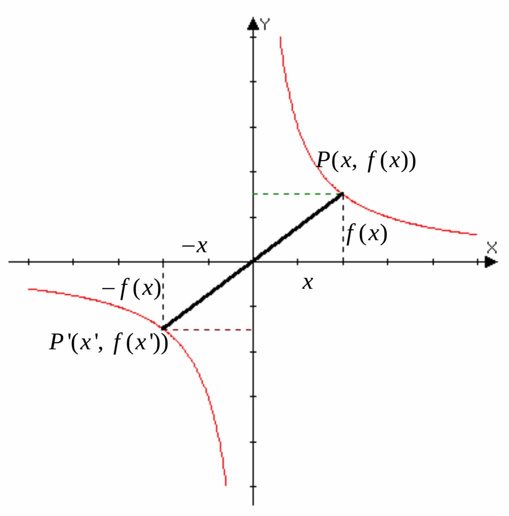
SIMETRIA RESPECTO DEL ORIGEN. FUNCIONES IMPARES:

Una función es simétrica respecto del origen $O(0,0)$ cuando todo punto de la gráfica de f tiene su simétrico respecto de O en la misma gráfica.



Si $P(x, f(x))$ es un punto de la gráfica, su simétrico $P'(x', f(x'))$ pertenece también a la misma gráfica: Si consideramos la siguiente figura, los puntos P y P' son simétricos respecto del origen y sus coordenadas verifican que $\begin{cases} x' = -x \\ f(x') = -f(x) \end{cases}$

Por tanto,

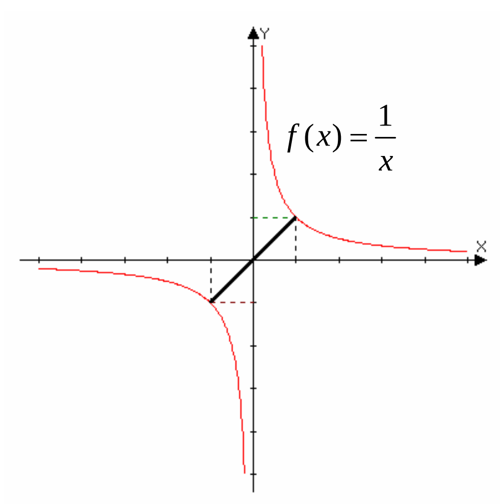
Una función es simétrica respecto del origen $O(0,0)$ cuando para todo punto x del dominio D se tiene que $-x$ pertenece a D y $f(-x) = -f(x)$.

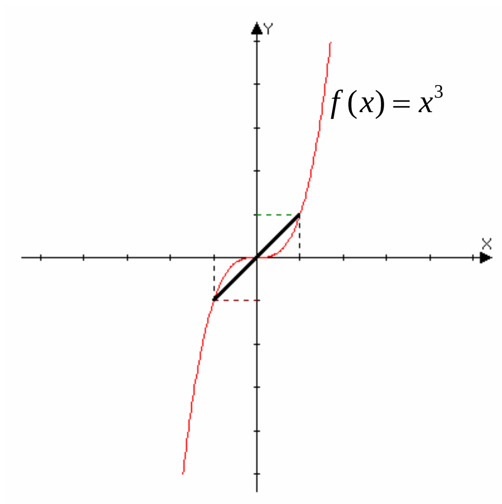
Las funciones simétricas respecto del origen reciben el nombre de FUNCIONES IMPARES. Este nombre proviene de que en el caso de que se trate de funciones polinómicas simétricas respecto del origen, éstas tienen todos sus exponentes impares.

