Autoevaluación

Página 322

1 Conocemos las siguientes probabilidades:

$$P[A] = 0{,}33 \qquad P[A' \cap B'] = 0{,}41 \qquad P[B'] = 0{,}62$$

Calcula $P[B]$, $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

$P[B'] = 0{,}62 = 1 - P[B] \ \rightarrow\ P[B] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

$P[A' \cap B'] = 0{,}41 = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] \ \rightarrow\ P[A \cup B] = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}33 + 0{,}38 - 0{,}59 = 0{,}12$

2 De dos tiradores, se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos.

Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.

b) La probabilidad de que uno de ellos acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno de los dos tiradores acierte.

d) La probabilidad de que alguno de ellos acierte.

Sean los sucesos:

A = "Acierte el primer tirador" $\rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$

B = "Acierte el segundo tirador" $\rightarrow P[B] = \frac{3}{4}$

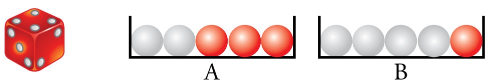
a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, pues los dos sucesos son independientes.

b) $P[A \cap B'] + P[A' \cap B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P[A' \cap B'] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P[A \cup B] = 1 - P[A' \cap B'] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

3



Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

$P[\bullet/1]$ $\qquad$ $P[1 \text{ y } \bullet]$ $\qquad$ $P[\bullet]$ $\qquad$ $P[\circ]$ $\qquad$ $P[1/\bullet]$

Explica lo que significa la última probabilidad.

$P[\bullet/1] = \frac{1}{5}$

$P[1 \text{ y } \bullet] = P[\bullet/1] \cdot P[1] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

$P[\bullet] = P[1 \text{ y } \bullet] + P[1' \text{ y } \bullet] = P[\bullet/1] \cdot P[1] + P[\bullet/1'] \cdot P[1'] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{8}{15}$

$P[\circ] = 1 - P[\bullet] = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

$P[1/\bullet] = \frac{P[1 \text{ y } \bullet]}{P[\bullet]} = \frac{1/30}{8/15} = \frac{1}{16}$

Esta última probabilidad es la probabilidad de que haya salido 1 sabiendo que la bola extraída es roja.

4 **En una clase, el 40 % aprueba filosofía y el 50 % matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0,8.**

a) Prueba que la mitad de los estudiantes de la clase suspende ambas asignaturas.

b) Calcula el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Sean los sucesos F = "aprobar filosofía" y M = "aprobar matemáticas".

$P[\text{F}] = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

$P[\text{M}] = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$

$P[\text{F/M}] = 0{,}8$

a) $P[\text{F/M}] = 0{,}8 = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{M}]} = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{0{,}5} \to P[\text{F} \cap \text{M}] = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

Los alumnos que suspenden ambas asignaturas constituyen el suceso $\text{F}' \cap \text{M}'$.

$P[\text{F} \cup \text{M}] = P[\text{F}] + P[\text{M}] - P[\text{F} \cap \text{M}] = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}5$

$P[\text{F}' \cap \text{M}'] = P[(\text{F} \cup \text{M})'] = 1 - P[\text{F} \cup \text{M}] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

b) Nos piden:

$P[\text{M/F}] = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{F}]} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4} = 1$

Es decir, el 100 % de los alumnos que aprueban filosofía también han aprobado matemáticas.

5 **En una producción de pilas extraemos una muestra de 50. Su duración media ha sido 489 horas y su desviación típica, 27 horas.**

Estima la duración media de las pilas de la población con un nivel de confianza del 99 %.

$1 - \alpha = 0{,}99 \to \alpha = 0{,}01 \to z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}575$

$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 489 - 2{,}575 \cdot \dfrac{27}{\sqrt{50}} = 479{,}17$

$\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 489 + 2{,}575 \cdot \dfrac{27}{\sqrt{50}} = 498{,}83$

La duración media de las pilas está comprendida entre 479,17 y 498,83 horas con un nivel de confianza del 99 %.

6 **En cierta cadena de centros comerciales, el número de trabajadores por departamentos es el siguiente:**

- **150 personas en el departamento de personal.**
- **450 personas en el departamento de ventas.**
- **200 personas en el departamento de contabilidad.**
- **100 personas en el departamento de atención al cliente.**

Con el objetivo de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores:

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

a) Deberíamos utilizar un muestreo aleatorio estratificado, ya que la población está formada por cuatro estratos y queremos asegurarnos de que en la muestra haya representantes de cada uno de ellos. Si, además, queremos que el número de individuos elegidos de cada estrato sea proporcional al tamaño de dicho estrato, debemos utilizar el muestreo aleatorio estratificado con reparto proporcional.

b) $N = 150 + 450 + 200 + 100 = 900$

$$\frac{180}{900} = \frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} \to \begin{cases} n_1 = 0,2 \cdot 150 = 30 \\ n_2 = 0,2 \cdot 450 = 90 \\ n_3 = 0,2 \cdot 200 = 40 \\ n_4 = 0,2 \cdot 100 = 20 \end{cases}$$

Hay que coger a 30 trabajadores de personal, a 90 de ventas, a 40 de contabilidad y a 20 de atención al cliente.

7 **Tenemos una caja con 100 chinchetas, todas idénticas. Las lanzamos al suelo y contamos cuántas quedan con la punta hacia arriba. Realizamos esta operación cuatro veces y contamos un total de 84 chinchetas así:** **.**

Estimar la probabilidad P[**] para cada chincheta de este tipo, con un nivel de confianza del 95 %.**

La proporción de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es: $pr = \frac{85}{400} = 0,21$

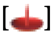
$$1 - \alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \to z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,21 \cdot 0,79}{400}} = 0,04$$

Por tanto, el intervalo de confianza para la probabilidad p es:

$$(9,21 - 0,04; 0,21 + 0,04) = (0,17; 0,25)$$

8 **Tenemos un modelo de chinchetas y queremos estimar la probabilidad P[****] $= p$ con un error menor de 0,01 y con un nivel de confianza del 90 %.**

¿Cuántas chinchetas hemos de tirar para conseguirlo (tamaño de la muestra)? (Sabemos que la probabilidad buscada es aproximadamente igual a 0,2).

$$1 - \alpha = 0,9 \to \alpha = 0,1 \to z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$$

Por tanto:

$$0,01 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \to n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr(1-pr)}{0,01^2} = \frac{1,645^2 \cdot 0,2 \cdot 0,8}{0,01^2} = 4\,329,6$$

ya que sabemos que la proporción de chinchetas que caerán con la punta hacia arriba es aproximadamente 0,2.

Hemos de tirar, al menos, 4 330 chinchetas.

9 **En una muestra de 36 estudiantes hemos hallado la media de su cociente intelectual, $\bar{x} = 108$, y la desviación típica, $s = 9,8$. Con estos resultados se ha hecho la siguiente estimación: el cociente intelectual de la población a la que pertenecen es mayor que 105 y menor que 111.**

¿Con qué nivel de confianza podemos efectuar esta afirmación?

El error máximo admisible es $E = 111 - 108 = 3$. Entonces:

$$3 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{9,8}{\sqrt{36}} \to z_{\alpha/2} = \frac{3 \cdot 6}{9,8} \approx 1,84$$

Por tanto:

$$\frac{\alpha}{2} = P[z > 1,84] = 1 - P[z \le 1,84] = 1 - 0,9671 = 0,0329 \to \alpha = 2 \cdot 0,0329 = 0,0658 \to$$
$$\to 1 - \alpha = 1 - 0,0658 = 0,9342$$

La afirmación tiene un nivel de confianza del 93,42 %.