

Autoevaluación

Página 242

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1} &= (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1})(10x^2 + \sqrt{x^6 - 5x + 1})}{10x^2 + \sqrt{x^6 - 5x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100x^4 - (x^6 - 5x + 1)}{10x^2 + \sqrt{x^6 - 5x + 1}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^6 + 100x^4 + 5x - 1}{10x^2 + \sqrt{x^6 - 5x + 1}} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2 + 1)} = \frac{(0)}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}) = (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1})(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1})}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4}{2 + 2} = 1$$

2 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

determina el valor del parámetro a para el cual la función es continua en todo su dominio.

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos qué ocurre en el punto de ruptura $x = 1$.

$$f(1) = a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 3) = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 5) = -4 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow a - 3 = -4 \rightarrow a = -1$$

Cuando $a = -1$ la función es continua en $x = 1$ porque $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y, por tanto, es continua en todo su dominio.

3 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(ax - 12) & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + b(x - 1) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$.

a) Halla los valores de a y de b para que la función sea derivable en $x = -1$.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$ obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$.

a) Para que sea derivable en $x = -1$, primero debe ser continua:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{2}(ax - 12) \right] = -\frac{1}{2}a - 6 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} [-x^2 + b(x - 1)] = -1 - 2b \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{2}a - 6 = -1 - 2b$$

Además, las derivadas laterales en $x = -1$ deben ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si } x < -1 \\ -2x + b & \text{si } x > -1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(-1^-) = \frac{a}{2} \\ f'(-1^+) = 2 + b \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a}{2} = 2 + b$$

Resolvemos el siguiente sistema para obtener los valores pedidos:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2}a - 6 = -1 - 2b \\ \frac{a}{2} = 2 + b \end{array} \right\} \rightarrow a = 18, b = 7$$

b) Si $a = 1$, se tiene que $f'(x) = \frac{1}{2}$ cuando $x < -1$. Por tanto:

$$x = -2, f(-2) = \frac{1}{2}(-2 - 12) = -7, f'(-2) = \frac{1}{2}$$

Y la ecuación de la recta tangente es $y = -7 + \frac{1}{2}(x + 2)$.

4 Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Determina los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} .

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables en sus respectivos intervalos de definición. Estudiamos qué ocurre en el punto de ruptura $x = 1$. Para que sea derivable en $x = 1$, primero debe ser continua.

$$f(1) = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax - 3) = a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x^2 + b) = b \end{array} \right\} \rightarrow a - 2 = b$$

Además, las derivadas laterales en $x = 1$ deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 + a \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow 2 + a = 2 \rightarrow a = 0$$

Así obtenemos que $b = -2$.

Para $a = 0$ y $b = -2$ la función es continua y derivable en todo \mathbb{R} .

5 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -2x + a & \text{si } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de a para que la función sea continua en el intervalo $[0, 8]$.
 b) Halla los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[0, 4]$. Justifica que los puntos obtenidos son máximos y mínimos absolutos.
 c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y la gráfica de $f(x)$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables en sus respectivos intervalos de definición.

- En $x = 2$ la función es continua ya que:

$$f(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 6x + 12) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

- Estudiamos la continuidad en $x = 4$:

$$f(4) = -8 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 6x + 12) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (-2x + a) = -8 + a \end{array} \right\} \rightarrow 4 = -8 + a \rightarrow a = 12$$

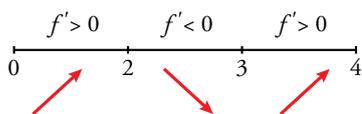
La función es continua en $[0, 8]$ cuando $a = 12$.

b) Hallamos la derivada en el intervalo $[0, 4]$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

$f(x)$ tiene un punto singular en $x = 3$.