Ejemplos de funciones simétricas respecto del origen:

- La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ya que $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

  Su gráfica como sabemos es (hipérbola equilátera) :





- La función $f(x) = x^3$ ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

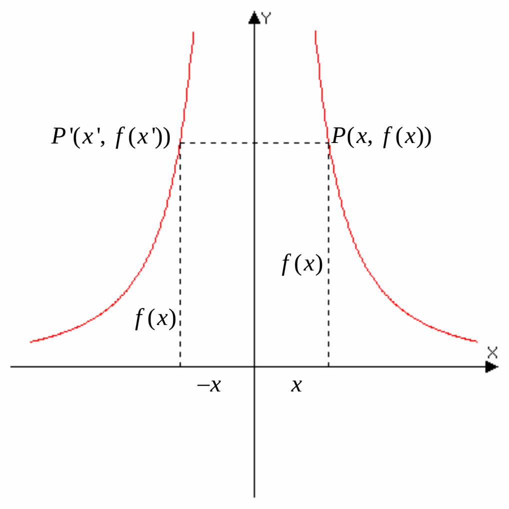
- La función $f(x) = x \cdot |x|$ ya que $f(-x) = (-x) \cdot |-x| = -x \cdot |x| = -f(x)$

SIMETRIA RESPECTO DEL EJE DE ORDENADAS (*OY*). FUNCIONES PARES:

Sea $f: D \to \mathbb{R}$. Se dice que f es simétrica respecto del eje de ordenadas (*OY*) cuando todo punto de la gráfica de f tiene su simétrico respecto de OY en la misma gráfica.

Si $P(x, f(x))$ es un punto de la gráfica, su simétrico $P'(x', f(x'))$ pertenece también a la misma gráfica: Si consideramos la siguiente figura, los puntos P y P' son simétricos respecto del eje *OY* y sus coordenadas verifican que

$$\begin{cases} x' = x \\ f(x') = f(x) \end{cases}$$



Una función es simétrica respecto del eje de ordenadas (*OY*) cuando para todo punto x del dominio D se tiene que $-x$ pertenece a D y $f(-x) = f(x)$.

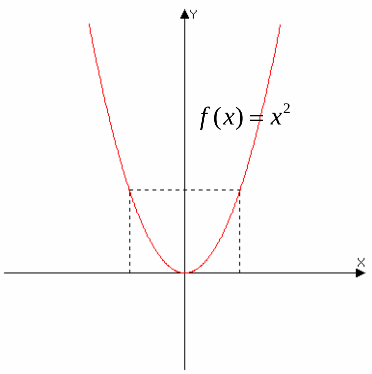
Geométricamente significa que si doblamos el papel por el eje *OY*, las dos partes de la gráfica coinciden.

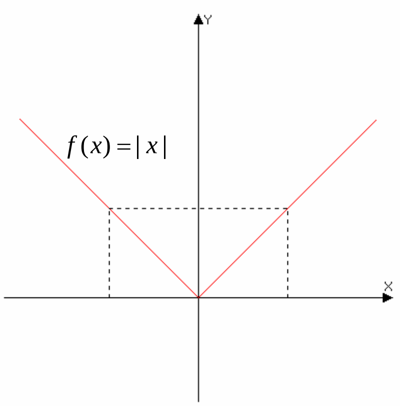
Estas funciones reciben también el nombre de FUNCIONES PARES. Este nombre proviene de que en el caso de que se trate de funciones polinómicas simétricas respecto del eje *OY*, éstas tienen todos sus exponentes pares.

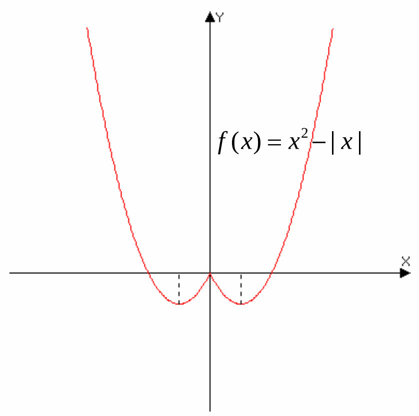
Ejemplos de funciones simétricas respecto del eje de ordenadas:

- La función cuadrática $f(x) = x^2$ ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- La función valor absoluto $f(x) = |x|$ ya que $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$
- La función $f(x) = x^2 - |x|$ ya que $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$

Sus respectivas gráficas serían:







FUNCIÓN PERIÓDICA:

Sea $f: D \to \mathbb{R}$. Se dice que f es periódica si existe un número real, no nulo, $\boldsymbol{T}$, llamado PERIODO, tal que para todo $x \in D$, $x + T \in D$ y se verifica que $f(x+T) = f(x)$.

