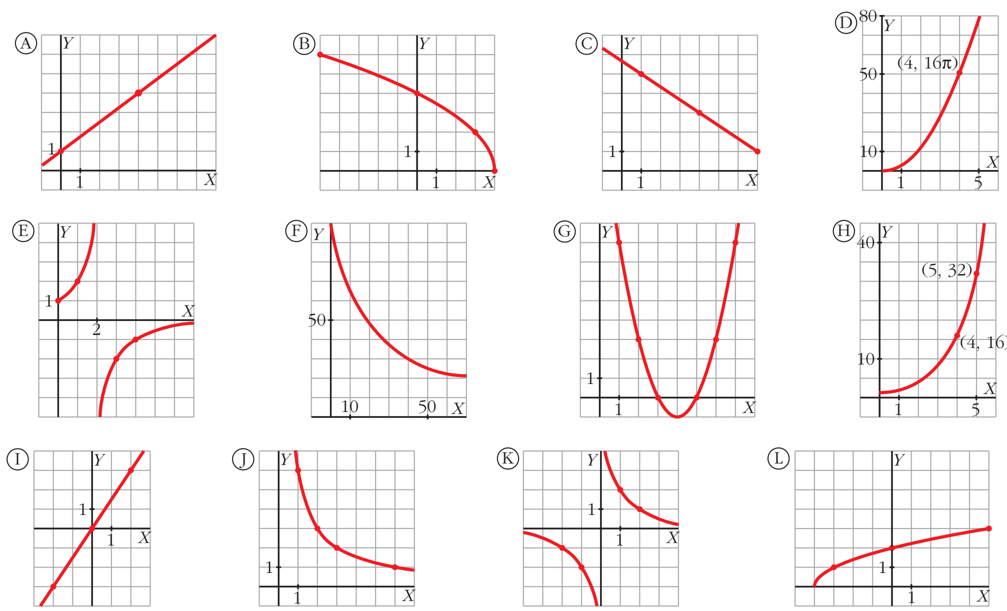
10 FUNCIONES ELEMENTALES

Página 245

REFLEXIONA Y RESUELVE

■ **Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación de las de abajo:**



LINEALES	CUADRÁTICAS	DE PROPORCIONALIDAD INVERSA
L_1: $y = \frac{3}{2}x$	C_1: $y = x^2 - 8x + 15$	$P.I._1$: $y = \frac{1}{x}$
L_2: $y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 5$	C_2: $y = (x + 3)(x + 5)$	$P.I._2$: $y = \frac{2}{2 - x}$
L_3: $3x + 2y = 0$	C_3: $y = x^2,\ x > 0$	$P.I._3$: $y = \frac{2}{x}$
L_4: $y = \frac{3}{4}x + 1$	C_4: $y = \pi x^2,\ x > 0$	$P.I._4$: $y = \frac{6}{x},\ x > 0$

RADICALES	R_1: $y = \sqrt{2x + 4}$	R_2: $y = \sqrt{x + 4}$	R_3: $y = 2\sqrt{4 - x}$
EXPONENCIALES	E_1: $y = 2^x$	E_2: $y = 0{,}5^x$	E_3: $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$

A $\to$ L_4	B $\to$ R_3	C $\to$ L_2	D $\to$ C_4
E $\to$ $P.I._2$	F $\to$ E_3	G $\to$ C_1	H $\to$ E_1
I $\to$ L_1	J $\to$ $P.I._4$	K $\to$ $P.I._3$	L $\to$ R_2

■ **Cada uno de los siguientes enunciados corresponde a una gráfica de las de arriba. Identifícala.**

1. Superficie (cm^2) de un círculo. Radio en centímetros.

2. Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.

3. Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo en minutos.

4. Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.

5. Longitud de un muelle (dm). Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.

6. Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es 6 cm^2.

1. D 2. E 3. F 4. H 5. A 6. J

Página 248

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **e)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

g) $y = x^3 - 2x + 3$ **h)** $y = \dfrac{1}{x}$ **i)** $y = \dfrac{1}{x^2}$

j) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **k) El área de un cuadrado de lado variable, l, es $A = l^2$.**

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, +\infty)$ c) $(-\infty, 1]$

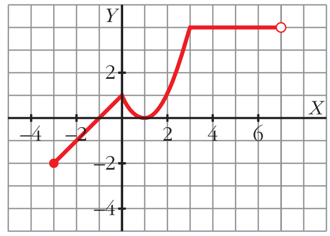
d) $[-2, 2]$ e) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ f) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

g) $\mathbb{R}$ h) $\mathbb{R} - \{0\}$ i) $\mathbb{R} - \{0\}$

j) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ k) $l > 0$

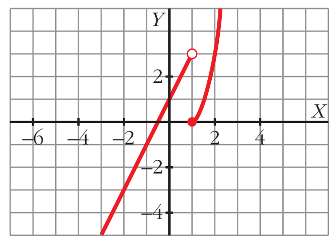
Página 249

1. Representa esta función: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1, & x \in [0, 3] \\ 4, & x \in (3, 7) \end{cases}$



2. **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



Página 250

1. **Representa las siguientes funciones relacionadas con la función parte entera:**

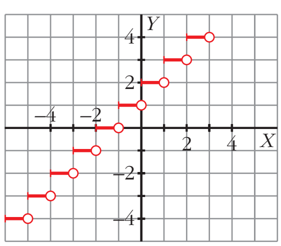
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0,5)$

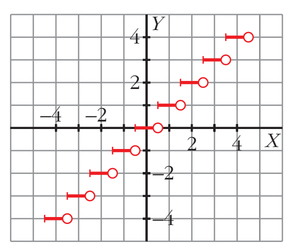
c) $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

d) $y = Ent(3x)$

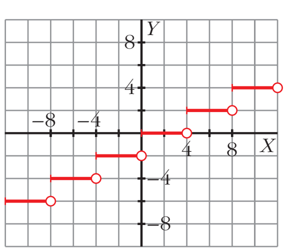
a) $y = Ent(x) + 2$



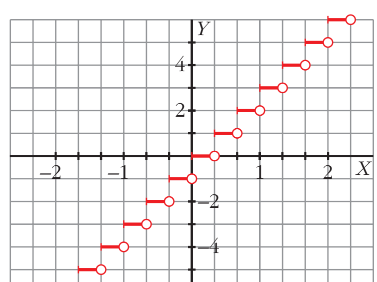
b) $y = Ent(x + 0,5)$



c) $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$



d) $y = Ent(3x)$

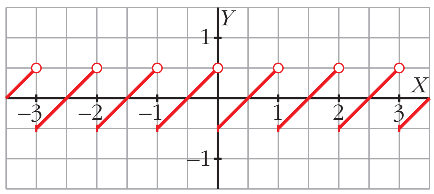


2. **Representa:**

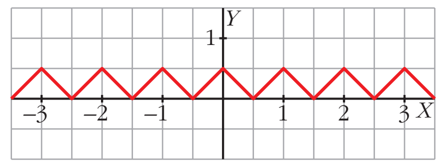
a) $\boldsymbol{y = Mant(x) - 0{,}5}$ **b)** $\boldsymbol{y = |Mant(x) - 0{,}5|}$ **c)** $\boldsymbol{y = 0{,}5 - |Mant(x) - 0{,}5|}$

Comprueba que esta última significa la distancia de cada número al entero más próximo. Su gráfica tiene forma de sierra.

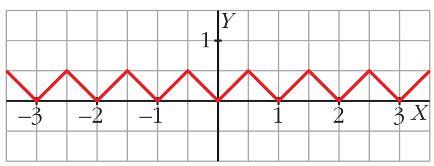
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

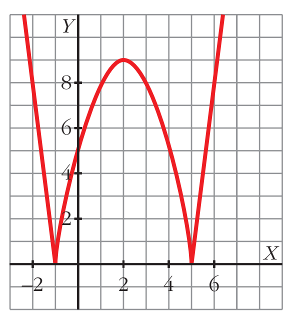


c) $y = 0{,}5 - |Mant(x) - 0{,}5|$

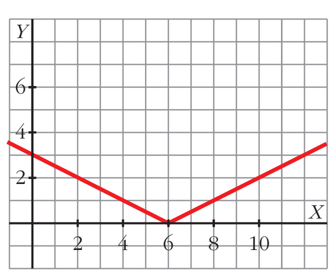


Página 251

1. **Representa:** $\boldsymbol{y = |-x^2 + 4x + 5|}$



2. **Representa gráficamente:** $\boldsymbol{y = \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|}$

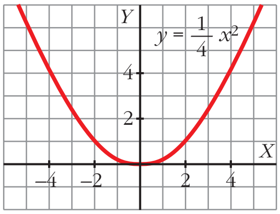


Página 252

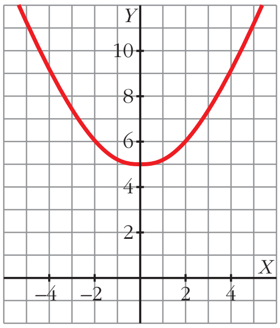
1. **Representa $y = \frac{1}{4}x^2$. A partir de ella, representa:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$

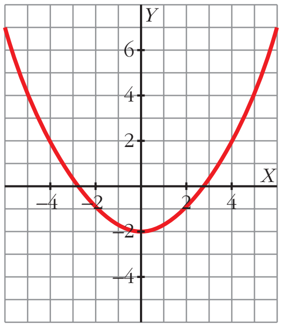
b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$



a)



b)

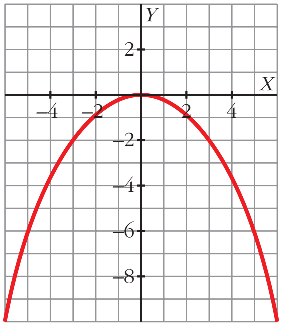


2. **Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, representa:**

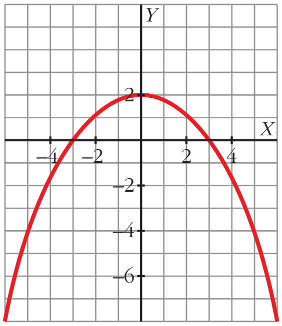
a) $y = -\frac{1}{4}x^2$

b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

a)



