

Página 69

REFLEXIONA Y RESUELVE

Puñado de almendras

Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos.

Ante un saco de almendras, el dueño les dijo:

— Coged las que queráis.

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- ¿Cómo se llama el hijo de Antonio?
- ¿Y el de Juan?
- ¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?

- 2.º caso: 15×3

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \rightarrow y = 6 \end{array}$$

Esto significa que otro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

- 3.º caso: 45×1

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \rightarrow x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \rightarrow y = 22 \end{array}$$

Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo, 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados y José 6.
- Juan coge 23 puñados y Julio 22.
- Pablo se lleva 7 puñados y Luis 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Sin necesidad del álgebra

Un galgo persigue a una liebre.

La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre.

¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada 2 · 2 saltos de galgo y 3 · 2 de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada 2 · 3 saltos de galgo y 3 · 3 de liebre se acerca 3 u el galgo.

... ..

Cada 2 · 90 saltos de galgo y 3 · 90 de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ saltos el galgo}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ saltos la liebre}$$

De esta forma el galgo recorre $180 \cdot 5 u = 900 u$; y la liebre $270 \cdot 3 u = 810 u$.

Como tenía 90 de ventaja: $810 + 90 = 900 u$

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos y la liebre 270.

Página 70

1. Efectúa la división:

$$P(x) = x^5 - 6x^3 - 25x$$

entre

$$Q(x) = x^2 + 3x$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad - 6x^3 \quad - 25x \quad | \quad x^2 + 3x \\
 \underline{-x^5 - 3x^4} \\
 -3x^4 \\
 \underline{3x^4 + 9x^3} \\
 3x^3 \\
 \underline{-3x^3 - 9x^2} \\
 -9x^2 \\
 \underline{9x^2 + 27x} \\
 2x
 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$
 Resto: $2x$

2. Calcula el cociente y el resto:

$$(6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (3x^2 - 3x - 1)$$

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5 \quad | \quad 3x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-6x^5 + 6x^4 + 2x^3} \\
 15x^4 - 5x^3 \\
 \underline{-15x^4 + 15x^3 + 5x^2} \\
 10x^3 + 12x^2 \\
 \underline{-10x^3 + 10x^2 + \frac{10}{3}x} \\
 22x^2 - \frac{14}{3}x \\
 \underline{-22x^2 + 22x + \frac{22}{3}} \\
 \frac{52}{3}x + \frac{37}{3}
 \end{array}$$

3. Copia y completa:

$$\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 3x + \square \quad | \quad x^3 - 2x^2 + \square x + \square$$

$$\square x^4 + \square x^3 - 2x^2 + 6x \quad 2x + \square$$

$$\underline{3x^3 - x^2 + \square x + \square}$$

$$\underline{\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square}$$

$$\square x^2 + \square x + 2$$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 7 \quad | \quad x^3 - 2x^2 + x - 3 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6x} \\
 3x^3 - x^2 + 3x - 7 \\
 \underline{-3x^3 + 6x^2 - 3x + 9} \\
 5x^2 + 2
 \end{array}$$

Página 71

- 4. En una división de polinomios, el dividendo es de grado cinco y el divisor de grado dos.**

¿Cuál es el grado del cociente? ¿Qué puedes decir del grado del resto?

El cociente es de grado tres. El resto es de grado inferior a dos.

- 5. a) ¿Cuánto han de valer a y b para que la siguiente división sea exacta?**

$$(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$$

- b) ¿Cuánto han de valer a y b para que el resto de la división sea $3x - 7$?**

$$\begin{array}{r} \text{a) } x^4 - 5x^3 + 3x^2 \quad + ax \quad + b \quad | \quad x^2 - 5x + 1 \\ \underline{-x^4 + 5x^3 - x^2} \quad x^2 + 2 \\ 2x^2 + ax + b \\ \underline{-2x^2 + 10x - 2} \\ (10 + a)x + (b - 2) \end{array}$$

Para que la división sea exacta, debe cumplirse:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a = 0 \\ b - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -10 \\ b = 2 \end{array}$$

- b) Para que el resto sea $3x - 7$, debe cumplirse:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a = 3 \\ b - 2 = -7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -7 \\ b = -5 \end{array}$$