De la propia definición se deduce que si T es un periodo de la función f, también lo es $2T$, $3T$,..., es decir sus periodos son múltiplos enteros del menor periodo positivo T, que recibe el nombre de periodo principal o propio.

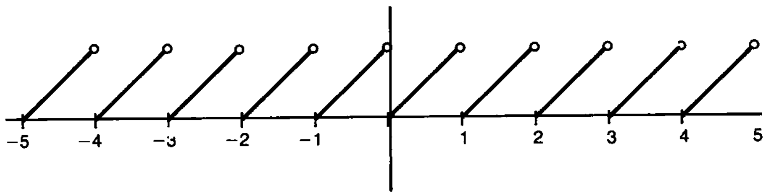
El conocimiento de la gráfica de una función en un periodo nos permite construir por periodicidad toda la gráfica.

Ejemplos de funciones periódicas:

- Todas las funciones circulares:

  Las funciones seno y coseno tienen por periodo $T = 2\pi$, mientras que la función tangente y la cotangente tienen por periodo $T = \pi$.

- La función decimal o mantisa: su periodo principal es 1.



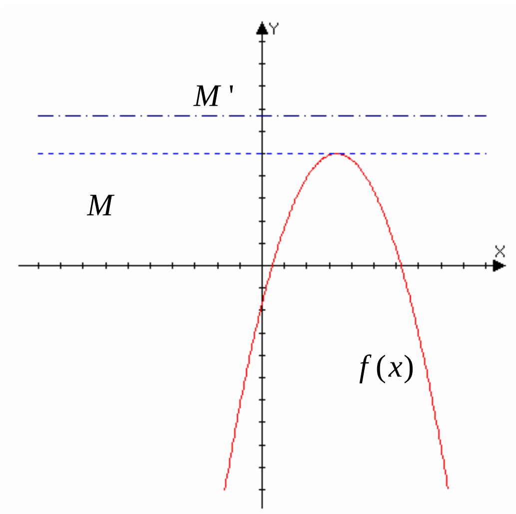
FUNCIONES ACOTADAS.

Funciones acotadas superiormente.

Una función f se dice que está acotada superiormente si existe un número real M tal que

$$f(x) \le M \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Este número real M recibe el nombre de **COTA SUPERIOR** de la función *f*. Geométricamente significa que ninguna imagen es superior al valor M y, por tanto, la gráfica de la función f estará por debajo de la recta $y = M$.



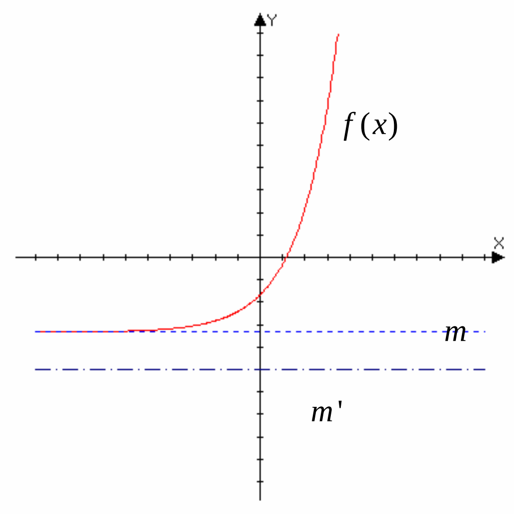
NOTA: Si M es una cota superior de la función f, cualquier otro número real M' mayor que M, también es cota superior de f. En consecuencia, si una función está acotada superiormente siempre tendrá un conjunto de cotas superiores.

Funciones acotadas inferiormente.