Crecimiento y decrecimiento:



Evaluamos en los posibles extremos absolutos:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 2$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 4$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = 3$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = 4$$

Del comportamiento de la función y de los resultados anteriores se deduce que el punto $(0, 2)$ es un mínimo absoluto; y que los puntos $(2, 4)$ y $(4, 4)$ son máximos absolutos.

c) Área = $\int_0^2 (x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x \right]_2^3 = 6 + \left(18 - \frac{44}{3} \right) = \frac{28}{3} u^2$

6 Halla el valor de a , b y c para que $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un punto de inflexión en $(0, 1)$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea 2.

Punto de inflexión en $(0, 1) \rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$

La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es $2 \rightarrow y'(0) = 2$

$$y'(x) = 3x^2 + 2ax + b; y'(0) = 2 \rightarrow b = 2$$

$$y''(x) = 6x + 2a; y''(0) = 0 \rightarrow a = 0$$

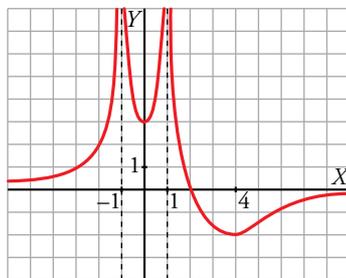
$$y(0) = 1 \rightarrow c = 1$$

La función es $y = x^3 + 2x + 1$.

7 La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Es continua en todo su dominio y corta el eje X en $x = 2$.
- Asíntota horizontal en $y = 0$ con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.
- Asíntota vertical en $x = 1$ con $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.
- Asíntota vertical en $x = -1$ con $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y otro en $(0, 3)$.

Representa gráficamente la función.



8 Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Determina su dominio, asíntotas, extremos relativos y estudia su monotonía. Luego, dibuja la gráfica de f destacando los elementos hallados.

- El dominio de la función está formado por los valores de x para los cuales $x^2 - x + 1 \geq 0$, es decir, todo \mathbb{R} . Es continua en todo su dominio.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty \rightarrow \text{No tiene.}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La recta $y = x - \frac{1}{2}$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = (+\infty) - (+\infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La recta $y = -x + \frac{1}{2}$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

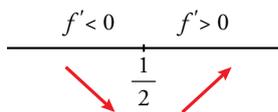
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

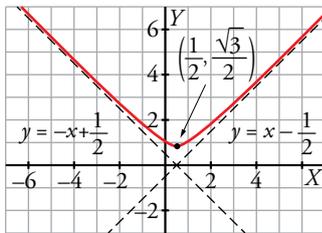
- Crecimiento y decrecimiento:



El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es un mínimo.

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y es creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

- Corta al eje Y en el punto $(0, 1)$. No corta al eje X .



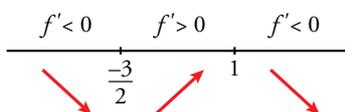
9 Dada la función $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$:

- Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Halla los extremos relativos.
- Encuentra los puntos de corte con los ejes.
- Halla sus asíntotas y sus ramas parabólicas.
- Represéntala en unos ejes coordenados.

a) $f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = e^x(-2x^2 - x + 3)$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(-2x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = 1$$

Signo de la derivada:



La función decrece en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y $(1, +\infty)$ y crece en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

b) $x = -\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[3\left(-\frac{3}{2}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]e^{-3/2} = -9e^{-3/2}$

$x = 1, f(1) = e$

El punto $\left(-\frac{3}{2}, -9e^{-3/2}\right)$ es un mínimo. El punto $(1, e)$ es un máximo.

c) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$

$$y = 0 \rightarrow (3x - 2x^2)e^x = 0 \rightarrow 3x - 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$$

d) La función es continua y derivable en todo \mathbb{R} . No tiene asíntotas verticales.

