representar $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$ trazaremos la bisectriz del primer y tercer cuadrante y la inversa o recíproca será simétrica a $f(x)$ respecto de esta bisectriz ya que si por ejemplo $y = f(x)$ pasa por (2, 4) la inversa o recíproca pasará por (4, 2)

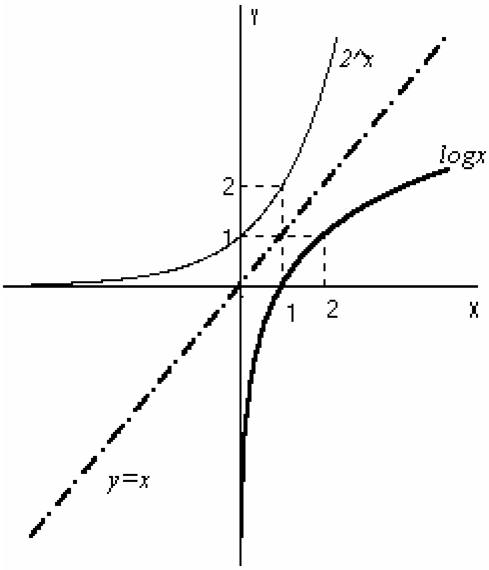
Ejemplos:

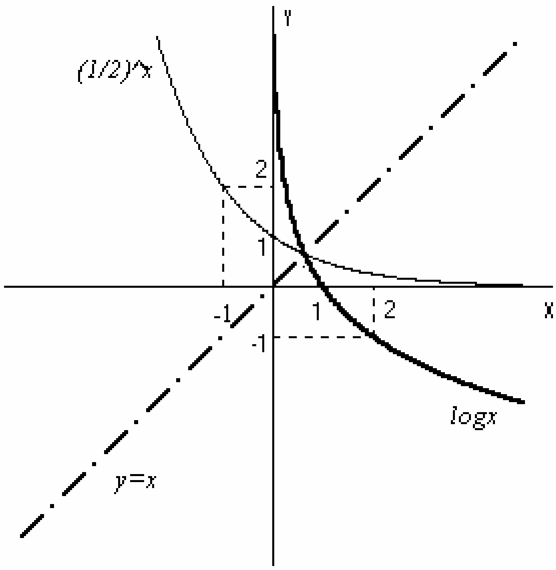


Y
y=x^2
si x > 0
y=x^(1/2)
1
1
X
y=x
Y
y=x^2
si x < 0
1
1
-1
-1
X
y=x
y=-x^(1/2)
Y
y=x^3
y=x^(1/3)
1
-1
1
-1
X
y=x
Y
y=1/x
1
y=1/x
X
-1
1
-1
y=x







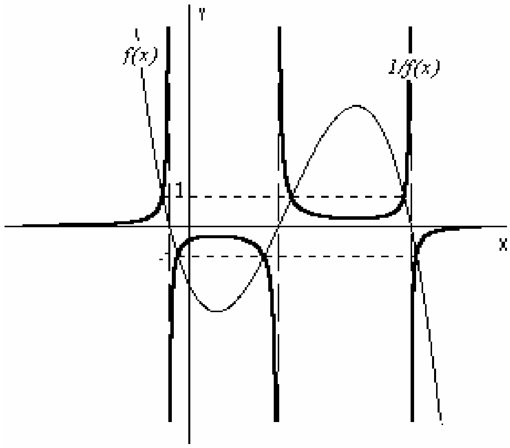


J) REPRESENTACIÓN DE $y = \dfrac{1}{f(x)}$ A PARTIR DE $y = f(x)$

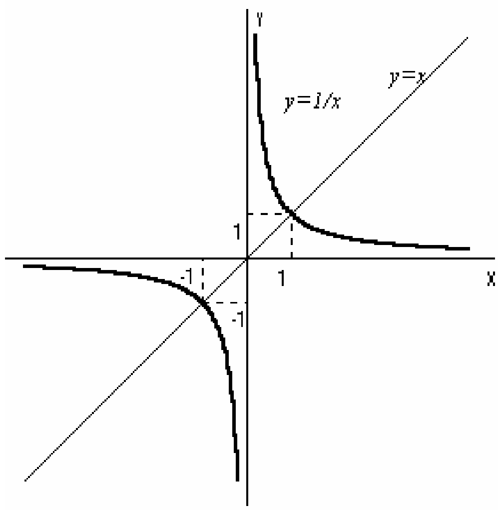
Para la construcción gráfica de $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)}$ a partir de *f(x)* tendremos en cuenta:

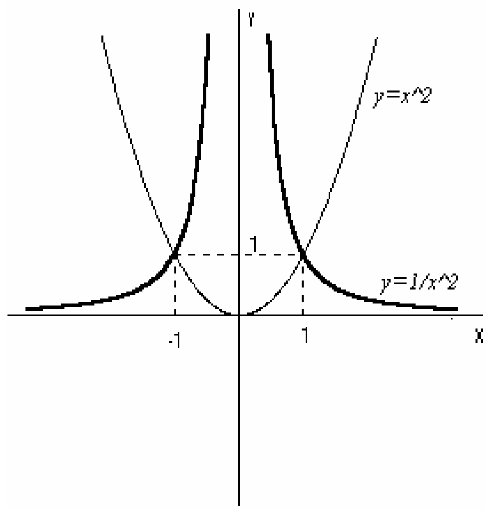
- Tanto *f(x)* como $\dfrac{\mathbf{1}}{f\ (x)}$ tienen el <u>mismo signo</u>, esto significa que si una es positiva (está por encima del eje ***x***) la otra también lo es y si una es negativa (está por debajo del eje ***x***) la otra también lo es.
- Si *f(x)*=1 entonces $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)} = \mathbf{1}$ Si *f(x)*=-1 entonces $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)} = \mathbf{-1}$ esto se traduce diciendo que las dos gráficas pasan por *(x,*1*)* *y (x,*-1*)*
- Si $f(x) \to 0^{+}$ entonces $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)} \to \infty$. Si $f(x) \to 0^{-}$ entonces $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)} \to -\infty$.

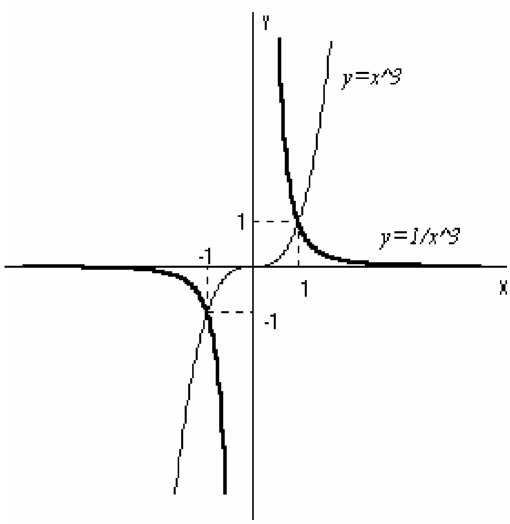
- $f(x) \to \infty$ entonces $\dfrac{1}{f(x)} \to 0^+$. Si $f(x) \to -\infty$ entonces $\dfrac{1}{f(x)} \to 0^-$.
- Si *f(x)* crece $\dfrac{\mathbf{1}}{f(x)}$ es decreciente; si $f(x)$ decrece $\dfrac{1}{f(x)}$ es creciente.