Una función f se dice que está acotada inferiormente si existe un número real m tal que

$$f(x) \geq m \qquad \forall\, x \in Dom(f)$$

Este número real m recibe el nombre de COTA INFERIOR de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es inferior al valor m y, por tanto, la gráfica de la función f estará por encima de la recta $y = m$.



NOTA: Si m es una cota superior de la función f, cualquier otro número real m' menor que m, también es cota inferior de f. En consecuencia, si una función está acotada inferiormente siempre tendrá un conjunto de cotas inferiores.

Funciones acotadas.

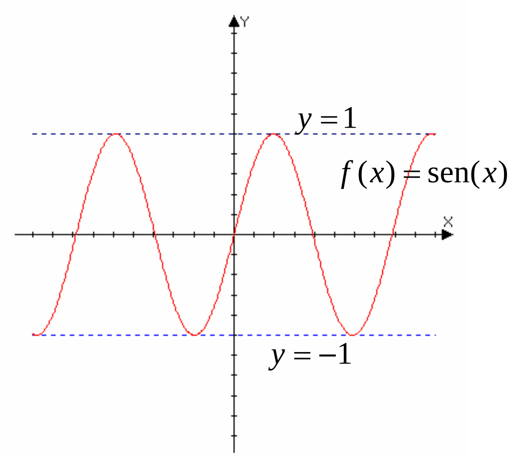
Una función se dice que está acotada si lo está inferior y superiormente.

Por estar acotada superiormente, existirá un número real M que es mayor o igual que todas las imágenes de la función y por estar acotada inferiormente, existirá otro número real m que es menor o igual que todas las imágenes de la función. En consecuencia,

$$\exists\, m, M \;/\; m \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in Dom(f)$$

lo cual significa que todas las imágenes de nuestra función estarían comprendidas entre m y M y, por tanto, geométricamente, la gráfica de la función f estaría en la banda comprendida entre las rectas $y = m$ e $y = M$.

Ejemplo: La función $f(x) = \text{sen}(x)$ es una función acotada ya que está acotada superiormente por $M = 1$ e inferiormente por $m = -1$.



Una definición equivalente de función acotada sería la siguiente:

$$f \text{ está acotada} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in R_+^* \;/\; |\, f(x)| \leq k \qquad \forall\, x \in Dom(f)$$

Podríamos demostrar que la suma y el producto de funciones acotadas es otra función acotada y, en consecuencia, el conjunto de funciones acotadas tendría la misma estructura que el conjunto de funciones reales de variable real.

Funciones acotadas en un punto.

Sea f una función definida de D en $\mathbb{R}$ y sea a un punto perteneciente a D ($a \in D$).

- Se dice que f está acotada superiormente en el punto $a \in D$ si existe un entorno $V(a,r)$, en el cual la función está acotada superiormente.
- Se dice que f está acotada inferiormente en el punto $a \in D$ si existe un entorno $V(a,r)$, en el cual la función está acotada inferiormente.
- Se dice que f está acotada en el punto $a \in D$ si está acotada superior e inferiormente en el punto $a \in D$

Resulta evidente que si una función f está acotada en su dominio D estará acotada en cada uno de los puntos de D, pero el recíproco no tiene por qué verificarse: una función puede estar acotada en cada uno de los puntos de su dominio y, sin embargo, no estar acotada en su dominio. Es lo que le ocurre, por ejemplo, a la función cuadrática $f(x) = x^2$: está acotada en todos sus puntos y no está acotada en su dominio.

Extremo superior. Máximo absoluto.

Se llama extremo superior de una función f a la menor de las cotas superiores de dicha función. Se representa por $\sup(f)$.

Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de máximo absoluto.

Por tanto, se dice que una función f tiene un máximo absoluto o global en un punto $a \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D.$

Extremo inferior. Mínimo absoluto.