- 6. Expresa el resultado de las siguientes divisiones en la forma $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$:**

a) $\frac{x+9}{x+6}$

b) $\frac{x+6}{x+9}$

c) $\frac{2x+3}{2x}$

d) $\frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+2}$

e) $\frac{3x^2-4}{x+1}$

f) $\frac{x^3-x^2+2x+1}{x^2+5x-2}$

g) $\frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2+4x-1}$

h) $\frac{3x^3+4x^2-5x+2}{x+2}$

$$\begin{array}{r} \text{a) } x+9 \quad | \quad x+6 \\ \underline{-x-6} \quad 1 \\ 3 \end{array}$$

$$\frac{x+9}{x+6} = 1 + \frac{3}{x+6}$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad x + 6 \quad | \quad x + 9 \\
 \underline{-x - 9} \quad 1 \\
 \quad \quad \quad -3
 \end{array}
 \qquad
 \frac{x + 6}{x + 9} = 1 + \frac{-3}{x + 9}$$

$$c) \quad \frac{2x + 3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{3}{2x} = 1 + \frac{3}{2x}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad x^2 + 2x + 5 \quad | \quad x^2 + 2x + 2 \\
 \underline{-x^2 - 2x - 2} \quad 1 \\
 \quad \quad \quad 3
 \end{array}
 \qquad
 \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \frac{3}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{array}{r}
 e) \quad 3x^2 \quad - 4 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{-3x^2 - 3x} \quad 3x - 3 \\
 \quad \quad \quad -3x - 4 \\
 \quad \quad \quad \underline{3x + 3} \\
 \quad \quad \quad \quad -1
 \end{array}
 \qquad
 \frac{3x^2 - 4}{x + 1} = 3x - 3 + \frac{-1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 f) \quad x^3 - x^2 + 2x + 1 \quad | \quad x^2 + 5x - 2 \\
 \underline{-x^3 - 5x^2 + 2x} \quad x - 6 \\
 \quad \quad \quad -6x^2 + 4x + 1 \\
 \quad \quad \quad \underline{6x^2 + 30x - 12} \\
 \quad \quad \quad \quad 34x - 11 \\
 \quad \quad \quad \quad \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x - 2} = x - 6 + \frac{34x - 11}{x^2 + 5x - 2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 g) \quad x^4 \quad + 3x^2 + 2x + 3 \quad | \quad x^2 + 4x - 1 \\
 \underline{-x^4 - 4x^3 + x^2} \quad x^2 - 4x + 20 \\
 \quad \quad \quad -4x^3 + 4x^2 + 2x + 3 \\
 \quad \quad \quad \underline{4x^3 + 16x^2 - 4x} \\
 \quad \quad \quad \quad 20x^2 - 2x + 3 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{-20x^2 - 80x + 20} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad -82x + 23 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x - 1} = x^2 - 4x + 20 + \frac{-82x + 23}{x^2 + 4x - 1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{h) } 3x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \quad \quad \quad 3x^2 - 2x - 1 \\
 -2x^2 - 5x + 2 \\
 \underline{2x^2 + 4x} \\
 -x + 2 \\
 \underline{x + 2} \\
 4
 \end{array}
 \qquad
 \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x + 2} = 3x^2 - 2x - 1 + \frac{4}{x + 2}$$

Página 72

1. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

| | | | | | | |
|----|----|----|----|---|--------------------------|-----------|
| a) | 1 | -3 | 2 | 4 | Cociente: $x^2 - 4x + 6$ | |
| | -1 | | -1 | 4 | -6 | Resto: -2 |
| | | 1 | -4 | 6 | -2 | |

| | | | | | | | | |
|----|----|----|-----|----|---|----|--|----------|
| b) | 5 | 14 | -5 | -4 | 5 | -2 | Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ | |
| | -3 | | -15 | 3 | 6 | -6 | 3 | Resto: 1 |
| | | 5 | -1 | -2 | 2 | -1 | 1 | |

| | | | | | | |
|----|---|---|-----|----|---------------------------|----------|
| c) | 2 | 0 | -15 | -8 | Cociente: $2x^2 + 6x + 3$ | |
| | 3 | | 6 | 18 | 9 | Resto: 1 |
| | | 2 | 6 | 3 | 1 | |

| | | | | | | | |
|----|----|---|----|---|----|--------------------------------|----------|
| d) | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | Cociente: $x^3 - x^2 + 2x - 2$ | |
| | -1 | | -1 | 1 | -2 | 2 | Resto: 3 |
| | | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | |

2. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

c) $(4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x + 1)$

| | | | | | | |
|----|---|---|----|----|----|--|
| a) | 2 | 1 | 0 | -5 | -3 | |
| 2 | | 4 | 10 | 20 | 30 | |
| | 2 | 5 | 10 | 15 | 27 | |

d) $(2,5x^3 + 1,5x^2 - 3,5x - 4,5) : (x - 1)$

Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 10x + 15$
 Resto: 27

| | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|----|-----|--|
| b) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -32 | |
| 2 | | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | |
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 0 | |

Cociente: $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$
 Resto: 0

| | | | | | |
|----|---|----|----|---|--|
| c) | 4 | 4 | -5 | 3 | |
| -1 | | -4 | 0 | 5 | |
| | 4 | 0 | -5 | 8 | |

Cociente: $4x^2 - 5$
 Resto: 8

| | | | | | |
|----|-----|-----|------|------|--|
| d) | 2,5 | 1,5 | -3,5 | -4,5 | |
| 1 | | 2,5 | 4 | 0,5 | |
| | 2,5 | 4 | 0,5 | -4 | |

Cociente: $2,5x^2 + 4x + 0,5$
 Resto: -4

Página 74

1. Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

| | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|--|
| | 1 | -4 | 7 | -12 | 12 | |
| 2 | | 2 | -4 | 6 | -12 | |
| | 1 | -2 | 3 | -6 | 0 | |
| 2 | | 2 | 0 | 6 | | |
| | 1 | 0 | 3 | 0 | | |

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 (x^2 + 3)$$

2. Factoriza el siguiente polinomio: $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$

| | | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|--|
| | 1 | 1 | -27 | -25 | 50 | |
| 1 | | 1 | 2 | -25 | -50 | |
| | 1 | 2 | -25 | -50 | 0 | |
| -2 | | -2 | 0 | 50 | | |
| | 1 | 0 | -25 | 0 | | |

$$x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = (x - 1)(x + 2)(x - 5)(x + 5)$$

Página 75

3. Observa y descompón en factores el polinomio:

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$$

| | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|
| | 1 | -8 | 11 | 32 | -60 |
| 2 | | 2 | -12 | -2 | 60 |
| | 1 | -6 | -1 | 30 | 0 |
| -2 | | -2 | 16 | -30 | |
| | 1 | -8 | 15 | 0 | |
| 3 | | 3 | -15 | | |
| | 1 | -5 | 0 | | |

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

4. Razona por qué $x - 1$, $x + 1$, $x + 5$, $x - 5$ son, en principio, posibles divisores del polinomio $x^3 - x^2 - 25x + 25$.

a) Razona por qué $x - 3$ no puede serlo.

b) Descompón en factores dicho polinomio.

Los divisores del término independiente (25) son: 1 -1, 5, -5, 25, -25

Por tanto, los polinomios $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 5)$, $(x + 5)$ son posibles divisores del polinomio dado.

a) 3 no es divisor de 25.

b)

| | | | | |
|---|---|----|-----|-----|
| | 1 | -1 | -25 | 25 |
| 1 | | 1 | 0 | -25 |
| | 1 | 0 | -25 | 0 |
| 5 | | 5 | 25 | |
| | 1 | 5 | 0 | |

$$x^3 - x^2 - 25x + 25 = (x - 1)(x - 5)(x + 5)$$

5. Factoriza estos polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 32x - 60$

b) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

c) $x^4 - 10x^2 + 9$

d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

e) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

f) $x^4 + 5x^2 - 36$

g) $x^4 - 81$

h) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x - 4$

a)