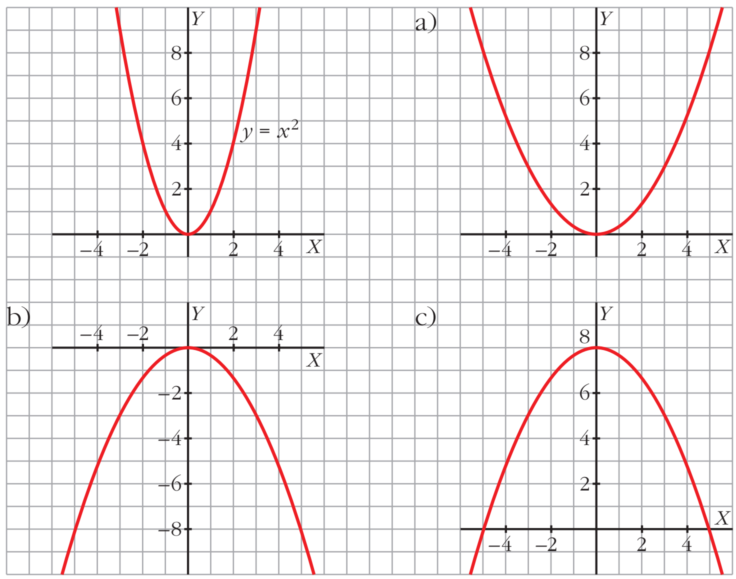
b)



Página 253

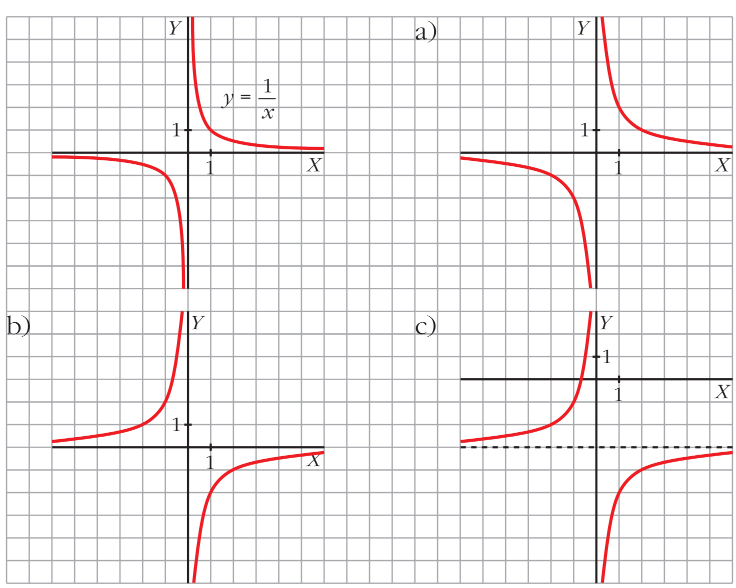
3. **Representa $y = x^2$. A partir de ella, representa:**

a) $y = \dfrac{x^2}{3}$ **b)** $y = -\dfrac{x^2}{3}$ **c)** $y = -\dfrac{x^2}{3} + 8$



4. **Representa $y = 1/x$. A partir de ella, representa:**

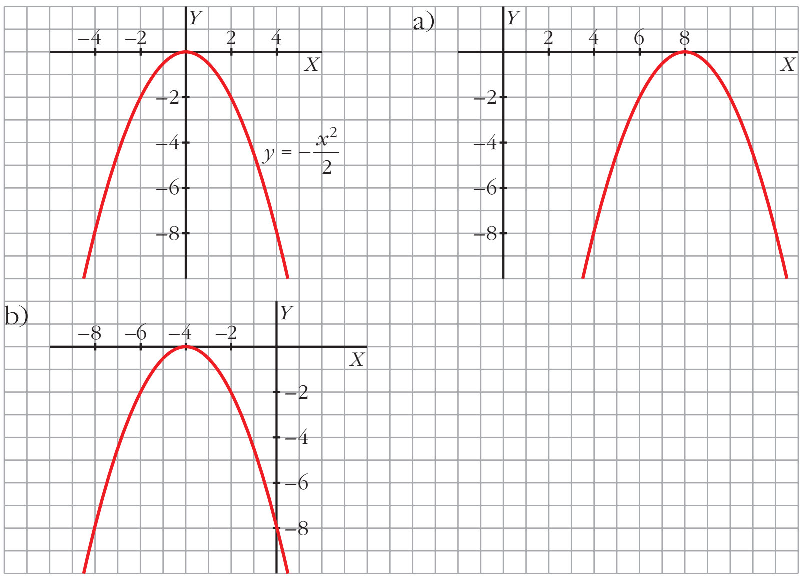
a) $y = \dfrac{2}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = -\dfrac{2}{x} - 3$



Página 254

5. **Representa** $y = -\dfrac{x^2}{2}$. **A partir de esta gráfica, representa estas otras:**

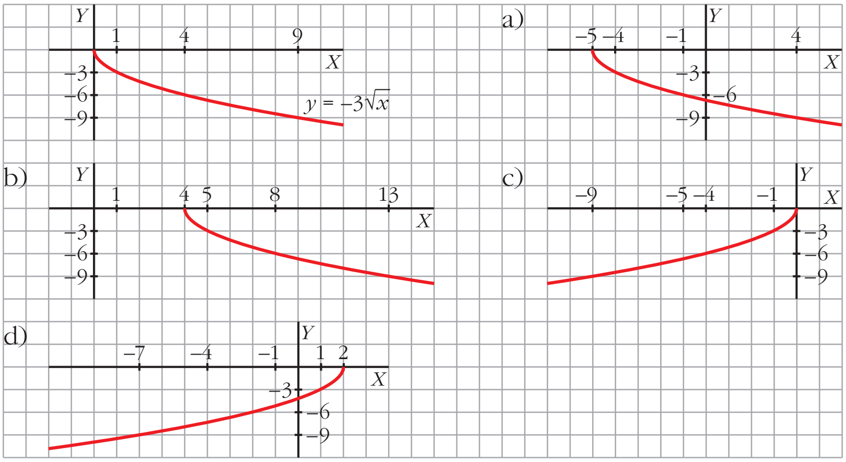
a) $y = \dfrac{-(x-8)^2}{2}$ **b)** $y = \dfrac{-(x+4)^2}{2}$



6. **Representa** $y = -3\sqrt{x}$. **A partir de esta gráfica, representa estas otras:**

a) $y = -3\sqrt{x+5}$ **b)** $y = -3\sqrt{x-4}$

c) $y = -3\sqrt{-x}$ **d)** $y = -3\sqrt{-(x-2)}$



Página 255

7. **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\ \ y = f(x + 4),\ \ y = \frac{1}{2}f(x),\ \ y = 2f(x),$$

$$y = -f(x),\ \ y = f(-x),\ \ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \to (3, 2)$ $\qquad$ $y = f(x + 4) \to (-1, 8)$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2}f(x) \to (3, 4)$

$y = 2f(x) \to (3, 16)$ $\qquad$ $y = -f(x) \to (3, -8)$ $\qquad$ $y = f(-x) \to (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \to (-3, -13)$

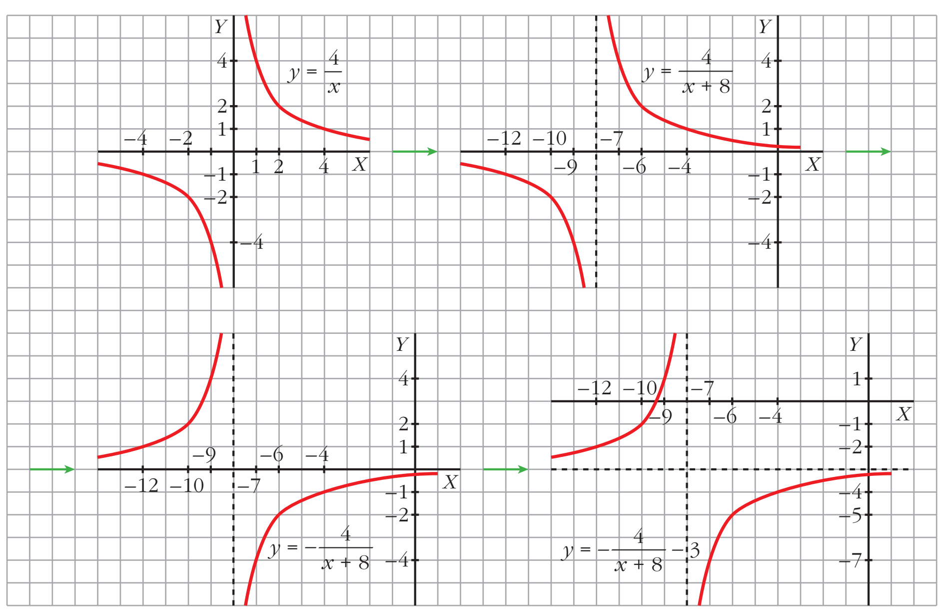
8. **Representa:**

a) $y = -\dfrac{4}{x + 8} - 3$

b) $y = 3\sqrt{-x + 10}$

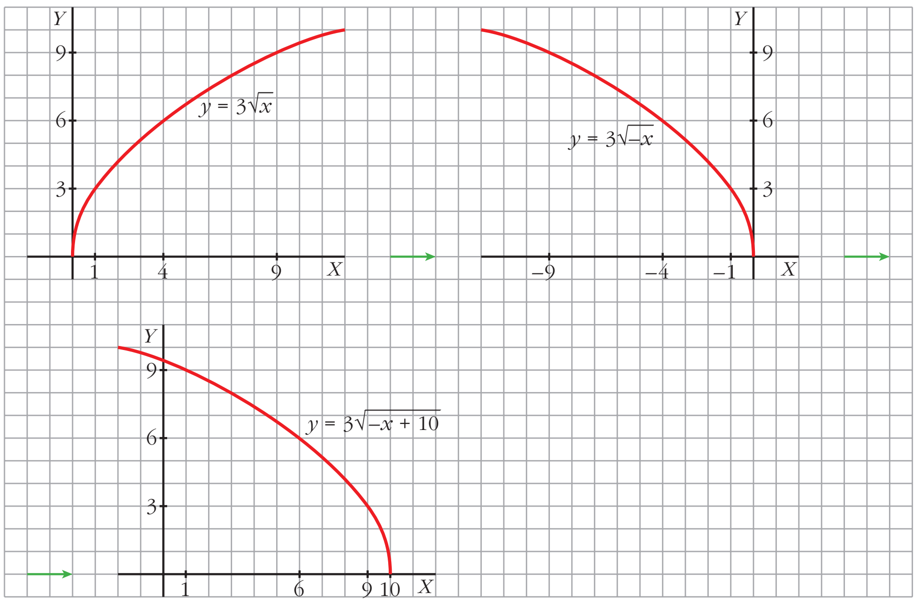
a) $y = -\dfrac{4}{x + 8} - 3$

Representamos $y = \dfrac{4}{x} \to y = \dfrac{4}{x + 8} \to y = -\dfrac{4}{x + 8} \to y = -\dfrac{4}{x + 8} - 3$



b) $y = 3\sqrt{-x + 10}$

Representamos $y = 3\sqrt{x} \rightarrow y = 3\sqrt{-x} \rightarrow y = 3\sqrt{-(x-10)}$



Página 256

1. Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179$; $g[f(4)] = 1$

2. Si $f(x) = sen\ x$, $g(x) = x^2 + 5$, halla $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$. Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = 2$.