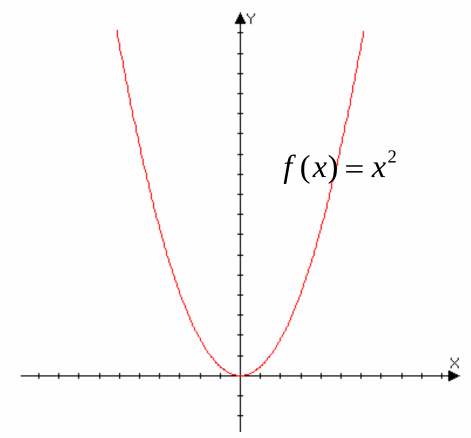
Se llama extremo inferior de una función f a la mayor de las cotas inferiores de dicha función. Se representa por $\inf(f)$.

Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de mínimo absoluto.

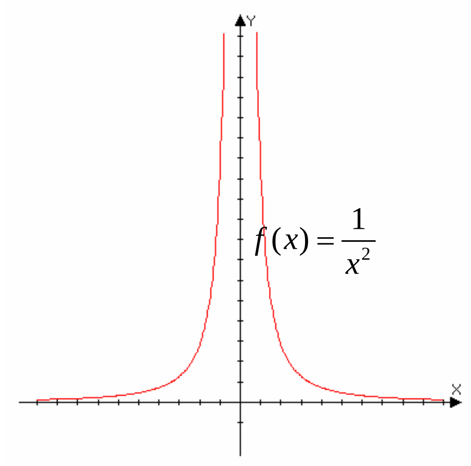
Por tanto, se dice que una función f tiene un mínimo absoluto o global en un punto $a \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in D.$

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2$ está acotada inferiormente por el cero y cualquier valor negativo. La mayor de las cotas inferiores sería el cero, por lo que nuestra función tiene extremo inferior y como existe un punto en el dominio en el que se alcanza este extremo inferior, diremos que nuestra función tiene un mínimo absoluto en el punto $x = 0$.



- La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ también tiene como cota inferior máxima el valor $k = 0$; sin embargo, esta función no alcanza el valor cero en ningún punto de su dominio, por lo que tiene extremo inferior y no tiene máximo absoluto.



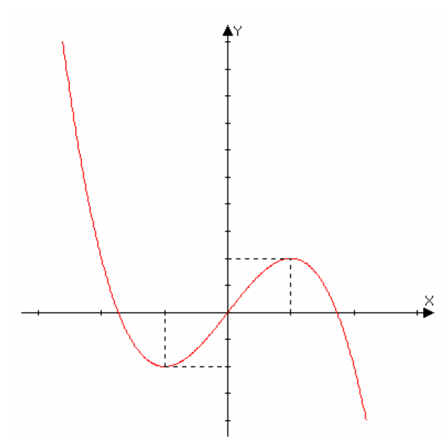
Máximos y mínimos relativos de una función.

Sea f una función definida de D en $\mathbb{R}$ y sea a un punto perteneciente a D.

Se dice que una función f tiene un ***máximo relativo*** en un punto $a \in D$ si existe un entorno de a, $V(a,r)$, en el cual se verifica que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V(a,r) \cap D$.

Se dice que una función f tiene un ***mínimo relativo*** en un punto $a \in D$ si existe un entorno de a, $V(a,r)$, en el cual se verifica que $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in V(a,r) \cap D$.

La palabra relativo nos indica que estamos comparando la imagen de f en el punto a con la imagen de puntos próximos al punto a. En consecuencia, no debemos confundir los máximos y mínimos absolutos de una función con los máximos y mínimos relativos de la misma: mientras que los primeros son únicos, los segundos no tienen por qué serlos (puede haber más de uno).



También debemos tener en cuenta que los máximos y mínimos absolutos son al mismo tiempo relativos, pero la recíproca no siempre es cierta: un máximo o mínimo relativo no tiene por qué ser absoluto.

En el ejemplo cuya gráfica se adjunta vemos que la función tiene un máximo y un mínimo relativos, pero no tiene extremos absolutos.

FUNCIONES MONÓTONAS.

Una función *f* se dice que es monótona en un punto *a* cuando sea creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente en ese punto.

Funciones crecientes en un punto.