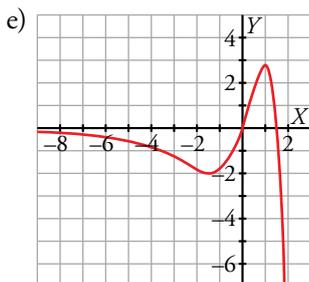
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(3x - 2x^2)e^x] = -\infty$$

Tiene una rama parabólica cuando $x \rightarrow +\infty$ ya que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x - 2x^2)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(3 - 2x)e^x] = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(3x - 2x^2)e^x] = 0$ porque la función exponencial tiende a 0 y es de orden superior a cualquier polinomio. Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$. Además, la función queda por debajo de la asíntota horizontal.



10 Dada la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, determina su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Representala.

- El dominio de definición es $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ para que el denominador se pueda evaluar y no se anule.
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \text{ ya que un polinomio es de mayor orden que un logaritmo.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ La recta } x = 1 \text{ es la asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene.}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{No tiene.}$$

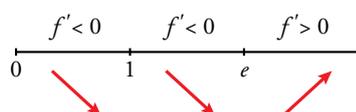
- Es derivable en todo su dominio.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x - 1 = 0 \rightarrow x = e$$

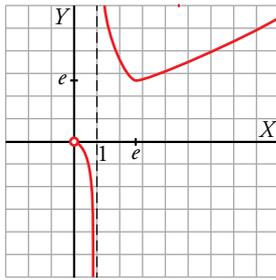
$$x = e \rightarrow f(e) = e$$

Signo de la derivada:



Es decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, e)$ y creciente en $(e, +\infty)$.

El punto (e, e) es un mínimo.



- 11** El coste total por producir x unidades de un artículo es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función *coste medio por unidad* como $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$. ¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

$$C_m(x) = \frac{1}{3}x + 6 + \frac{192}{x}$$

Tenemos que calcular el mínimo de esta función.

$$C'_m(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2}$$

$$C'_m(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0 \rightarrow x = -24 \text{ (no vale)}, x = 24$$

Comprobamos si es un mínimo mediante la derivada segunda:

$$C''_m(x) = \frac{384}{x^3} \rightarrow C''_m(24) = \frac{384}{24^3} > 0 \rightarrow \text{En } x = 24 \text{ hay un mínimo.}$$

En conclusión, se deben producir 24 unidades para que el coste medio por unidad sea mínimo.

- 12** Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

Llamemos x al lado de la base e y a la altura del prisma regular.

Por una parte, $80 = x^2y$.

Si p es el precio por centímetro cuadrado del material usado para la tapa y la superficie lateral, $1,5p$ es el precio por centímetro cuadrado del material usado para la base.

El coste del material es $C = 1,5px^2 + 4pxy + px^2 = p(2,5x^2 + 4xy)$.

De la ecuación del volumen despejamos y para sustituir en el coste:

$$y = \frac{80}{x^2} \rightarrow C = p\left(2,5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Buscamos las dimensiones que hacen mínimo el coste:

$$C' = p\left(5x - \frac{320}{x^2}\right)$$

$$C' = 0 \rightarrow 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4$$

Estudiando el signo de la derivada primera a ambos lados del punto singular vemos que, efectivamente, es un mínimo.

$$x = 4, y = \frac{80}{4^2} = 5$$

Por tanto, para que el precio sea el menor posible, el prisma regular debe tener una base de 4 cm de lado y una altura de 5 cm.

13 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3-x^2}{x} dx$

b) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$

c) $\int \frac{x^2-5x+8}{x-2} dx$

d) $\int 2e^{1-3x} dx$

a) $\int \frac{3-x^2}{x} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{x^2}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - \int x dx = 3 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + k$

b) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{(x^3+1)^{1/2}} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{3} \frac{(x^3+1)^{1/2}}{1/2} + k = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + k$

c) $\int \frac{x^2-5x+8}{x-2} dx = \int \left(x-3 + \frac{2}{x-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln|x-2| + k$

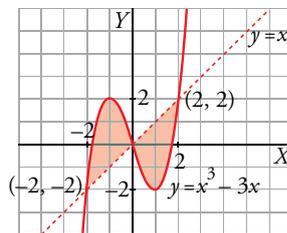
d) $\int 2e^{1-3x} dx = -\frac{2}{3} \int (-3)e^{1-3x} dx = -\frac{2}{3} e^{1-3x} + k$

14 Representa el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x^3 - 3x$ e $y = x$. Después, calcula su área.

La gráfica de $y = x^3 - 3x$ corta a los ejes en los puntos $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$. Tiene un máximo en $(-1, 2)$ y un mínimo en $(1, -2)$.