$f \circ g(x) = sen(x^2 + 5)$; $f \circ g(0) = -0{,}96$; $f \circ g(2) = 0{,}41$

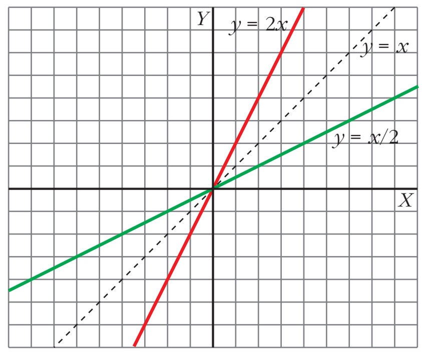
$g \circ f(x) = sen^2\ x + 5$; $g \circ f(0) = 5$; $g \circ f(2) = 5{,}83$

$f \circ f(x) = sen(sen\ x)$; $f \circ f(0) = 0$; $f \circ f(2) = 0{,}79$

$g \circ g(x) = (x^2 + 5)^2 + 5$; $g \circ g(0) = 30$; $g \circ g(2) = 86$

Página 257

1. **Representa $y = 2x$, $y = x/2$ y comprueba que son inversas.**



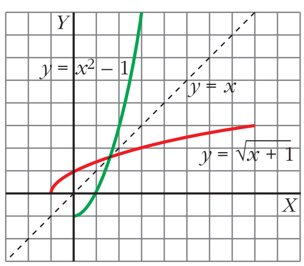
2. **Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas respecto de la recta $y = x$. Averigua cuáles son.**

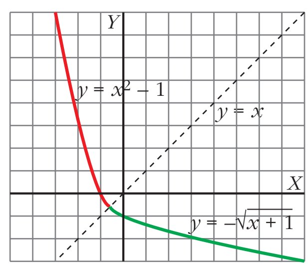
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x + 1}$

b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x + 1}$

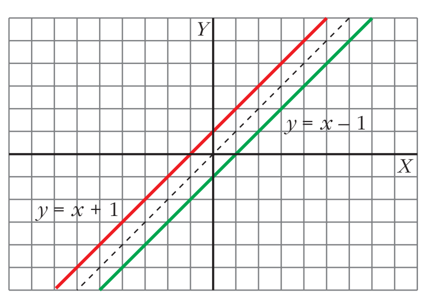




3. **Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, comprueba que $f[g(x)] = x$. ¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones inversas? Comprueba que el punto $(a, a + 1)$ está en la gráfica de f y que el punto $(a + 1, a)$ está en la gráfica de g. Representa las dos funciones y observa su simetría respecto de la recta $y = x$.**

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$

Son funciones inversas.



Página 259

1. **La masa de madera de un bosque aumenta en un 40% cada 100 años. Si tomamos como unidad de masa vegetal (*biomasa*) la que había en el año 1800, que consideramos instante inicial, y como unidad de tiempo 100 años, la función $M = 1{,}4^t$ nos da la cantidad de masa vegetal, M, en un instante cualquiera, t expresado en siglos *a partir de 1800* (razona por qué).**

a) Averigua cuándo habrá una masa de madera triple que en 1800 ($1{,}4^t = 3$) y cuándo había la tercera parte. Observa que los dos periodos de tiempo son iguales.

b) Calcula la cantidad de madera que habrá, o había, en 1900, 1990, 2000, 1600 y 1550.

$M = 1{,}4^t$

a) • Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = 3$:

$$1{,}4^t = 3 \;\rightarrow\; ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3) \;\rightarrow\; t\,ln\,(1{,}4) = ln\,(3) \;\rightarrow\; t = \frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx 3{,}27$$

Cuando pasen $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, se habrá triplicado la masa de madera. Esto es, en el año $1800 + 327 = 2127$.

• Buscamos el valor de t para el cual $1{,}4^t = \frac{1}{3} = 3^{-1}$:

$$1{,}4^t = 3^{-1} \;\rightarrow\; ln\,(1{,}4)^t = ln\,(3)^{-1} \;\rightarrow\; t\,ln\,(1{,}4) = -ln\,(3) \;\rightarrow\; t = -\frac{ln\,3}{ln\,1{,}4} \approx -3{,}27$$

Hace $3{,}27 \cdot 100 = 327$ años, había la tercera parte de masa de madera. Esto es, en el año $1800 - 327 = 1473$.

b) $1900 \;\rightarrow\; t = 1 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^1 = 1{,}4$

$$1990 \;\rightarrow\; t = \frac{1990 - 1800}{100} = 1{,}9 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{1{,}9} \approx 1{,}90$$

$$2000 \;\rightarrow\; t = \frac{2000 - 1800}{100} = 2 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{2} = 1{,}96$$

$$1600 \;\rightarrow\; t = \frac{1600 - 1800}{100} = -2 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{-2} \approx 0{,}51$$

$$1550 \;\rightarrow\; t = \frac{1550 - 1800}{100} = -2{,}5 \;\rightarrow\; M = 1{,}4^{-2{,}5} \approx 0{,}43$$

2. **Comprueba que, en el ejemplo anterior referente a la desintegración de una cierta sustancia radiactiva, $M = m \cdot 0{,}76^t$ (t expresado en miles de años), el *periodo de semidesintegración* (tiempo que tarda en reducirse a la mitad la sustancia radiactiva) es de, aproximadamente, 2 500 años.**

Para ello, comprueba que una cantidad inicial cualquiera se reduce a la mitad (aproximadamente) al cabo de 2 500 años ($t = 2{,}5$).

$M = m \cdot 0{,}76^t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } t = 0 \ \rightarrow \ M = m \cdot 0{,}76^0 = m \\ \text{Si } t = 0{,}25 \ \rightarrow \ M = m \cdot 0{,}76^{2,5} \approx m \cdot 0{,}5 = \dfrac{m}{2} \end{array}\right\}$$

La cantidad inicial se ha reducido (aproximadamente) a la mitad en 2 500 años.

Página 267

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$ **e)** $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ b) $\mathbb{R} - \{2\}$ c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$

d) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$ f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

2 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{3 - x}$

b) $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$

b) $[1/2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2]$

d) $(-\infty, 0]$

3 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x}}$ **f)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (+\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R}$

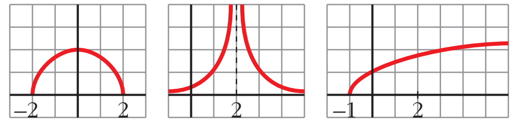
c) $12x - 2x^2 \geq 0 \rightarrow 2x(6 - x) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

e) $4 - x > 0 \rightarrow 4 > x \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 4)$

f) $x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x - 3) > 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

4 **Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**



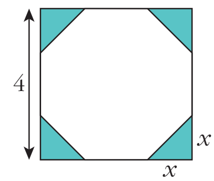
Los dominios son, por orden: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y $[-1, +\infty)$.

Los recorridos son, por orden: $[0, 2]$, $(0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$.

5 **De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.**

a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) Dominio: $(0, 2)$. Recorrido: $(8, 16)$

6 **Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $x/2$ y $2x$ cm.**

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 *l* de volumen. ¿Cuál es su recorrido?

a) $V(x) = x^3$

b) Dominio: $(0, 10)$. Recorrido: $(0, 1\,000)$

Gráfica y expresión analítica

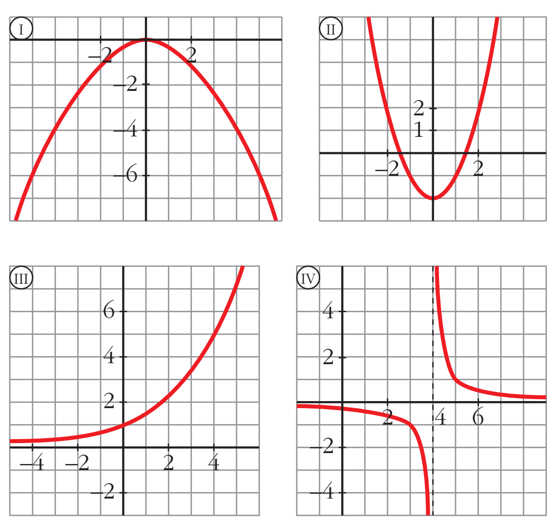
7 **Asocia a cada una de las gráficas su expresión analítica.**

a) $y = 1{,}5^x$

b) $y = x^2 - 2$

c) $y = -0{,}25x^2$

d) $y = \dfrac{1}{x-4}$



a) III

b) II

c) I

d) IV

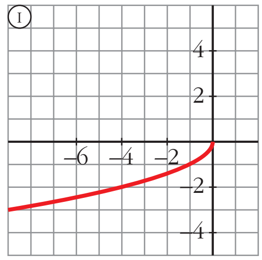
8 **Asocia a cada gráfica la expresión analítica que le corresponda entre las siguientes:**