| | | | | |
|----|---|----|-----|-----|
| 6 | 1 | 1 | -32 | -60 |
| | | 6 | 42 | 60 |
| | 1 | 7 | 10 | 0 |
| -2 | | -2 | -10 | |
| | 1 | 5 | 0 | |

$$x^3 + x^2 - 32x - 60 = (x - 6)(x + 2)(x + 5)$$

b)

| | | | | |
|----|---|----|-----|-----|
| -2 | 1 | 8 | 21 | 18 |
| | | -2 | -12 | -18 |
| | 1 | 6 | 9 | 0 |
| -3 | | -3 | -9 | |
| | 1 | 3 | 0 | |

$$x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2)(x + 3)^2$$

c)

| | | | | | |
|----|---|----|-----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | -10 | 0 | 9 |
| | | 1 | 1 | -9 | -9 |
| | 1 | 1 | -9 | -9 | 0 |
| -1 | | -1 | 0 | 9 | |
| | 1 | 0 | -9 | 0 | |
| 3 | | 3 | 9 | | |
| | 1 | 3 | 0 | | |

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$$

d)

| | | | | |
|----|---|----|----|----|
| -1 | 1 | -5 | 2 | 8 |
| | | -1 | 6 | -8 |
| | 1 | -6 | 8 | 0 |
| 2 | | 2 | -8 | |
| | 1 | -4 | 0 | |

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

e) Utilizamos el resultado obtenido en el apartado anterior:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = x(x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

f)

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----|
| 2 | 1 | 0 | 5 | 0 | -36 |
| | | 2 | 4 | 18 | 36 |
| | 1 | 2 | 9 | 18 | 0 |
| -2 | | -2 | 0 | -18 | |
| | 1 | 0 | 9 | 0 | |

El polinomio $x^2 + 9$ no tiene raíces reales.

$$\text{Por tanto, } x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 + 9) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{g)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -81 \\
 3 & & 3 & 9 & 27 & 81 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\
 -3 & & -3 & 0 & -27 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 9 & 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{h)} & 1 & 3 & -5 & -3 & 4 \\
 -4 & & -4 & 4 & 4 & -4 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 -1 & & -1 & 2 & -1 & \\
 \hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
 1 & & 1 & -1 & & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4 = (x + 4)(x + 1)(x - 1)^2$$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 4x$

b) $x^2 - 2x$

c) $4x - 12$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

e) $x^2 - 2x + 1$

f) $x^2 + 2x - 3$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x$

h) $x^3 - 4x^2 - 5x$

i) $x^3 - x$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2$

k) $x^5 - 16x$

l) $x^3 - 10^6x$

a) $x^2 - 4x = x(x - 4)$

b) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

c) $4x - 12 = 4(x - 3)$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$

e) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

f) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x = x(x + 1)(x + 3)$

h) $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x + 1)(x - 5)$

i) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x + 1)^2$

k) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

l) $x^3 - 10^6x = x(x - 1000)(x + 1000)$

Página 76

1. Simplifica:

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$

b) $\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$

$$e) \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x}$$

$$f) \frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2}$$

$$a) \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x - 2)} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$$

$$b) \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ 3 & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{4(x - 3)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c) \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

$$d) \frac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2(x + 3)} = \frac{x^2}{x + 3}$$

$$e) \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{cases} \frac{-4 + 2}{2} = -1 \\ \frac{-4 - 2}{2} = -3 \end{cases} \quad \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \begin{cases} \frac{4 + 6}{2} = 5 \\ \frac{4 - 6}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x} = \frac{x(x^2 + 4x + 3)}{x(x^2 - 4x - 5)} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 1)(x - 5)} = \frac{x + 3}{x - 5}$$

$$f) \frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)^2} = \frac{x - 1}{x(x + 1)}$$

2. Efectúa las siguientes sumas:

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} - \frac{3}{10}$$

$$b) \frac{x}{x - 1} + \frac{2x}{x + 1} - 3$$

$$c) \frac{4}{x} + \frac{2(x + 1)}{3(x - 2)} - 4$$

$$d) \frac{5}{x + 2} + \frac{x}{x + 3} - \frac{3}{2}$$

$$e) \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}$$

$$f) \frac{x + 3}{x - 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{26}{25}$$

