Autoevaluación

Página 126

1 Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x = 5 \ \rightarrow \ x = 5/3 \\ y = 2 - x \ \rightarrow \ y = 1/3 \end{array}$$

Comprobamos si $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica la 1.ª ecuación: $\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$

El sistema es *incompatible*, no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 2x \\ \\ x - 2(2x) = 0 \ \rightarrow \ -3x = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \end{array}$

Sustituyendo $x = 0$ en las ecuaciones 1.ª y 2.ª obtenemos $z = 0$, $y = 0$.

El sistema es *compatible determinado*, tiene solución única. Los tres planos se cortan en un punto. Como el sistema es homogéneo, ese punto es el origen de coordenadas $O = (0, 0, 0)$.

2 Comprueba que el siguiente sistema es compatible determinado y halla su solución:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Si el sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $ran(A) = ran(A') = 3$, según el teorema de Rouché. Como A' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|A'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.

Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

3 **Sea** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$**:**

a) Estudia el rango de M **según los valores de** m**.**

b) Para $m = 1$**, calcula la inversa de** M**.**

a) Para que los vectores fila de M sean linealmente independientes, $ran\,(M)$ tiene que valer 3.

Para que $ran\,(M) = 3 \to |M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m \to m = -1,\ m = 0$$

Los vectores fila de M son linealmente independientes si $m \neq -1$ y $m \neq 0$.

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 0 \to ran\,(M) = 3$.
- Si $m = -1 \to M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

  Tomamos el menor formado por las dos primeras columnas y la primera y tercera filas.

  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\,(M) = 2$$

- Si $m = 0 \to M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

  Tomamos el menor formado por las dos primeras columnas y las dos primeras filas.

  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\,(M) = 2$$

b) Si $m = 1 \to M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to |M| = 2 \to M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

4 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$**, obtén todas las matrices** B **que conmutan con** A**, es decir, las que verifican que** $A \cdot B = B \cdot A$**.**

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ d = a - b \\ a - c = d \\ b - d = c - d \end{array}\right\} \begin{array}{l} c = b \\ d = a - b \end{array}$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

5 **Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX - 2X = B$ y halla su valor siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.**

$AX - 2X = B \to (A - 2I)X = B \to X = (A - 2I)^{-1}B$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

6 **Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que $det(M) = -2$. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.**

$M = (F_1\ \ F_2\ \ F_3)$, $|M| = -2$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar la 1.ª y 2.ª filas.

(2) Sacamos como factor común el 2 en la 1.ª fila y el –1 en la 2.ª fila.

(3) El valor del determinante no cambia al sumar la 1.ª fila a la 2.ª, ni al restar la 2.ª fila a la 3.ª.

7 **Discute este sistema según los valores de a, resuélvelo cuando sea posible e interpreta geométricamente cada caso:**

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a+3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} ax + y &= a \\ (a+1)x + 2y + z &= a+3 \\ 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Estudiamos el rango de A buscando los valores que hacen $|A| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \to a = -1$$

- Si $a \neq -1$: $ran(A) = ran(A') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

  Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 2$$

  Solución: (1, 0, 2). Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $a = -1$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

Por tanto, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = -1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \;\rightarrow\; x = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2y \;\rightarrow\; z = 2 - 2\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$. Son tres planos que se cortan en una recta.

8 a) Comprueba que el siguiente sistema de ecuaciones es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) ¿Es posible añadirle una nueva ecuación de forma que el sistema sea compatible determinado?

c) ¿Y para que sea incompatible?

Justifica tus respuestas y pon ejemplos.

a) El sistema es compatible por ser homogéneo.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) < 3 \;\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

b) Sí, por ejemplo, si añadimos la ecuación $z = 0$ el sistema es *compatible determinado*.

c) No es posible porque el sistema es compatible por ser homogéneo.

9 Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases, A, B y C, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:

	PESO (g)	PRECIO (€)
A	250	1,00
B	500	1,80
C	1 000	3,30

Una farmacia compra 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 €. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

Llamemos: $\begin{cases} x = \text{n.° de envases de } A \\ y = \text{n.° de envases de } B \\ z = \text{n.° de envases de } C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 0,25x + 0,5y + z = 2,5 \\ x + 1,8y + 3,3z = 8,9 \end{cases}$

Resolvemos por la regla de Cramer: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \\ 1 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix} = -0,025$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2,5 & 0,5 & 1 \\ 8,9 & 1,8 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0,25 & 2,5 & 1 \\ 1 & 8,9 & 3,3 \end{vmatrix}}{-0,025} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0,25 & 0,5 & 2,5 \\ 1 & 1,8 & 8,9 \end{vmatrix}}{-0,025} = 1$$

Solución: La farmacia ha comprado 2 envases del producto A, 2 del B y 1 del C.

10 La suma de las tres cifras de un número es 6. Si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcula dicho número.