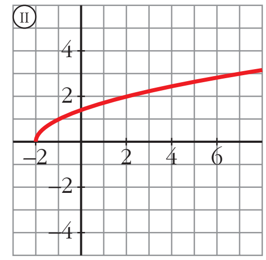
a) $y = \sqrt{x + 2}$

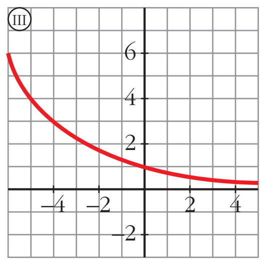
b) $y = 0{,}75^x$

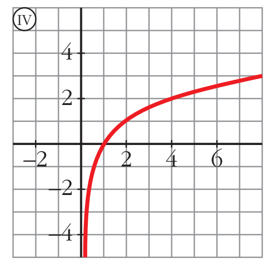
c) $y = log_2\, x$

d) $y = -\sqrt{-x}$









a) II

b) III

c) IV

d) I

Página 268

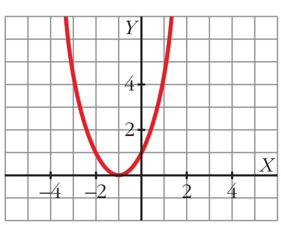
Representación de funciones elementales

9 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

c) $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

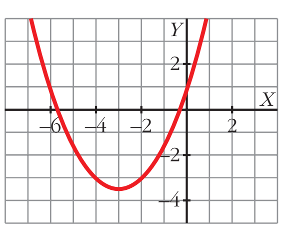
a)



Vértice: (–1, 0)

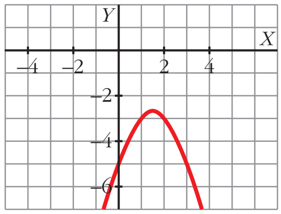
Cortes con los ejes: (–1, 0), (0, 1)

b)



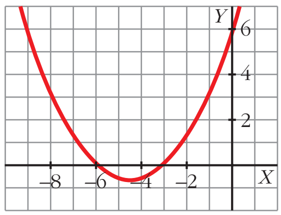
Vértice: $\left(-3, -\dfrac{3}{2}\right)$

Cortes con los ejes: (0, 1); $(-3 - \sqrt{7}\ ;\ 0)$; $(-3 + \sqrt{7}\ ;\ 0)$

c) 

Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{-11}{4}\right)$.

Cortes con los ejes: (–5, 0)

d) 

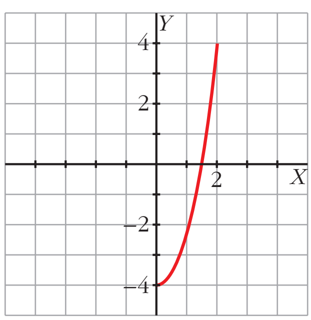
Vértice: $\left(-\frac{9}{2}, \frac{-3}{4}\right)$.

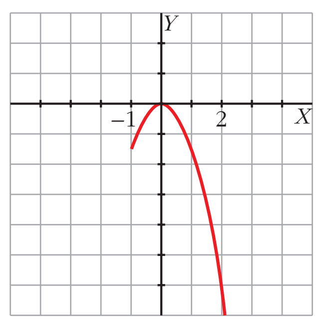
Cortes con los ejes: (0, 6); (–6, 0); (–3, 0)

10 **Representa las siguientes funciones en el intervalo indicado:**

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$ **b)** $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \ge -1$

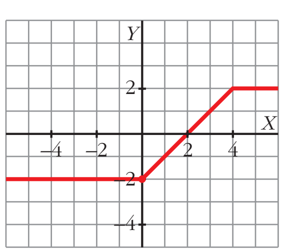
a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$ b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \ge -1$

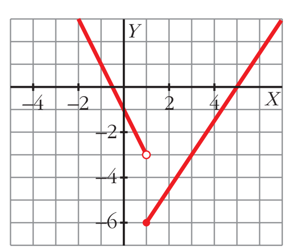




11 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) 

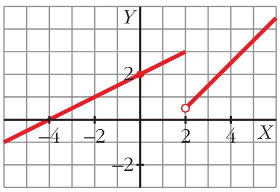
b) 

12 **Representa:**

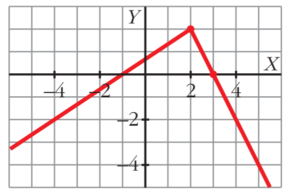
a) $y = \begin{cases} (x/2) + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - (3/2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

a)



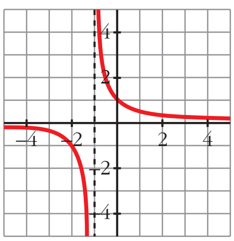
b)



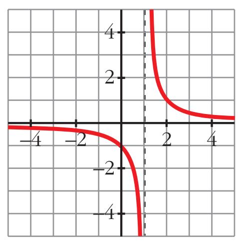
13 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$

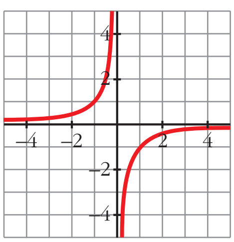
a)



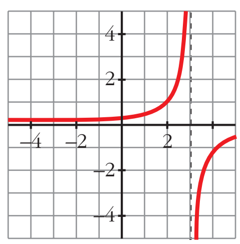
b)



c)



d)



14 **Representa las siguientes funciones:**

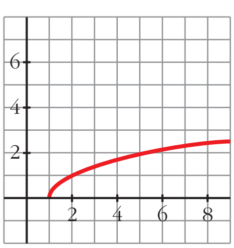
a) $y = \sqrt{x-1}$

b) $y = -\sqrt{x+3}$

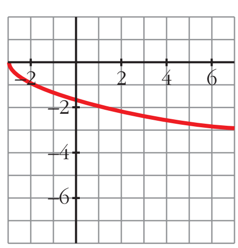
c) $y = 2 + \sqrt{x}$

d) $y = 1 - \sqrt{x}$

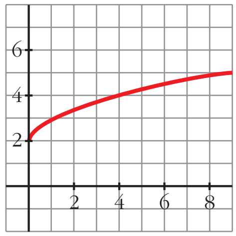
a)



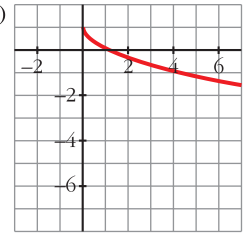
b)



c)



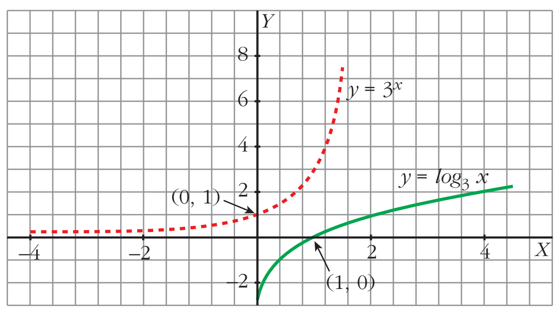
d)



15 **Haz una tabla de valores de la función $y = 3^x$. A partir de ella, representa su función inversa $y = log_3\ x$.**

x	–2	–1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9

x	1/9	1/3	1	3	9
$log_3\ x$	–2	–1	0	1	2



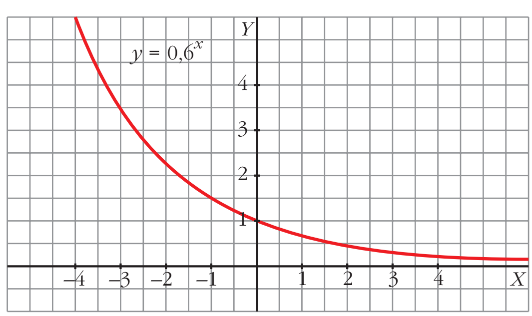
16 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = 0{,}6^x$

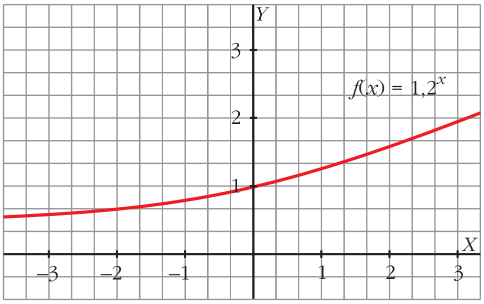
b) $y = 1{,}2^x$

a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



b)



Composición y función inversa

17 **Considera las funciones f y g definidas por las expresiones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-3)$

c) $(g \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(x)$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $g(g(x)) = x$ d) $f(g(x)) = \frac{1 + x^2}{x^2}$

18 **Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halla:**

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(g \circ g)(x)$

a) $f[g(x)] = \cos \sqrt{x}$

b) $g[f(x)] = \sqrt{\cos x}$

c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

19 **Halla la función inversa de estas funciones:**

a) $y = 3x$

b) $y = x + 7$

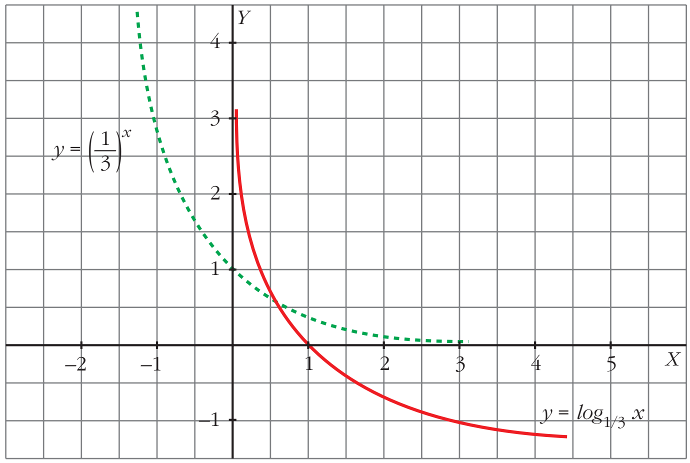
c) $y = 3x - 2$

a) $x = 3y \rightarrow y = \frac{x}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