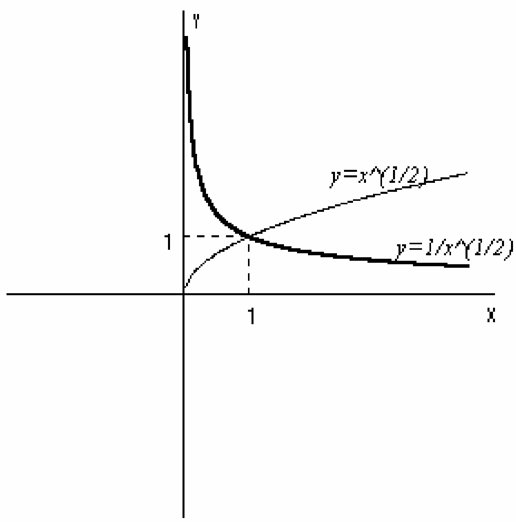


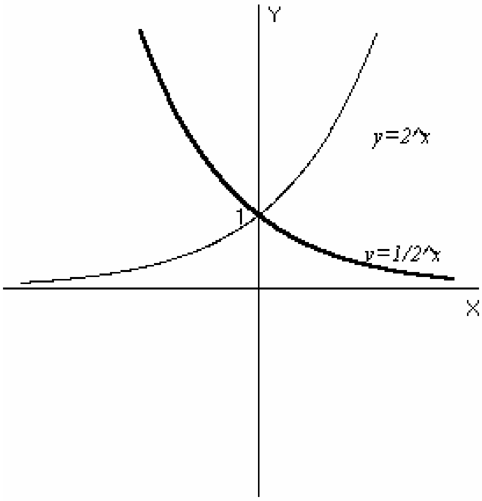
Ejemplos:

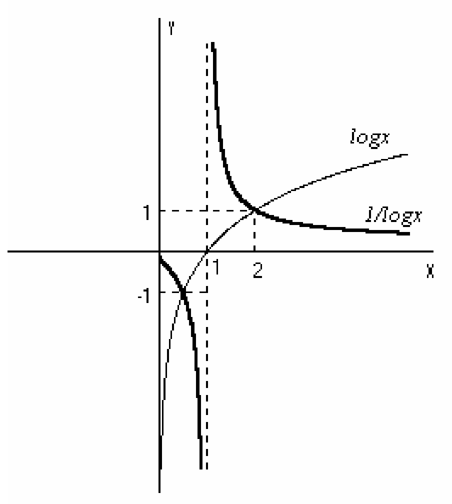








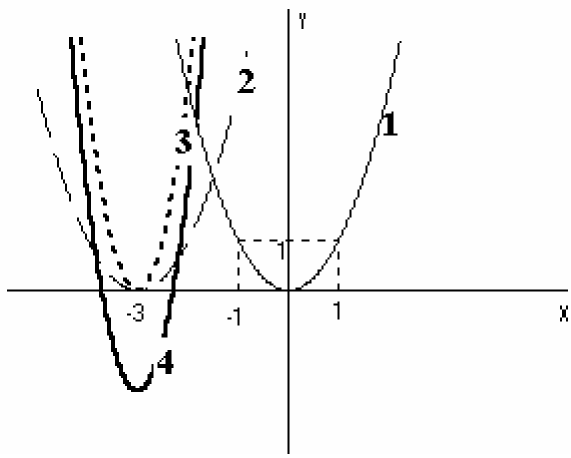


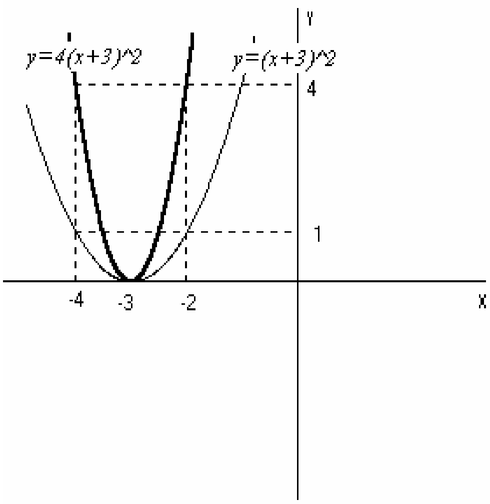


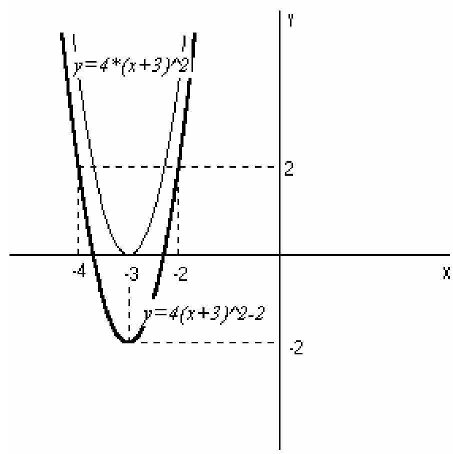
K) EJEMPLOS

Combinemos ahora los casos anteriores, para ello tendremos que tener muy en cuenta el orden de operaciones a realizar para construir correctamente la gráfica