Una función es creciente en un punto *a* si para cualquier *x* valor perteneciente a un entorno de *a*, se verifica que:

$$\forall x \in V(a,r): \begin{cases} \text{si } x < a \Rightarrow f(x) \le f(a) \\ \text{si } x > a \Rightarrow f(x) \ge f(a) \end{cases}$$

Esta relación también puede expresarse en función de la tasa de variación de la siguiente forma: pasando todo al primer miembro de las desigualdades obtenemos

$$\begin{cases} si\; x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) \le 0 \\ si\; x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) \ge 0 \end{cases}$$

Por tanto, si dividimos la variación de la imagen entre la variación del original, tanto si el punto *x* está a la izquierda como si está a la derecha del punto *a*, el cociente (tasa de variación media) será mayor o igual que cero:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0$$

Funciones estrictamente crecientes en un punto.

Una función es estrictamente creciente en un punto *a* si para cualquier *x* valor perteneciente a un entorno de *a*, se verifica que:

$$\forall x \in V(a,r): \begin{cases} si\; x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ si\; x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$$

Esta relación también puede expresarse en función de la tasa de variación de la siguiente forma: pasando todo al primer miembro de las desigualdades obtenemos

$$\begin{cases} si\; x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \\ si\; x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \end{cases}$$

Por tanto, si dividimos la variación de la imagen entre la variación del original, tanto si el punto *x* está a la izquierda como si está a la derecha del punto *a*, el cociente (tasa de variación media) será mayor o igual que cero:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

Funciones decrecientes en un punto.

Una función es decreciente en un punto *a* si para cualquier *x* valor perteneciente a un entorno de *a*, se verifica que:

$$\forall x \in V(a,r): \begin{cases} si\ x < a \Rightarrow & f(x) \geq f(a) \\ si\ x > a \Rightarrow & f(x) \leq f(a) \end{cases}$$

Podemos observar como a medida que va aumentando el original, las imágenes van disminuyendo.

Esta relación también puede expresarse en función de la tasa de variación de la siguiente forma: pasando todo al primer miembro de las desigualdades obtenemos

$$\begin{cases} si\ x - a < 0 \Rightarrow & f(x) - f(a) \geq 0 \\ si\ x - a > 0 \Rightarrow & f(x) - f(a) \leq 0 \end{cases}$$

Por tanto, si dividimos la variación de la imagen entre la variación del original, tanto si el punto *x* está a la izquierda como si está a la derecha del punto *a*, el cociente (tasa de variación media) será mayor o igual que cero:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

Funciones estrictamente decrecientes en un punto.

Una función es decreciente en un punto *a* si para cualquier *x* valor perteneciente a un entorno de *a*, se verifica que:

$$\forall x \in V(a,r): \begin{cases} si\ x < a \Rightarrow & f(x) > f(a) \\ si\ x > a \Rightarrow & f(x) < f(a) \end{cases}$$

Podemos observar como a medida que va aumentando el original, las imágenes van disminuyendo.

Esta relación también puede expresarse en función de la tasa de variación de la siguiente forma: pasando todo al primer miembro de las desigualdades obtenemos

$$\begin{cases} si\ x - a < 0 \Rightarrow & f(x) - f(a) > 0 \\ si\ x - a > 0 \Rightarrow & f(x) - f(a) < 0 \end{cases}$$

Por tanto, si dividimos la variación de la imagen entre la variación del original, tanto si el punto *x* está a la izquierda como si está a la derecha del punto *a*, el cociente (tasa de variación media) será mayor o igual que cero:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

En resumen:

Sea f una función definida de D en $\mathbb{R}$ y sea a un punto perteneciente a D.

$$f \text{ es} \left\{ \begin{array}{l} creciente \\ estrictamente\ creciente \\ decreciente \\ estrictamente\ decreciente \end{array} \right\} \text{en } a \in D \iff \forall x \in V(a,r): \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos:

- Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 0$.

  Para ello calculamos la tasa de variación media de la función en el punto de abscisa cero:

  $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3-0}{x-0} = \frac{x^3}{x} = x^2 > 0 \qquad \forall x \in V(0,r)$$

  En consecuencia, al ser la tasa de variación media estrictamente positiva en cualquier entorno de cero, la función cúbica es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = 0$.

- Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

  Para ello calculamos la tasa de variación media de la función en el punto de abscisa uno:

  $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(x^2-3x+2)-0}{x-1} = \frac{(x-1).(x-2)}{x-1} = x-2 < 0 \qquad \forall x \in V(1,r)$$

  En consecuencia, al ser la tasa de variación media estrictamente negativa en cualquier entorno de uno, la función dada es estrictamente decreciente en el punto de abscisa $x = 1$.

- Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es estrictamente decreciente en todo punto.

  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = \frac{a-x}{ax(x-a)} = -\frac{1}{ax} < 0 \qquad \forall x \in V(a,r)$$ que no contenga al punto cero.

Funciones monótonas en un intervalo.

Sea f una función definida de D en $\mathbb{R}$.

Se dice que f es $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ creciente \\ \bullet\ estrictamente\ creciente \\ \bullet\ decreciente \\ \bullet\ estrictamente\ decreciente \end{array} \right\}$ en un intervalo $I \subseteq D$, si $\forall x, x' \in I$ se verifica la siguiente relación $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \\ \bullet\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \\ \bullet\ x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \\ \bullet\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \end{array} \right.$

Es evidente que si una función es monótona en *D*, lo es en cada uno de sus puntos. Sin embargo, el recíproco es falso: una función puede ser monótona en todos sus puntos y no serlo en su dominio.

En la práctica, el método más cómodo para estudiar la monotonía de una función es mediante la tasa de variación media. Operando igual que en la monotonía de una función en un punto llegamos a la siguiente definición de función monótona en un intervalo (equivalente a la anterior):

- Sea f una función definida de *D* en $\mathbb{R}$.

$$f \text{ es} \left\{ \begin{array}{l} \textit{creciente} \\ \textit{estrictamente creciente} \\ \textit{decreciente} \\ \textit{estrictamente decreciente} \end{array} \right\} \text{en } I \subseteq D \iff \forall x, x' \in I : \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos:

- Estudiar la monotonía de la función lineal $f(x) = ax + b$ según los distintos valores de *a*

  Calculamos el cociente incremental:

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{(ax + b) - (ax' + b)}{x - x'} = \frac{ax - ax'}{x - x'} = \frac{a(x - x')}{x - x'} = a$$

  Al ser el cociente incremental igual a "*a*", tendremos:

  - Si $a > 0$, entonces la función será estrictamente creciente.
  - Si $a < 0$, entonces la función será estrictamente decreciente.

- Demostrar que la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en *R*.

  Calculamos el cociente incremental:

$$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{x^3 - x'^3}{x - x'} = \frac{(x - x')(x^2 + xx' + x'^2)}{x - x'} = x^2 + xx' + x'^2 > 0 \qquad \forall x, x' \in R$$

  Por tanto, la función cúbica es estrictamente creciente en *R*.

EJERCICIOS.

1. **Calcular el dominio, ceros y simetrías de las siguientes funciones:**

   - $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$

     Al ser una función racional su dominio será el conjunto de números reales salvo los puntos que anulan el denominador. Por tanto:

$$Dom(f) = R - \{-1, +1\}$$

     Para calcular los ceros de la función igualamos a cero:

$$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{x^2-1}=0 \;\Rightarrow\; x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; C(f)=\{2\}$$

Simetría: calculamos $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$

$$f(-x)=\frac{(-x)-2}{(-x)^2-1}=\frac{-x-2}{x^2-1}=-\frac{x+2}{x^2-1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(-x)\neq f(x) \\ f(-x)\neq -f(x) \end{cases}$$

Por tanto, no tiene simetría respecto del eje *OY* ni respecto del origen.