Sea a la cifra de las centenas; b, la de las decenas, y c, la de las unidades.

El número es $100a + 10b + c$.

- Sabemos que: $a + b + c = 6$
- Si intercambiamos la 1.ª y 2.ª cifras, resulta:

$$100b + 10a + c = 100a + 10b + c + 90 \rightarrow a = b - 1$$

- Si intercambiamos la 2.ª y la 3.ª, tendremos:

$$100a + 10c + b = 100a + 10b + c + 9 \rightarrow c = 1 + b$$

- Resolvemos, pues, el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 6 \\ a = b - 1 \\ c = 1 + b \end{array}\right\} \; a = 1; \; b = 2, \; c = 3$$

El número buscado es 123.

11 Dado el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \le 20 \\ 3x + 5y \le 70 \\ x \ge 0; \; y \ge 0 \end{cases}$$

a) Razona si el punto de coordenadas (4,1; 11,7) pertenece al recinto.

b) Representa dicho recinto y calcula sus vértices.

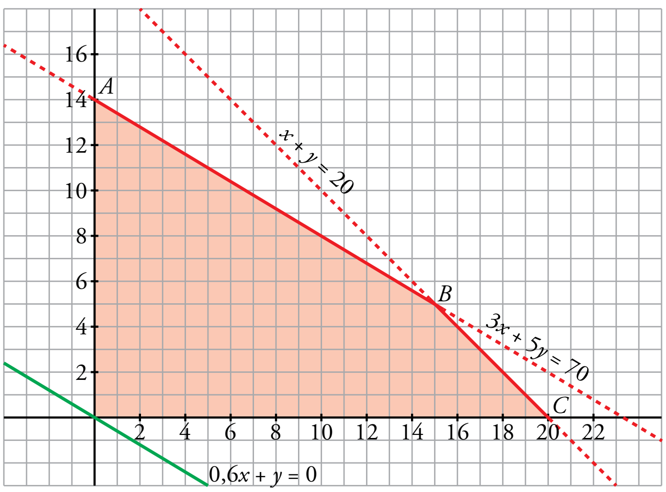
c) Indica dónde alcanzará la función $F(x, y) = 0{,}6x + y$ sus valores extremos. ¿Cuáles serán dichos valores?

a) Si sustituimos las coordenadas del punto en la segunda inecuación obtenemos:

$$3 \cdot 4{,}1 + 5 \cdot 11{,}7 = 70{,}8 > 70$$

luego el punto no está en el recinto.

b)



$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 5y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0, \; y = 14 \rightarrow A(0, 14)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 3x + 5y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow x = 15, \; y = 5 \rightarrow B(15, 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 20 \end{array}\right\} \rightarrow x = 20, \; y = 0 \rightarrow C(20, 0)$$

c) La función $F(x, y) = 0{,}6x + y$ alcanza el mínimo en $O(0, 0)$.

El mínimo de F en la región es $F(0, 0) = 0$.

Como las rectas $0{,}6x + y = K$ son paralelas a $r: 3x + 5y = 70$, en todos los puntos de la recta r se alcanza el máximo.

El máximo de F en la región es $F(0, 14) = 70$.

12 **Un fabricante de juguetes produce dos juegos: *Batallas* y *Dibujos*. Los beneficios unitarios de cada juego y las horas que requieren en cada una de las secciones de la fábrica se dan en la siguiente tabla:**

	ELABORACIÓN	ENSAMBLAJE	EMBALAJE	BENEFICIOS
BATALLAS	4	1	1	45 €
DIBUJOS	2	2	1	30 €

Si se dispone de 36 horas de elaboración, 16 horas de ensamblaje y 10 de embalaje, ¿cuál es la producción que maximiza el beneficio?

a) Resuélvelo gráficamente.

b) Analiza gráficamente qué ocurre si el beneficio del juego *Batallas* se reduce en 15 €.

a) x = número de unidades de *Batallas*

y = número de unidades de *Dibujos*

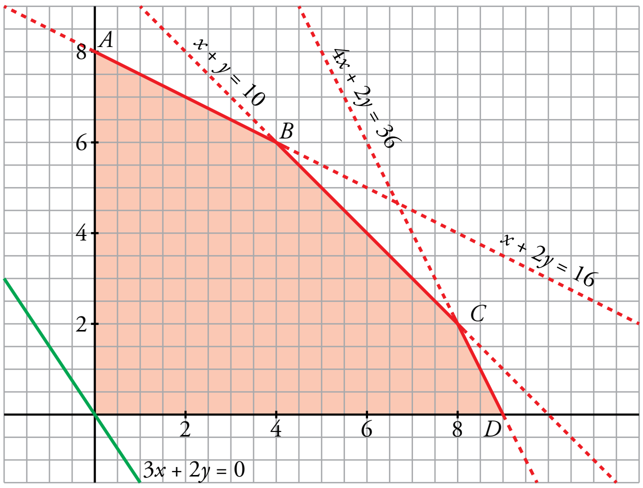
La función beneficio, en euros, que se quiere maximizar es:

$$z = 45x + 30y$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 36 \\ x + 2y \le 16 \\ x + y \le 10 \\ x \ge 0; \quad y \ge 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