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} - \frac{3}{10} = \frac{10(x + 3) + 10x - 3x(x + 3)}{x(x + 3)10} = \frac{10x + 30 + 10x - 3x^2 - 9x}{10x^2 + 30x} = \frac{11x - 3x^2 + 30}{10x^2 + 30x}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} - 3 = \frac{x(x+1) + 2x(x-1) - 3(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3}{x^2-1} = \frac{-x+3}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} - 4 = \frac{12(x-2) + 2x(x+1) - 12x(x-2)}{3x(x-2)} =$$

$$= \frac{12x - 24 + 2x^2 + 2x - 12x^2 + 24x}{3x^2 - 6x} = \frac{-10x^2 + 38x - 24}{3x^2 - 6x}$$

$$\text{d) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} - \frac{3}{2} = \frac{10(x+3) + 2x(x+2) - 3(x+2)(x+3)}{2(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{10x + 30 + 2x^2 + 4x - 3x^2 - 9x - 6x - 18}{2x^2 + 4x + 6x + 12} = \frac{-x^2 - x + 12}{2x^2 + 10x + 12}$$

$$\text{e) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} = \frac{4x + 4 - 3x^2}{4x^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 4}{4x^2}$$

$$\text{f) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{26}{25} = \frac{25(x+3)(x+1) - 25(x^2+1) - 26(x^2-1)}{(x^2-1)25} =$$

$$= \frac{25x^2 + 75x + 25x + 75 - 25x^2 - 25 - 26x^2 + 26}{(x^2-1)25} =$$

$$= \frac{-26x^2 + 100x + 76}{25x^2 - 25}$$

Página 77

3. Efectúa estas operaciones:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5} = \frac{(x^2 - 2x + 3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)} =$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 6x + 9}{x^2 + 5x - 2x - 10} = \frac{2x^3 - x^2 + 9}{x^2 + 3x - 10}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{x+5}{2x+3} = \frac{(x^2 - 2x + 3)(x+5)}{(x-2)(2x+3)} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5x^2 - 10x + 15}{2x^2 + 3x - 4x - 6} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 15}{2x^2 - x - 6}$$

4. Calcula:

a) $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right)$

b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right) &= \frac{x+2}{x} : \frac{(x-1)x}{3(2x+1)} = \frac{x+2}{x} \cdot \frac{3(2x+1)}{(x-1)x} = \\ &= \frac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)} = \frac{3(2x^2+4x+x+2)}{x^3-x^2} = \\ &= \frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4} &= \frac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4} = \frac{x^8-x^4}{x^6+x^4} = \frac{x^4(x^4-1)}{x^4(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = x^2-1 \end{aligned}$$

Página 78
1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$$\text{a) } x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 2 \text{ y } -2$$

$$\text{b) } x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 3 \text{ y } -3$$

2. Resuelve:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$\text{a) } x^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ -9 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow \text{No vale} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 79

3. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$$1 + x^2 - 2x = 2x - 3; x^2 - 4x + 4 = 0; x = 2 \text{ (no vale)}$$

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$$

$$x^2 - 116x + 228 = 0; x = \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 114$$

c) $\sqrt{x} = x - 2; x = x^2 + 4 - 4x; 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 4$$

d) $2 - x = \sqrt{x}; 4 + x^2 - 4x = x; x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 1$$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$$

$$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$$

$$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$$

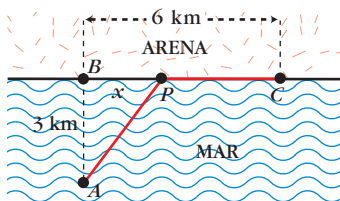
$$25x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0,08 \end{cases} \rightarrow \text{no vale}$$

Así, $x = 2$.

4. Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P , y hemos caminado a 5 km/h de P a C . Hemos tardado, en total, 99 minutos ($99/60$ horas).

¿Cuál es la distancia, x , de B a P ?



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AP}^2 = x^2 + 9 \\ \overline{PC} = 6 - x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = t \\ \frac{6 - x}{5} = \left(\frac{99}{60} - t\right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \\ t = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60} \end{array} \right\} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} = \frac{99}{60}$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 12(6 - x) = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 72 - 12x = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} = 12x + 27$$

$$225(x^2 + 9) = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$225x^2 + 2025 = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$81x^2 - 648x + 1296 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Así, la distancia de B a P es de 4 km .