- $f(x) = \mathbf{4}(x + \mathbf{3})^2 - \mathbf{2}$
  1. En este caso partimos de la función cuadrática
  2. Sumamos 3 unidades a la variable: trasladamos a lo largo del eje ***x*** 3 unidades a la izquierda.
  3. Multiplicamos por 4 la función: dilatamos a lo largo del eje ***y***.
  4. Restamos 2 unidades a la función: trasladamos a lo largo del eje ***y*** 2 unidades hacia abajo

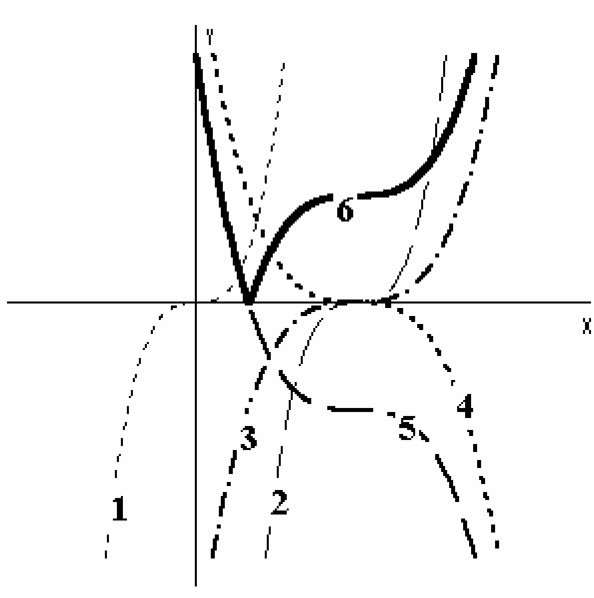


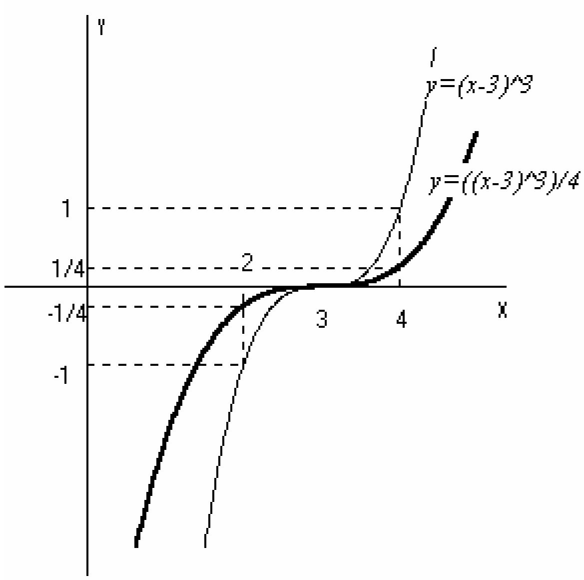


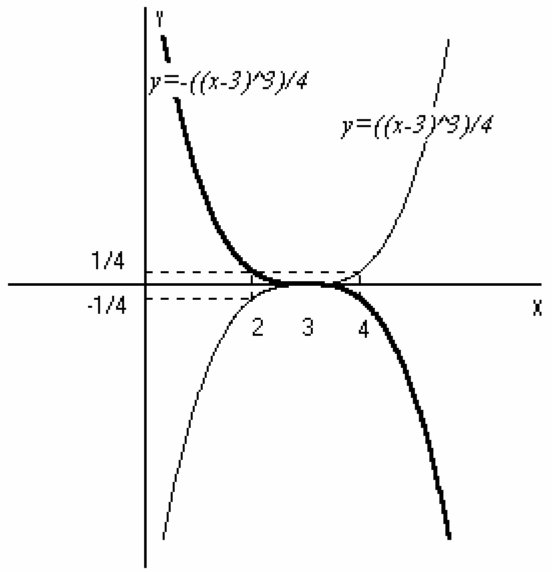


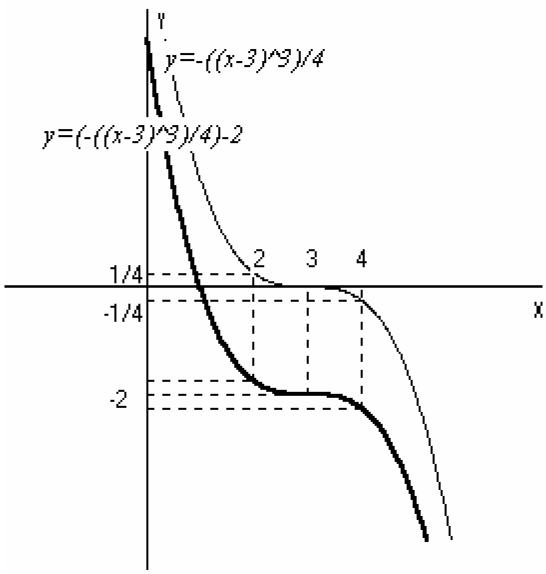
- $f(x)=\left|-\frac{1}{4}(x-3)^3-2\right|$

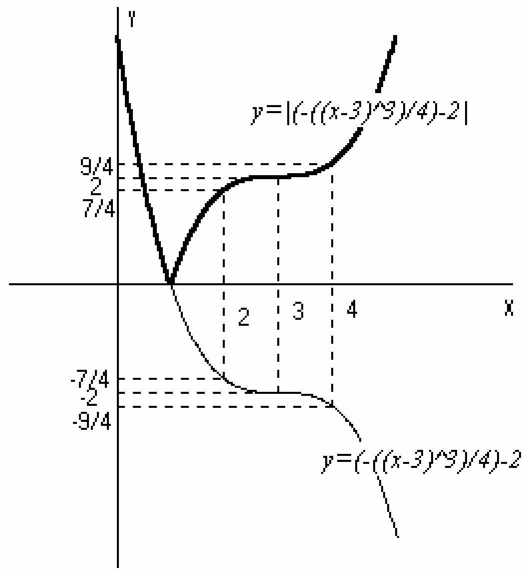
  1. En este caso partimos de la función cúbica
  2. Restamos 3 unidades a la variable: trasladamos a lo largo del eje ***x*** 3 unidades a la derecha.
  3. Multiplicamos por 1/4 la función: contraemos a lo largo del eje ***y***.