- $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$

Dominio: $Dom(f)=\{x\in R \,/\, x^2-6x+8\geq 0\}$ Veamos cuales son estos puntos:

$$x^2-6x+8\geq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x-4)\geq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-2\geq 0 \\ x-4\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\geq 2 \\ x\geq 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\geq 4 \\ \left.\begin{matrix} x-2\leq 0 \\ x-4\leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\leq 2 \\ x\leq 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\leq 2 \end{cases}$$

Por tanto, $Dom(f)=\left]-\infty,2\right]\cup\left[4,+\infty\right[=\mathbb{R}-\left]\,2,4\,\right[$

Ceros:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}=0 \;\Rightarrow\; x^2-6x+8=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

- $f(x)=L(x^2+1)$

Dominio: el dominio de la función logarítmica es el conjunto de puntos que hacen el argumento estrictamente positivo. Entonces:

$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x^2+1>0\}=\mathbb{R}$ puesto que x^2+1 siempre es estrictamente mayor que cero.

Ceros: $f(x)=0 \;\Rightarrow\; L(x^2+1)=0 \;\Rightarrow\; x^2+1=1 \;\Rightarrow\; x=0$

Simetría:

$$f(-x)=L((-x)^2+1)=L(x^2+1)=f(x)$$

Por tanto, es una función par y es simétrica respecto del eje *OY*.

2. Dada la función decimal $f(x)=dec(x)$ razona si:

a. **Es periódica o no**.

La parte decimal de un número real es una función que toma siempre valores comprendidos entre 0 y 1: cada vez que incrementamos un número real en una unidad, se repite la misma imagen (sólo varía su parte entera). Es, por tanto, una función periódica de período ***T* = 1**.

b. **Está acotada superiormente e inferiormente**.

Al tomar siempre valores comprendidos entre 0 y 1, la función $f(x)=dec(x)$ estará acotada superior e inferiormente; luego, estará acotada:

Cotas superiores = {valores mayores o iguales que 1}

Cotas inferiores = {valores menores o iguales que 0}

c. **Tiene extremo superior y extremo inferior**.

$\sup(f) =$ **{**menor cota superior**} = 1**

$\inf(f) =$ **{**mayor cota inferior**} = 0**

d. **Tiene máximo y mínimo**.

No tiene máximo puesto que el valor 1 no lo alcanza en ningún punto mientras que si tiene mínimo ya que el valor cero se alcanza en cualquier punto de abscisa entera.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Calcular dominio, ceros y simetrías de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 \cdot |x| \qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \qquad f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}} \qquad f(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen} x} \qquad f(x) = L(1-x^2)$

2. Hallar razonadamente el máximo o el mínimo de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 \qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad f(x) = |x| \qquad f(x) = x^2 \cdot |x| \qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

3. Demuestra la veracidad o no de las siguientes proposiciones:
   a. La suma de dos funciones pares es una función par.
   b. El producto de dos funciones pares es una función par.
   c. La suma de dos funciones impares es una función impar.
   d. El producto de dos funciones impares es una función impar.

4. Calcular la expresión analítica de las siguientes funciones:
   - $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
   - $f(x) = x^2 . |x|$
   - $f(x) = |x-1| + |x+2|$
   - $f(x) = |x| + |x+2| + |x-3|$
   - $f(x) = |x-1| - |x+2|$
   - $f(x) = \big||x-1| - |x+2|\big|$

5. Sean las funciones dadas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

   Calcular: $f+g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g},\ f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g,\ f\circ f\circ f$
   - Sus dominios máximos.

6. Una función es tal que el máximo y el mínimo coinciden, ¿qué se puede decir de ella? Si existe alguna representarla.

7. Demuestra que la suma y el producto de funciones acotadas en un dominio *D* es otra función acotada.

8. ¿Qué diferencia existe entre extremo superior (inferior) y máximo (mínimo) de una función? ¿Pueden coincidir? Poner un ejemplo que aclare la respuesta.

9. Demuestra que si $f(x)$ es creciente, también lo es $f(x) + k$, siendo k una constante.

10. Demostrar que si f y g son crecientes en un dominio D, también lo es $f + g$.

11. Estudiar el sentido de variación de f y $1/f$