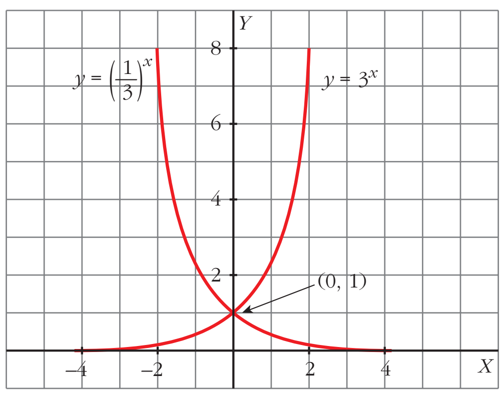
b) $x = y + 7 \rightarrow y = x - 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

c) $x = 3y - 2 \rightarrow y = \frac{x + 2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$

20 **Representa la gráfica de $y = log_{1/3}\, x$ a partir de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.**



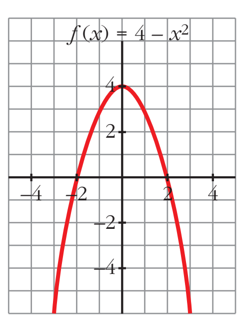
21 **Comprueba que las gráficas de $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje *OY*.**

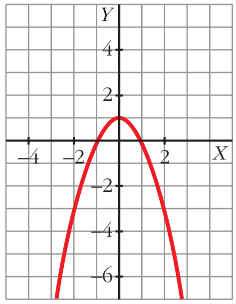


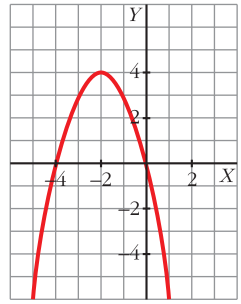
Transformaciones en una función

22 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

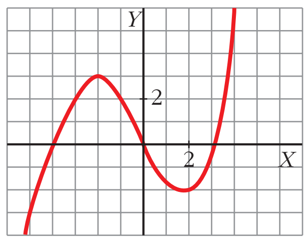
a) $g(x) = f(x) - 3$ **b) $h(x) = f(x + 2)$**



a) 

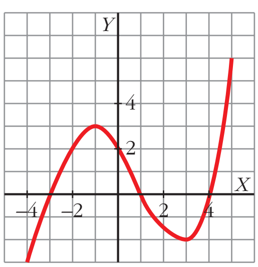
b) 

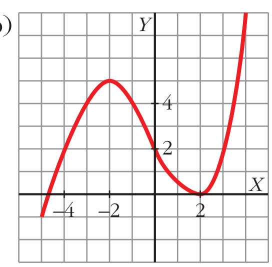
23 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$

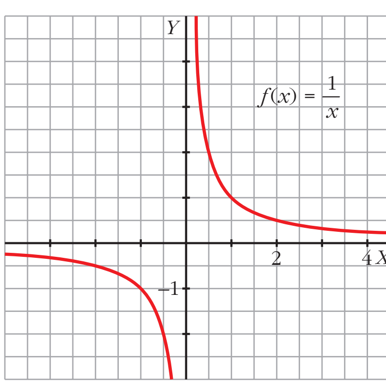
a) 

b) 

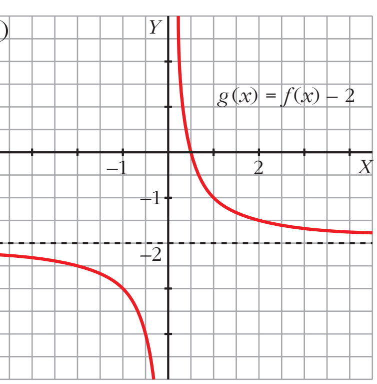
24 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

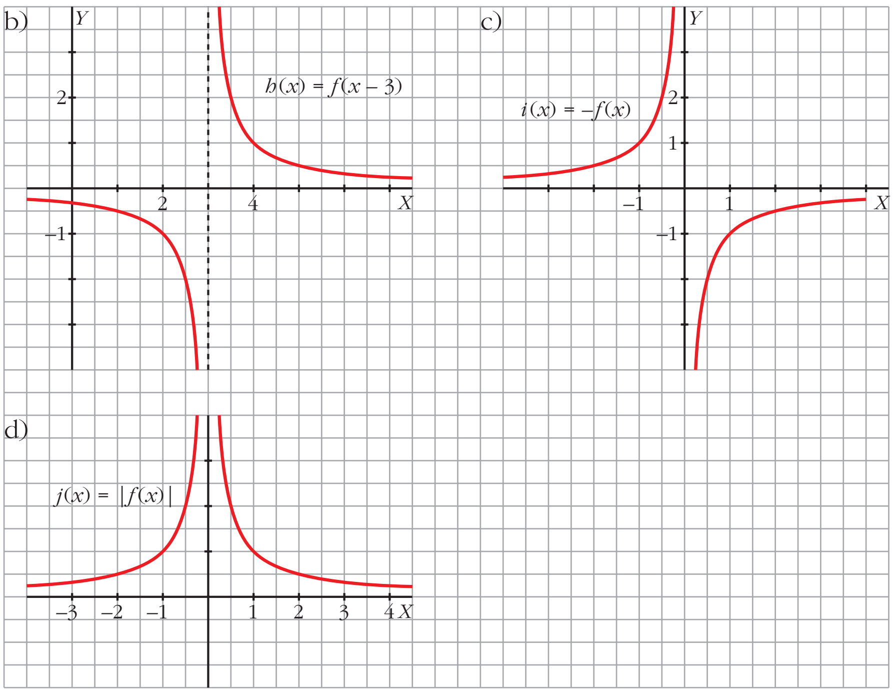
a) $g(x) = f(x) - 2$ **b)** $h(x) = f(x - 3)$

c) $i(x) = -f(x)$ **d)** $j(x) = |f(x)|$



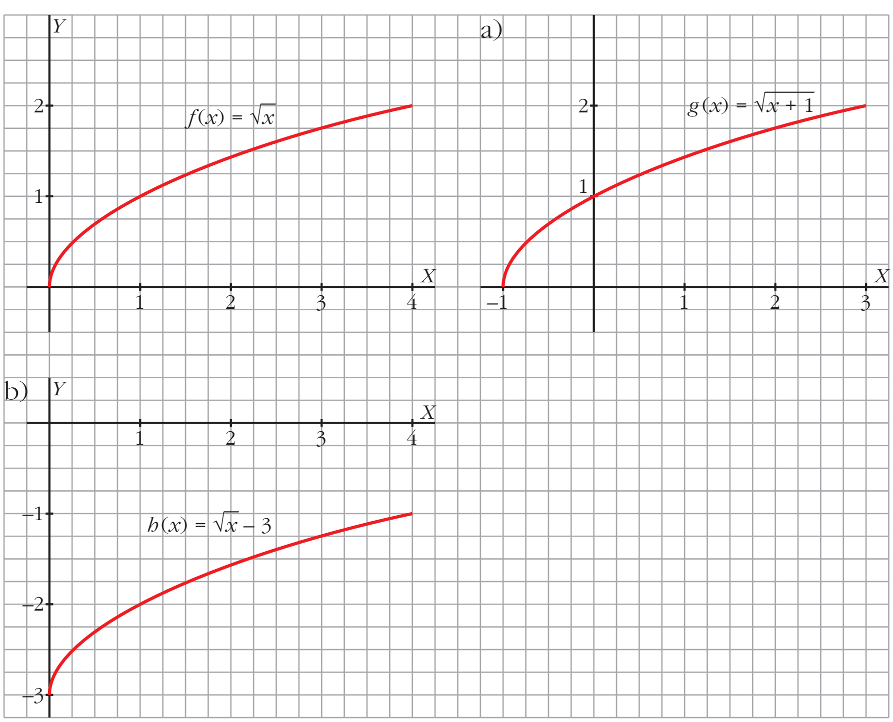
a)





25 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:**

a) $g(x) = f(x+1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$



Página 269

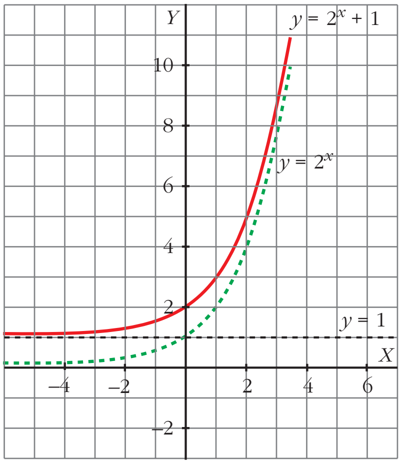
26 **Representa las funciones:**

a) $y = 2^x + 1$

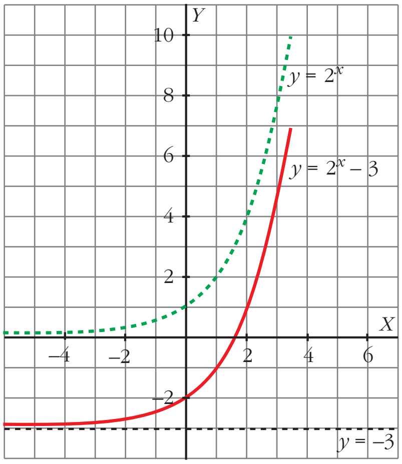
b) $y = 2^x - 3$

☛ ***Utiliza la gráfica de*** $y = 2^x$.

a)



b)



27 **Representa las siguientes funciones:**

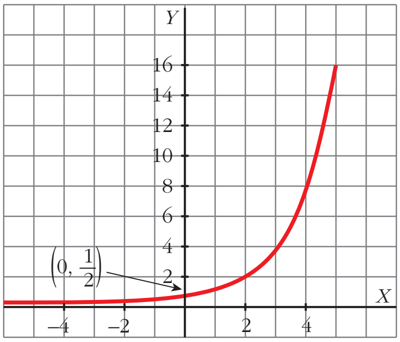
a) $y = 2^{x-1}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$