  4. Multiplicamos por –1: calculamos la simétrica respecto del eje ***x***
  5. restamos 2 unidades a la función: trasladamos a lo largo del eje ***y*** 2 unidades hacia abajo.
  6. Calculamos el valor absoluto.











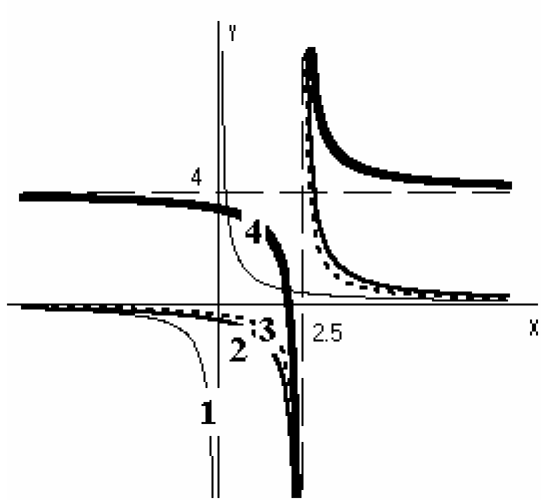
- Tipo $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; $f(x)=\dfrac{\mathbf{8}x-\mathbf{17}}{\mathbf{2}x-\mathbf{5}}$. Podemos realizar el cociente y se tiene que $\dfrac{\mathbf{8}x-\mathbf{17}}{\mathbf{2}x-\mathbf{5}}=\mathbf{4}+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}x-\mathbf{5}}$ Por lo tanto se trata de representar $f(x)=\mathbf{4}+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{x-\mathbf{2.5}}$

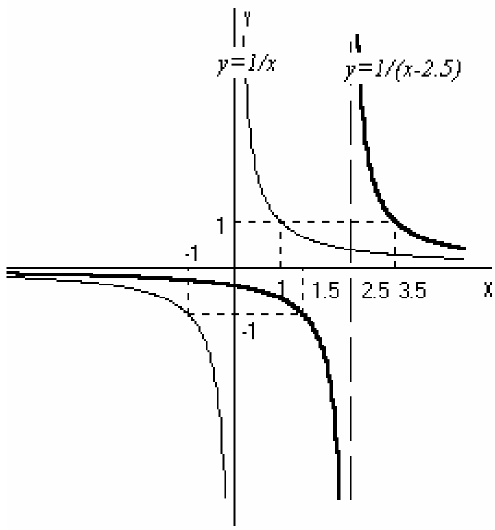
  1. Partimos de $f(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{x}$