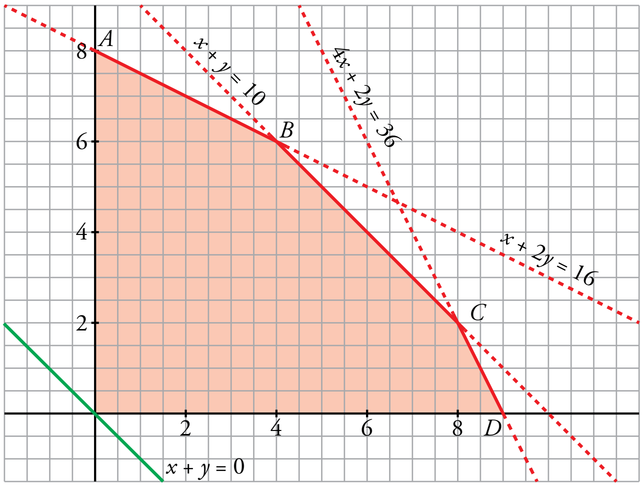
La recta variable $45x + 30y = K$ toma su valor máximo, dentro de los válidos, en el vértice $B(4, 6)$.

Es decir, debe fabricar 4 unidades del juego *Batallas* y 6 unidades del juego *Dibujos* para maximizar el beneficio.

b) En este caso, la función beneficio que se quiere maximizar es:

$$z = 30x + 30y$$

Las rectas $30x + 30y = K$ son paralelas a la recta $x + y = 10$, por tanto, serán soluciones todos los puntos con coordenadas naturales en el segmento BC.



Se obtienen beneficios máximos fabricando:

- 4 unidades del juego *Batallas* y 6 unidades del juego *Dibujos*.
- 5 unidades del juego *Batallas* y 5 unidades del juego *Dibujos*.
- 6 unidades del juego *Batallas* y 4 unidades del juego *Dibujos*.
- 7 unidades del juego *Batallas* y 3 unidades del juego *Dibujos*.
- 8 unidades del juego *Batallas* y 2 unidades del juego *Dibujos*.

13 **Un hipermercado necesita, como mínimo, 6 cajas de manzanas, 8 de peras y 10 de naranjas. Para abastecerse puede acudir a dos proveedores A y B que suministran fruta en contenedores. Cada contenedor de A se compone de 1 caja de manzanas, 2 de peras y 1 de naranjas, y cuesta 60 €, mientras que cada contenedor de B se compone de 1 caja de manzanas, 1 de peras y 5 de naranjas, y cuesta 75 €. Averigua cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada proveedor para cubrir sus necesidades con el mínimo coste posible, y a cuánto ascendería dicho coste.**

Llamamos x a los contenedores de A e y a los contenedores de B.

	MANZANAS	PERAS	NARANJAS
A	1	2	1
B	1	1	5
TOTAL	$x + y$	$2x + y$	$x + 5y$

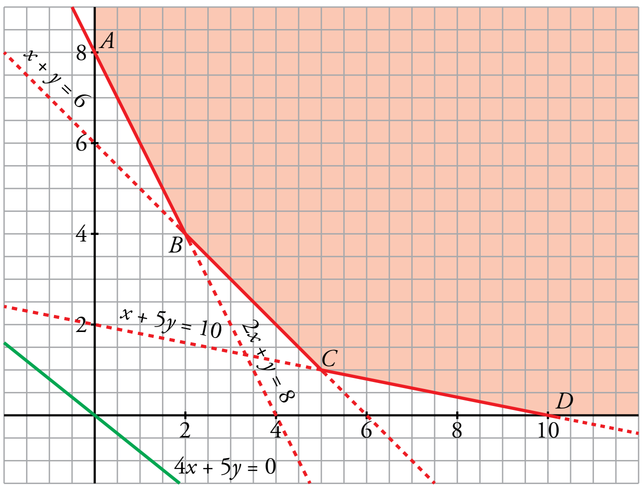
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo que nos da el coste es:

$$F(x, y) = 60x + 75y$$

La representación de la región de validez y la función de coste se muestra a la derecha:



La recta variable $60x + 75y = K$ toma su valor mínimo, dentro de los válidos, en el vértice $C(6, 1)$. Es decir, se deben comprar, para minimizar los costes globales, 6 contenedores de A y 1 contenedor de B.

El coste mínimo será: $F(6, 1) = 60 \cdot 6 + 75 \cdot 1 = 435$ €