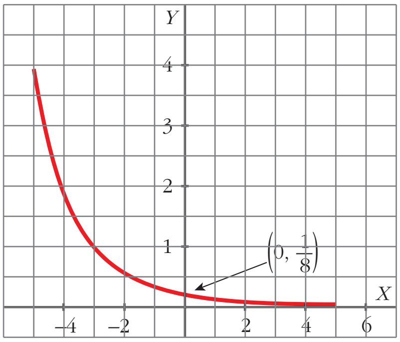
c) $y = 1 - 2^x$

d) $y = 2^{-x}$

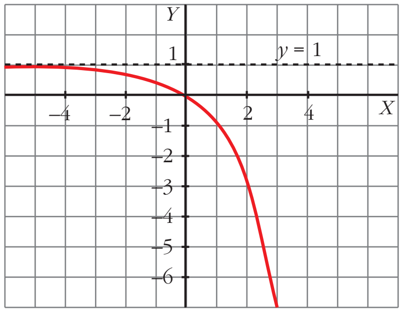
a)



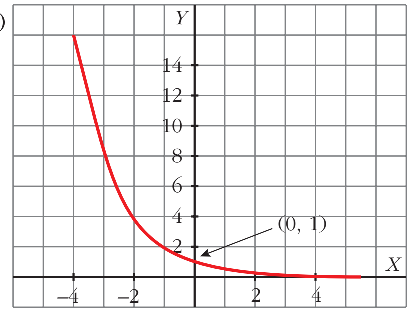
b)



c)



d)



28 **Representa estas funciones a partir de la gráfica de** $\boldsymbol{y = log_2\, x}$**:**

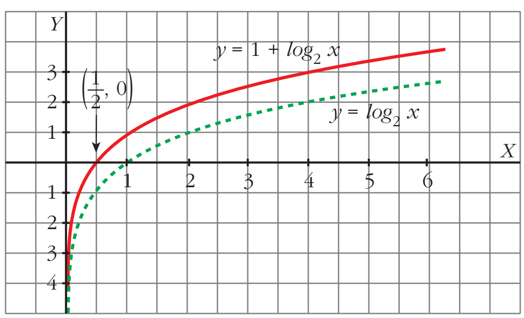
a) $\boldsymbol{y = 1 + log_2\, x}$

b) $\boldsymbol{y = log_2\, (x - 1)}$

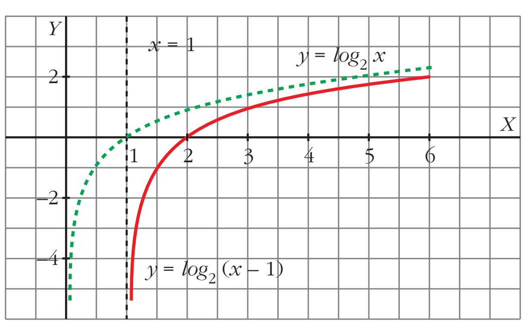
c) $\boldsymbol{y = -log_2\, x}$

d) $\boldsymbol{y = log_2\, (-x)}$

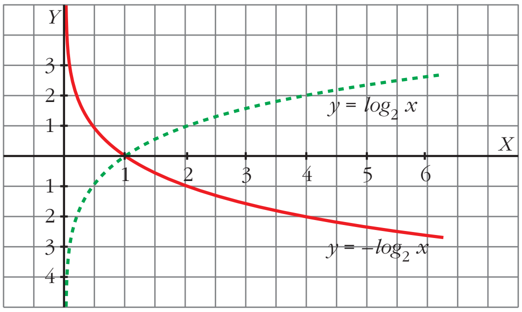
a) $y = 1 + log_2\, x$



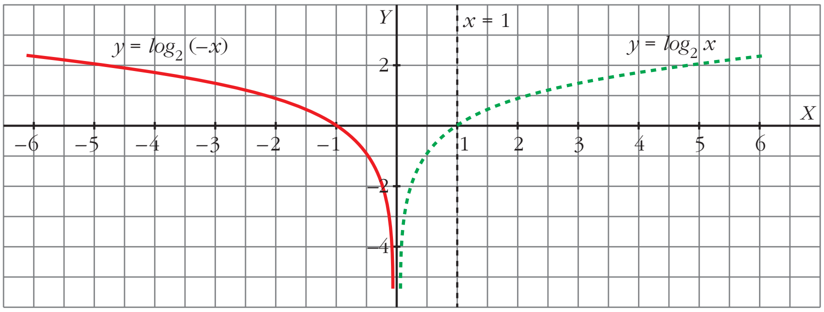
b) $y = log_2\, (x - 1)$



c) $y = -log_2\ x$

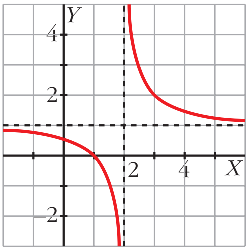


d) $y = log_2\ (-x)$



29 **La expresión analítica de esta función es del tipo** $y = \dfrac{1}{x - a} + b$**.**

Observa la gráfica y di el valor de a **y** b**.**



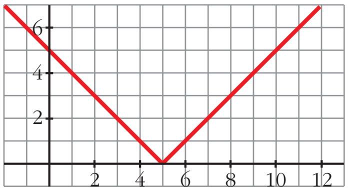
$a = 2$

$b = 1$

Valor absoluto de una función

30 **Representa la función** $y = |x - 5|$ **y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

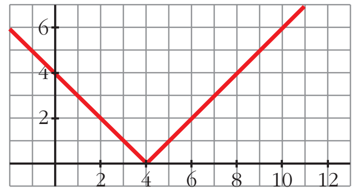
$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



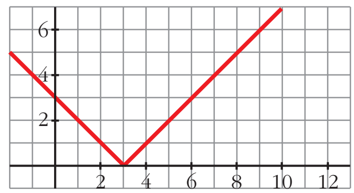
31 **Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



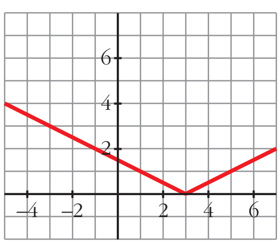
32 **Representa y define como funciones "a trozos":**

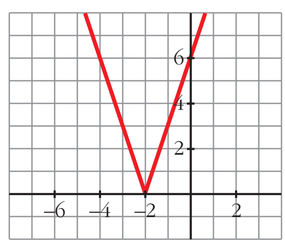
a) $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **b)** $y = |3x + 6|$

c) $y = \left|\dfrac{2x-1}{3}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

a) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\[2mm] \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

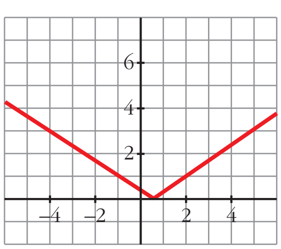
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

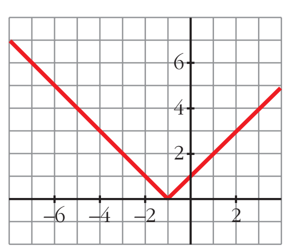




c) $y = \begin{cases} \dfrac{-2x+1}{3} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{2x-1}{3} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

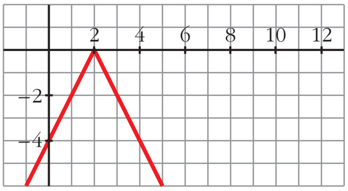




33 **Representa la función:**

$$y = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

¿Puedes definirla como valor absoluto?



Sí.

$y = -|2x - 4|$

34 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$

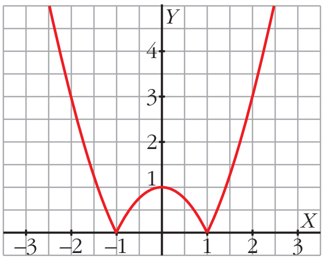
b) $y = |x^2 - 4x|$

c) $y = |x^2 + 2x - 3|$

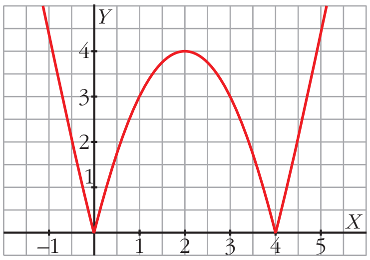
d) $y = |x^2 - 2x + 1|$

Mira el ejercicio resuelto número 5.

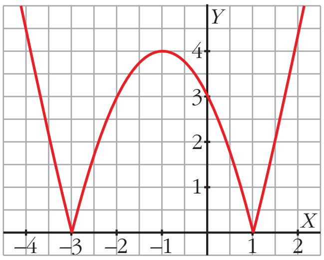
a)



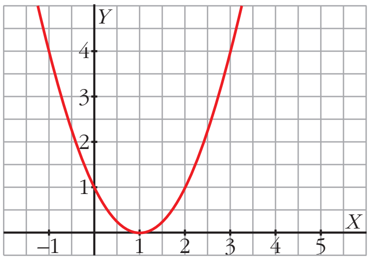
b)



c)



d)



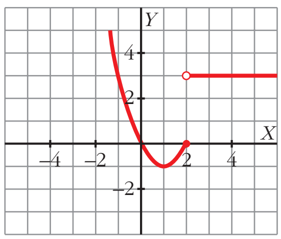
35 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

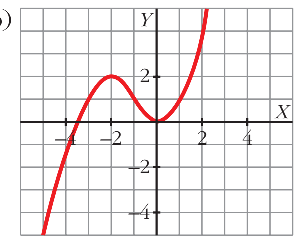
b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

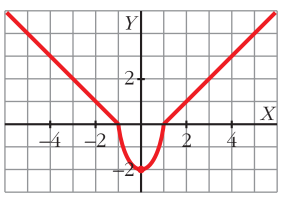
a)



b)



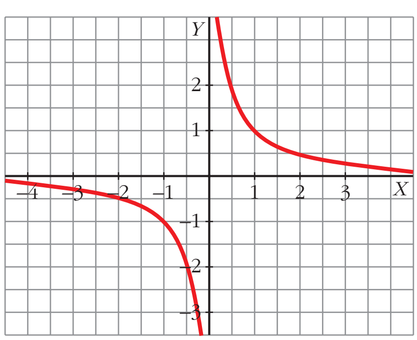
c)



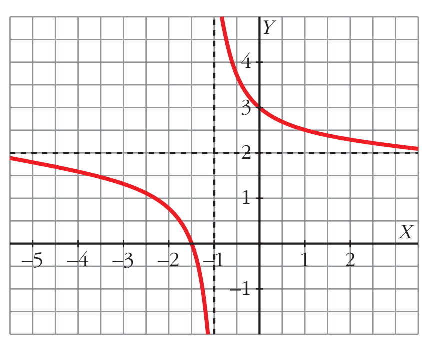
36 **Utilizando la relación** $\dfrac{\textbf{dividendo}}{\textbf{divisor}} = \textbf{cociente} + \dfrac{\textbf{resto}}{\textbf{divisor}}$ **podemos escribir la función** $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ **de esta forma:** $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$.