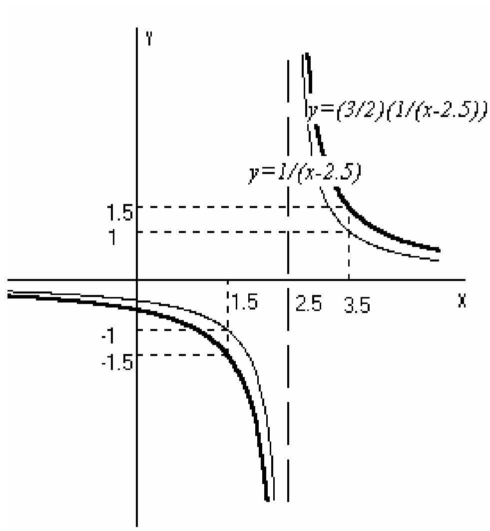
  2. Restamos 2.5 unidades a la variable: trasladamos a lo largo del eje ***x*** 2.5 unidades a la derecha.

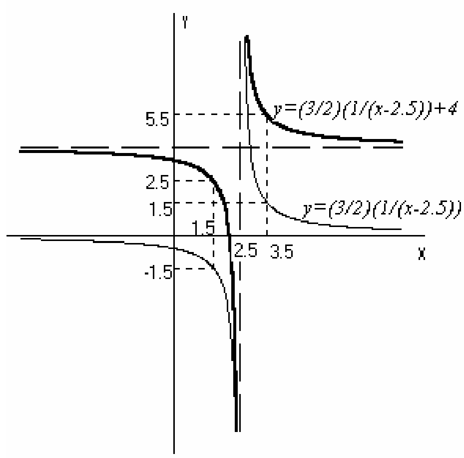
  3. Multiplicamos por 3/2 la función: dilatamos a lo largo del eje ***y***.

  4. Sumamos 4 unidades a la función: trasladamos a lo largo del eje ***y*** 4 unidades hacia arriba.









- $f(x)=\dfrac{\mathbf{12}x-\mathbf{18}}{-\mathbf{3}x+\mathbf{5}}$. Se trata de representar $f(x)=-\mathbf{4}+\dfrac{\mathbf{2}}{-\mathbf{3}x+\mathbf{5}}$ $f(x)=-\mathbf{4}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\cdot\dfrac{\mathbf{1}}{-x+\frac{5}{3}}$ a partir de $f(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{x}$

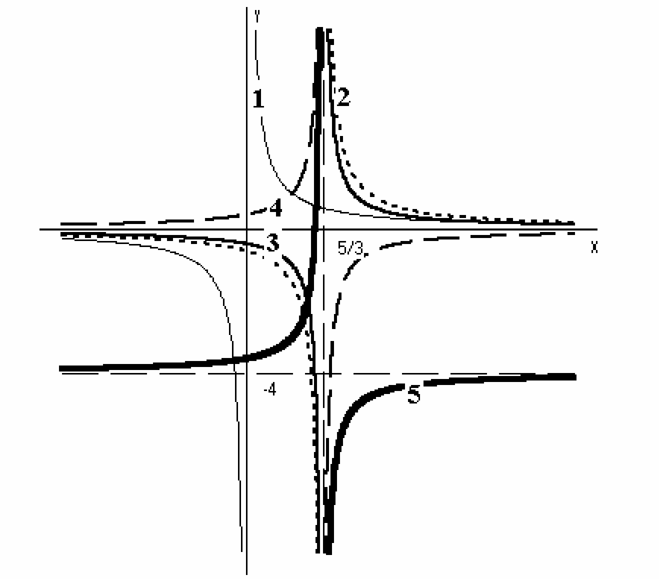
1. Partimos de $f(x)=\dfrac{\mathbf{1}}{x}$

2. Multiplicamos la variable por -1 : calculamos la simétrica respecto del eje ***y***

3. Sumamos $\dfrac{5}{3}$ unidades a la variable: trasladamos $\dfrac{5}{3}$ unidades a lo largo del eje ***x*** a la izquierda.