Página 80

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10} \quad \text{b) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4 \quad \text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{a) } 10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$$

$$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$$

$$0 = 3x^2 - 11x - 30$$

$$x = \frac{11 \pm 21,93}{6} = \begin{cases} 5,489 \\ -1,822 \end{cases}$$

$$x_1 = 5,489; \quad x_2 = -1,822$$

$$\text{b) } 12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$$

$$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$$

$$0 = 10x^2 - 38x + 24$$

$$0 = 5x^2 - 19x + 12; \quad x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } 4x + 4 = 3x^2; \quad 0 = 3x^2 - 4x - 4$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-2}{3}$$

6. Resuelve:

$$\text{a) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3 \quad \text{b) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2} \quad \text{c) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$$

$$\text{a) } x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$$

$$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$$

$$x = 3$$

$$\text{b) } 10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2+5x+6)$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -4$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
 & 35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
 & 35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26 \\
 & 26x^2 - 140x - 96 = 0 \\
 & x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases} \\
 & x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{-8}{13}
 \end{aligned}$$

Página 81

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 2^{3x} = 0,5^{3x+2}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c) } \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$$

$$\text{d) } 7^{x+2} = 5\,764\,801$$

$$\text{a) } 2^{3x} = 2^{-3x-2}; \quad 3x = -3x-2; \quad 6x = -2; \quad x = \frac{-1}{3}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = 3^{-2}; \quad 4-x^2 = -2; \quad x^2 = 6; \quad x = \pm\sqrt{6}$$

$$x_1 = \sqrt{6}; \quad x_2 = -\sqrt{6}$$

$$\text{c) } \frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186; \quad 2^{2x-2-x-2} = 186; \quad 2^{x-4} = 186$$

$$\log 2^{x-4} = \log 186; \quad (x-4) \log 2 = \log 186$$

$$x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11,54$$

$$\text{d) } 7^{x+2} = 7^8; \quad x = 6$$

8. Resuelve:

$$\text{a) } 3^x + 3^{x+2} = 30$$

$$\text{b) } 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$$

$$\text{c) } \frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125$$

$$\text{d) } 5^{2x} = 0,2^{4x-6}$$

$$\text{a) } 3^x + 3^x \cdot 9 = 30$$

$$\text{b) } 5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5}$$

$$3^x(10) = 30; \quad 3^x = 3; \quad x = 1$$

$$5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5}; \quad x = 0$$

$$c) \frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3125 \rightarrow \frac{5^{x^2+1}}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \rightarrow 5^{x^2+1-2(x+2)} = 5^5$$

$$x^2 + 1 - 2(x + 2) = 5 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$d) 5^{2x} = 0,2^{4x-6} \rightarrow 5^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-6} \rightarrow 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = -(4x - 6) \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$$

Página 83

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

$$x^2 - 9 = 2x - 1; x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; y_1 = 7$$

$$x_2 = -2; y_2 = -5$$

$$b) \begin{cases} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x(5 - x) = 6; 5x - x^2 = 6; x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; y_1 = 3$$

$$x_2 = 3; y_2 = 2$$

$$c) x = 2y + 1$$

$$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2; \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$$

$$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1}; 2y - 4 = 4\sqrt{y+1}; y - 2 = 2\sqrt{y+1}$$

$$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4; y^2 - 8y = 0$$

$$y = 8 \rightarrow x = 17$$

$$y = 0 \text{ (no vale)}$$

$$x = 17; y = 8$$

2. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2^x - 2^y = 768 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - x; \quad x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 = 21$$

$$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21; \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = -4; \quad y_1 = 5$$

$$x_2 = 5; \quad y_2 = -4$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2^x - 2^y = 768 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$2^x = X; \quad 2^y = Y$$

$$\left. \begin{array}{l} X - Y = 768 \\ X/Y = 4 \end{array} \right\} X = 4Y \rightarrow 4Y - Y = 768 \rightarrow Y = 256, \quad X = 1024$$

$$2^y = 256 \rightarrow y = 8$$

$$2^x = 1024 \rightarrow x = 10$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^{x+y} = (5^3)^3 \rightarrow x+y=9 \\ 5^{x-y} = 5^3 \rightarrow x-y=3 \end{array} \right\} \rightarrow x=6, \quad y=3$$