Comprueba que su gráfica coincide con la de $y = 1/x$ **trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.**

$y = \dfrac{1}{x}$



$y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$



37 **Representa las siguientes funciones utilizando el procedimiento del problema anterior.**

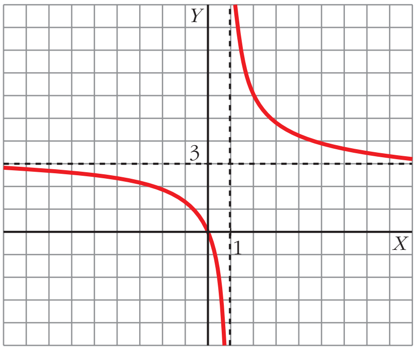
a) $y = \dfrac{3x}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x-2}{x-4}$

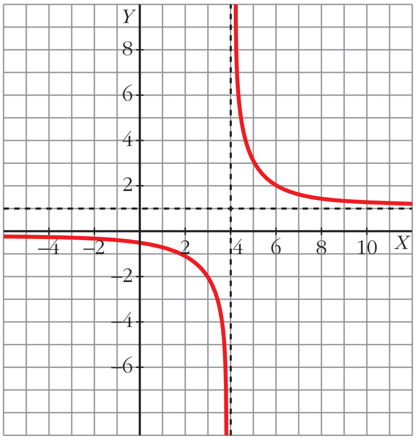
c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$

d) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

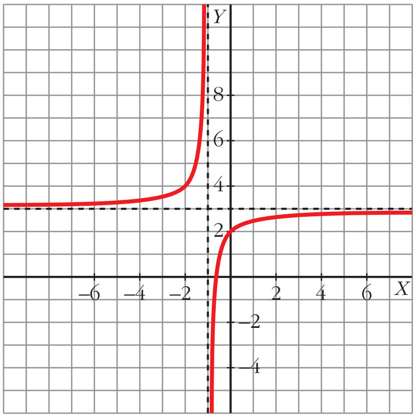
a) $y = \dfrac{3x}{x-1} = 3 + \dfrac{3}{x-1}$



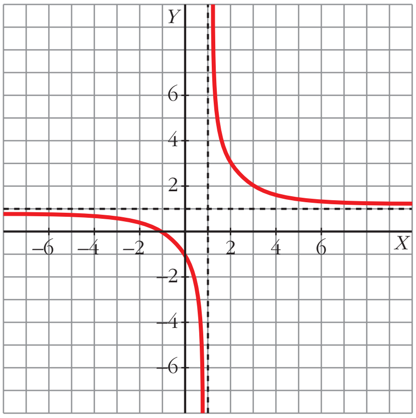
b) $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$



c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$



d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$



38 **Con las funciones:**

$$f(x) = x - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x} \qquad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

hemos obtenido, por composición, estas otras:

$$p(x) = \sqrt{x-5}\,; \;\; q(x) = \sqrt{x} - 5; \;\; r(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Explica cómo, a partir de f, g y h, se pueden obtener p, q y r.

$$p = g \circ f \qquad q = f \circ g \qquad r = h \circ g$$

39 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = k\,a^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

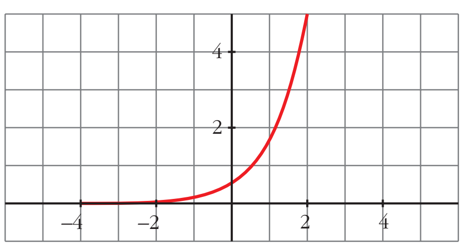
a) Calcula k y a.

b) Representa la función.

a) $\left.\begin{array}{l} 0{,}5 = k \cdot a^0 \\ 1{,}7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}5 = k \\ 1{,}7 = k \cdot a \end{array} \;\;\rightarrow\;\; \begin{array}{l} k = 0{,}5 \\ a = 3{,}4 \end{array}$

La función es $y = 0{,}5 \cdot (3{,}4)^x$

b)



40 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3 \cdot 2^{x-1}$

b) $y = 1 + 3^x$

a) $x = 3 \cdot 2^{y-1}$; $\dfrac{x}{3} = 2^{y-1}$; $log_2 \dfrac{x}{3} = y - 1$

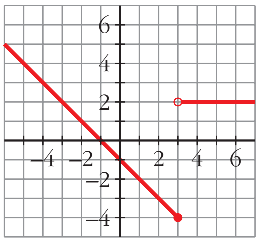
$y = 1 + log_2 \dfrac{x}{3} \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$

b) $x = 1 + 3^y$; $x - 1 = 3^y$; $log_3 (x-1) = y \;\rightarrow\; f^{-1}(x) = log_3 (x-1)$

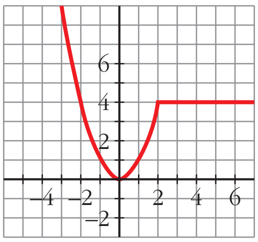
Página 270

41 **Busca la expresión analítica de estas funciones:**

a)



b)



a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

42 **Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:**

a) $y = \text{\textit{arc sen}}\ 0{,}8$

b) $y = \text{\textit{arc sen}}\ (-0{,}9)$

c) $y = \text{\textit{arc cos}}\ 0{,}36$

d) $y = \text{\textit{arc cos}}\ (-0{,}75)$

e) $y = \text{\textit{arc tg}}\ 3{,}5$

f) $y = \text{\textit{arc tg}}\ (-7)$

a) 0,93 *rad* → 53° 7' 48''

b) –1,12 *rad* → –64° 9' 29''

c) 1,20 *rad* → 68° 53' 59''

d) 2,42 *rad* → 138° 35' 25''

e) 1,29 *rad* → 74° 3' 17''

f) –1,43 *rad* → –81° 52' 11''

43 **Obtén el valor de estas expresiones en grados, sin usar la calculadora:**

a) $y = \text{\textit{arc sen}}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = \text{\textit{arc cos}}\ \frac{1}{2}$

c) $y = \text{\textit{arc tg}}\ 1$

d) $y = \text{\textit{arc sen}}\ (-1)$

e) $y = \text{\textit{arc cos}}\left(-\frac{1}{2}\right)$

f) $y = \text{\textit{arc tg}}\ \sqrt{3}$

a) 60°

b) 60°

c) 45°

d) –90°

e) 120°

f) 60°

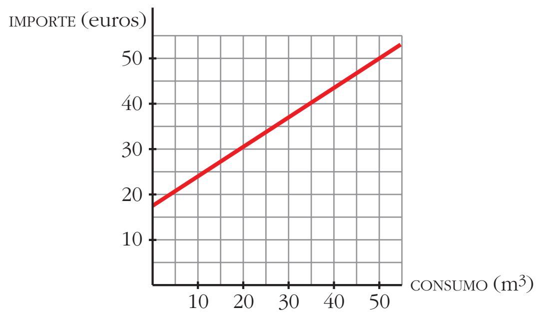
44 **La factura del gas de una familia, en septiembre, ha sido de 24,82 euros por 12 m^3, y en octubre, de 43,81 por 42 m^3.**

a) Escribe la función que da el importe de la factura según los m^3 consumidos y represéntala.

b) ¿Cuánto pagarán si consumen 28 m^3?

a) $y = 24{,}82 + 0{,}633(x - 12)$

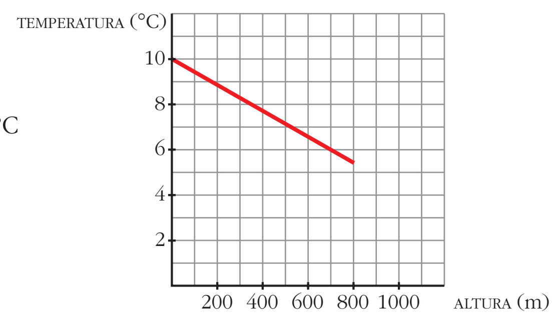
$y(28) = 34{,}94$ euros



b) $y = 24{,}82 + 0{,}633(x - 12) = 0{,}633x + 17{,}22$

45 **Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.**

$T(h) = 10 - \dfrac{h}{180}$; $T(800) = 5{,}56$ °C



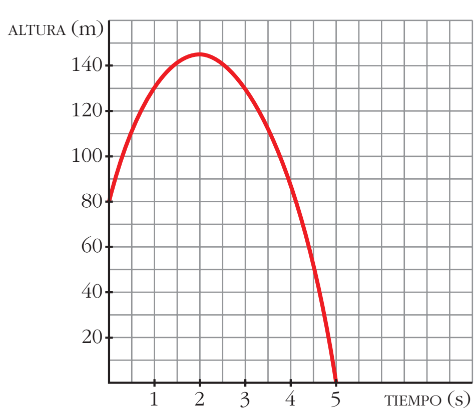
46 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).**

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

a)

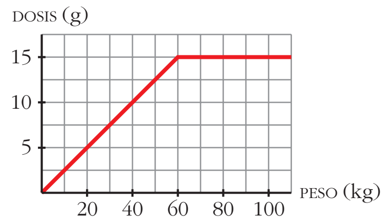


b) 80 metros.

c) 2 segundos.

47 **La dosis de un medicamento es 0,25 g por cada kilo de peso del paciente, hasta un máximo de 15 g. Representa la función *peso del paciente-cantidad de medicamento* y halla su expresión analítica.**

$y = 0{,}25x$ hasta un máximo de 15 g: $0{,}25x = 15 \rightarrow x = 60$ kg



$$y = \begin{cases} 0{,}25x & 0 < x < 60 \\ 15 & x \geq 60 \end{cases}$$

48 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

☛ ***Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - (x/4))$ euros.***

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$

Deben venderse 15 unidades.