4. Multiplicamos por 2/3 la función: contraemos a lo largo del eje ***y***.

5. Restamos 4 unidades a la función: trasladamos a lo largo del eje ***y*** 4 unidades hacia abajo.



- Tipo $f(x)=c\sqrt{px+q}$; $\boldsymbol{f(x)=2\sqrt{-3x+2}}$

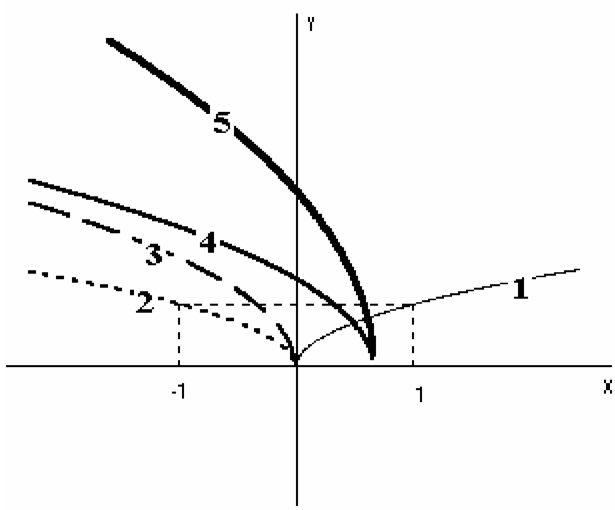
1. Partimos de $f(x)=\sqrt{x}$

2. Multiplicamos por –1 la variable: simetría respecto al eje ***y***

3. Multiplicamos por 3 la variable: contraemos el eje ***x***

4. **RESTAMOS** 2 a la variable: trasladamos lo largo del eje ***x*** (a la derecha) 2 unidades.

5. Multiplicamos por 2 la función: dilatamos a lo largo del eje ***y***.



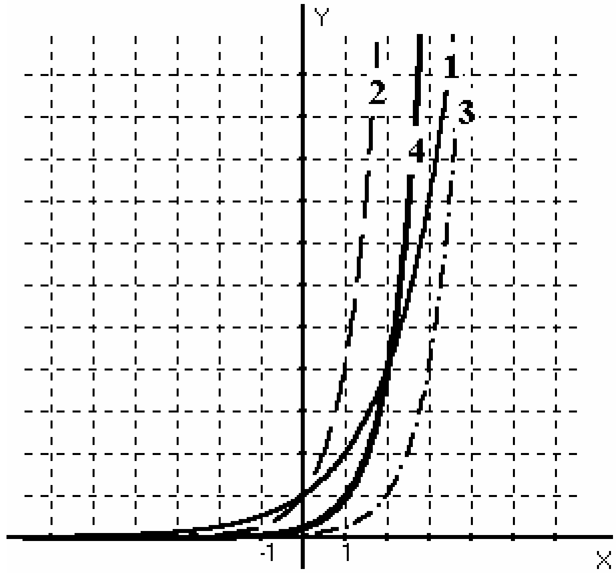
- Tipo $f(x) = ca^{px+q}$; $f(x) = \mathbf{4} \cdot \mathbf{2}^{2x-4}$

1. Partimos de $f(x) = \mathbf{2}^{x}$

2. Multiplicamos por 2 la variable: contraemos el eje ***x***

3. Restamos 4 a la variable: trasladamos lo largo del eje ***x*** (a la derecha) 4 unidades.

4. Multiplicamos por 4 la función: dilatamos a lo largo del eje ***y***.



- Tipo $f(x) = c \cdot \log_a(kx)$; $f(x) = -\mathbf{3}\log_3(\mathbf{2}x)$

1. Partimos de $f(x) = \log_3 x$

2. Multiplicamos por 2 la variable: contraemos el eje ***x***

3. .Multiplicamos por 3 la función: dilatamos a lo largo del eje ***y***.

4. Multiplicamos por –1 la función: simetría respecto al eje ***x***