Puntos de corte entre las funciones:

$$\left. \begin{matrix} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{matrix} \right\} x^3 - 3x = x \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = -2, x = 2$$



El recinto es simétrico.

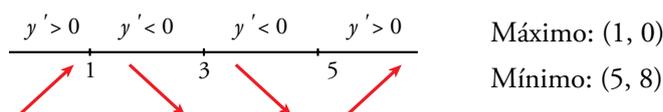
$$\text{Área} = \int_{-2}^0 (x^3 - 3x - x) dx + \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)] dx = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8 \text{ u}^2$$

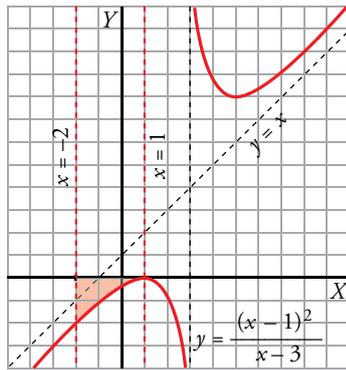
15 Calcula el área limitada por la función $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

Representamos la función $y = \frac{(x-1)^2}{x-3}$:

- Asíntota vertical: $x = 3$ $\left\{ \begin{matrix} \text{Si } x < 3, y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 3, y \rightarrow +\infty \end{matrix} \right.$
- Asíntota oblicua: $y = x + 1$ $\left\{ \begin{matrix} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) > x + 1 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) < x + 1 \end{matrix} \right.$
- $y' = \frac{2(x-1)(x-3) - (x-1)^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \left\{ \begin{matrix} x = 5, f(5) = 8 \\ x = 1, f(1) = 0 \end{matrix} \right.$

Signo de y' :





$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-2}^1 \frac{(x-1)^2}{x-3} dx \right| = \left| \int_{-2}^1 \left(x+1 + \frac{4}{x-3} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} + x + 4 \ln|x-3| \right]_{-2}^1 \right| = \\ &= \left| \left(\frac{3}{2} + 4 \ln 2 \right) - 4 \ln 5 \right| \approx 2,17 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

- 16** Escribe la expresión analítica de la función $f(x)$ de la que conocemos: $f''(x) = 3$; $f'(1) = 0$ y $f(1) = 5$.

$$f''(x) = 3 \rightarrow f'(x) = \int 3 dx = 3x + k; f'(1) = 0 \rightarrow 3 + k = 0 \rightarrow k = -3$$

$$f'(x) = 3x - 3 \rightarrow f(x) = \int (3x - 3) dx = \frac{3x^2}{2} - 3x + k'$$

$$f(1) = 5 \rightarrow \frac{3}{2} - 3 + k' = 5 \rightarrow k' = 8 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + \frac{13}{2}$$

- 17** Sea la función $f(x) = x + \frac{a}{x^3}$ donde a es una constante:

a) Encuentra una primitiva de f .

b) Si F es una primitiva de la función f , ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?

c) Halla a sabiendo que $\int_1^2 f(x) dx = 1,5$.

$$a) F(x) = \int \left(x + \frac{a}{x^3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + a \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2}$$

$$b) G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + 2x \rightarrow G'(x) = x + \frac{a}{x^3} + 2$$

G no es una primitiva de f porque $G'(x) \neq f(x)$.

$$c) \int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} \right]_1^2 = 1,5 \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3a}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow a = 0$$