49 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)\,(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x = decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 50 \text{ euros}$$

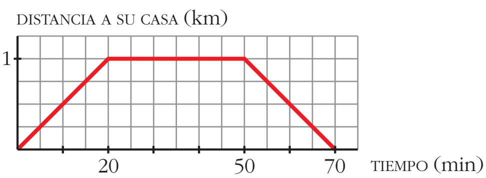
50 **Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia.**

Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

a) Representa la función *tiempo-distancia*.

b) Busca su expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 1 & \text{si } 20 < x \le 50 \\ -1/20\,(x-70) & \text{si } 50 < x \le 70 \end{cases}$

51 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435.**

Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función.

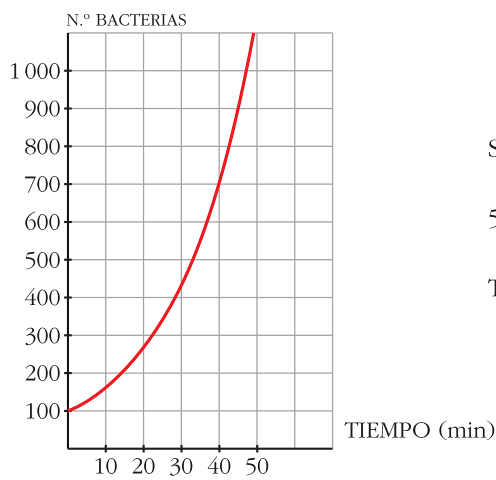
¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \rightarrow 100 = k \cdot a^0 \rightarrow k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \rightarrow 435 = 100 \cdot a^{30} \rightarrow a^{30} = 4{,}35 \rightarrow a = 4{,}35^{1/30} \rightarrow a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.



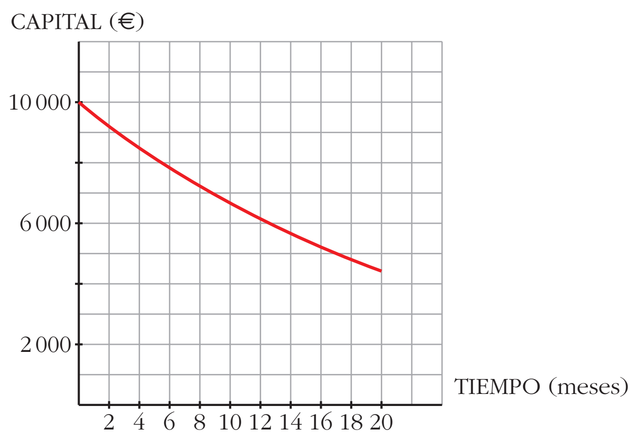
Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

$50 = 1{,}05^x \rightarrow x = \dfrac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80$ min

Tardará 80 minutos, aproximadamente.

52 **Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4% mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?**

$y = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$



Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

$0{,}96^x = 0{,}5 \rightarrow x = \dfrac{log\ 0{,}5}{log\ 0{,}96} \approx 16{,}98$ meses

Tardará 17 meses, aproximadamente.

Página 271

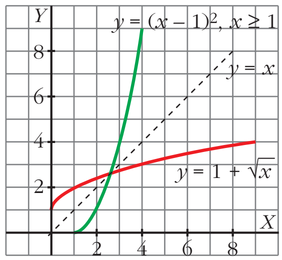
CUESTIONES TEÓRICAS

53 **Si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = log_2\ x$, ¿cuál es la función $(f \circ g)(x)$? ¿Y $(g \circ f)(x)$?**

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

54 **Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, halla $f^{-1}(x)$. Representa las dos funciones y comprueba su simetría respecto de la bisectriz del 1.^er^ cuadrante.**

$f^{-1}(x) = (x-1)^2,\ \ x \geq 1$



55 **Dada la función $y = a^x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es creciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = a^x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$?

a) La y no puede ser negativa, la x sí.

b) $a > 1$

c) (0, 1)

d) Para $x < 0$.

56 **Calcula x en las siguientes expresiones:**

a) $arc\ sen\ x = 45°$ **b)** $arc\ cos\ x = 30°$

c) $arc\ tg\ x = -72°$ **d)** $arc\ sen\ x = 75°$

e) $arc\ cos\ x = \frac{\pi}{3}$ **rad** **f)** $arc\ tg\ x = 1{,}5$ **rad**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) –3,078

d) 0,966 e) $\frac{1}{2}$ f) 14,101

PARA PROFUNDIZAR

57 **Una parábola corta al eje de abscisas en $x = 1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?**

$$y = k(x - 1)(x - 3) = k(x^2 - 4x + 3)$$

Vértice $\rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y(2) = -k = -4 \rightarrow k = 4$

La ecuación es: $y = 4(x^2 - 4x + 3) = 4x^2 - 16x + 12$

58 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\frac{x-9}{x}}$

a) $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$: $\left.\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}\right\} x > 2$; $\left.\begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}\right\} x \leq -3$

Dominio = $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

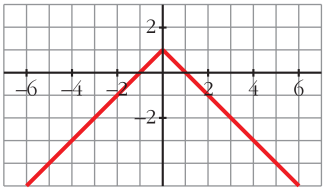
b) $\dfrac{x-9}{x} \ge 0$ $\begin{cases} \left.\begin{cases} x-9 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases}\right\} x \ge 9 \\ \left.\begin{cases} x-9 \le 0 \\ x < 0 \end{cases}\right\} x < 0 \end{cases}$ Dominio = $(-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

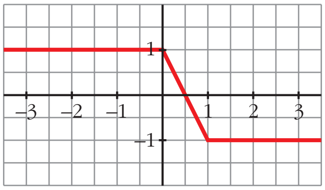
59 **Representa y expresa en intervalos las funciones:**

a) $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x-1| - |x|$

a) $y = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \ge 0 \\ 1+x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ 1-2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$





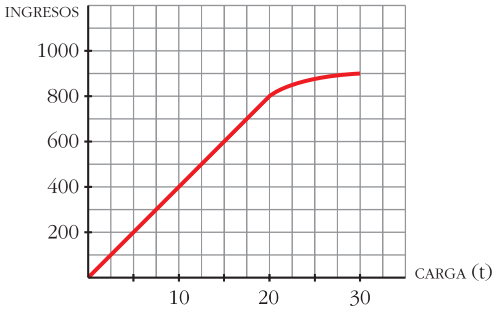
60 **Las tarifas de una empresa de transportes son:**

- **40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ [40-(x-20)]x & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

Es decir:

$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

Página 271

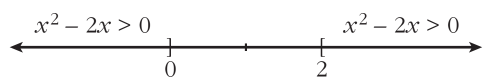
AUTOEVALUACIÓN

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

a) La función está definida para los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

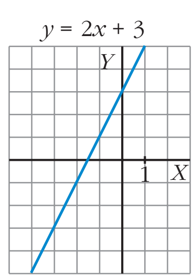
$$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

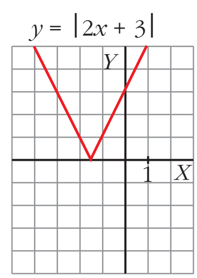
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

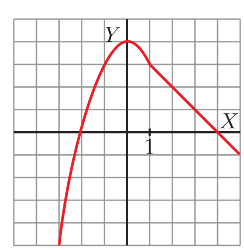
a) $y = |2x + 3|$ **b)** $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.



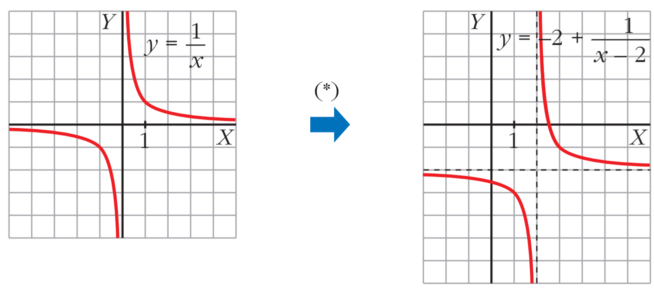


b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



3. **Representa** $y = \frac{1}{x}$. **A partir de ella, dibuja la gráfica de** $y = \frac{-2x+5}{x-2}$.

$$\begin{array}{r|l} -2x+5 & x-2 \\ \hline 2x-4 & -2 \\ 1 & \end{array} \quad \to \quad \frac{-2x+5}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$



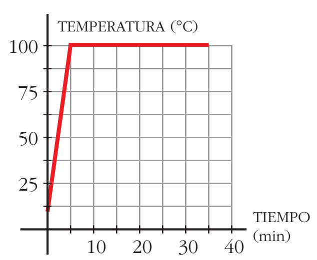
(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

4. **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.**

a) Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a)



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

  Pendiente: $\frac{100-10}{5-0} = 18 \to y = 18(x-0) + 10$

- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\to$ $\to y = 100$

Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

b) Dominio: $f(x)$ está definida para valores de x entre 0 y 35, ambos incluidos. Por tanto, $Dom\, f = [0, 35]$.

Recorrido de $f = [10, 100]$

5. **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

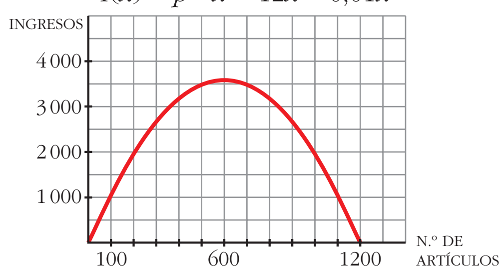
b) Representa la función *nº de artículos-ingresos.*

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

6. **Depositamos en un banco 5 000 € al 6% anual.**

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es?

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

a) $C = 5\,000\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)^t \rightarrow C = 5\,000\,(1{,}06)^t$.

Es una función exponencial creciente, por ser $a > 1$.

b) $10\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}06^t \rightarrow 2 = 1{,}06^t \rightarrow \log 2 = t \log 1{,}06 \rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$

Tardará 12 años en duplicarse.

7. **Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:**

a) $f[g(2)]$

b) $g[f(15)]$

c) $f \circ g$

d) $g \circ f$

a) $f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g\left(\sqrt{15+1}\right) = g(4) = \dfrac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3} + 1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

d) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 3}$