Página 84**1. Reconoce como escalonados y resuelve:**

$$\text{a) } \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y & = 0 \\ 2y & = -6 \\ 5x + y - z & = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= \frac{2x-8}{3} = 2 \\ z &= 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 2 \\ z &= 11 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} 3x + 4y & = 0 \\ 2y & = -6 \\ 5x + y - z & = 17 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{-6}{2} = -3 \\ x &= \frac{-4y}{3} = 4 \\ z &= 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -3 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left. \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \left. \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= 4 \\ z &= y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x &= 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 4 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$\text{a) } \begin{cases} y & = -5 \\ 2z & = 8 \\ 3x & = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ 3x + y & = -5 \\ 5y & = -10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 5y + 3z & = 8 \\ 3y - z & = 5 \\ 4z & = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + y - z & = 7 \\ 2y & = 8 \\ 3x & = 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} y & = -5 \\ 2z & = 8 \\ 3x & = 3 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= -5 \\ z &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -5 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ 3x + y & = -5 \\ 5y & = -10 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{-10}{5} = -2 \\ x &= \frac{-5 - y}{3} = -1 \\ z &= x + 2y + 3 = -2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z = 1 \\ y = \frac{5+z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 8 + 10 - 3 = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{9}{3} = 3 \\ y = \frac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$$

Página 85

3. Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right.$$

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$$

4. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a + 4 \cdot 2.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{array} \begin{array}{l} 13x \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x \end{array} \begin{array}{l} - 5z = 13 \\ \\ + 10z = -2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \cdot 1.^a + 3.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{array} \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -1 \end{cases}$$

Página 86

5. Intenta resolver por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

$$b) \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y , z en función de x :

$$(2.^a) \rightarrow y = 2x - 1$$

$$(1.^a) \rightarrow z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$$

Para cada valor de x , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{Para } x = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 10 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \begin{matrix} \text{La segunda ecuación es absurda. No} \\ \text{puede ser } 0 = 1. \\ \text{Por tanto, el sistema no tiene solución.} \end{matrix}$$

$$d) \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 3.^a \\ 3.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 \\ 3x + 3z = 9 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \text{La segunda ecuación no dice nada. No} \\ \text{es una ecuación. Por tanto, solo quedan} \\ \text{dos ecuaciones, la } 1.^a \text{ y la } 3.^a. \end{matrix}$$

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z :

$$\begin{cases} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1 - (3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$$

Para cada valor que le demos a z , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } z = 0 \rightarrow x = 3, y = -2$$

$$\text{Para } z = 4 \rightarrow x = -1, y = 6$$

Página 87

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \leq 10$

b) $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \geq 6$

d) $3x + 1 \leq 15$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x / x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

Soluciones: $\{x / x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x / x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Soluciones: $\left\{x / x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ Soluciones: $\{x / 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{14}{3} \end{cases}$ Soluciones: $\left\{x / \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

Página 88

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

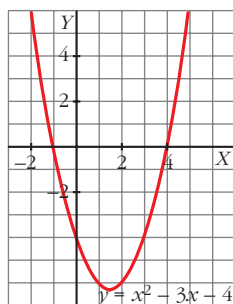
a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

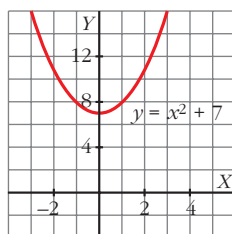
d) $x^2 - 4 \leq 0$

a) $x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$



b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) $x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución



d) $x^2 - 4 \leq 0$

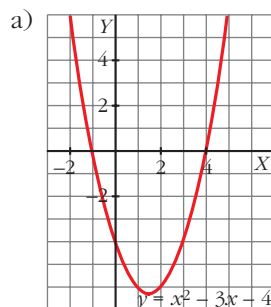
La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).

- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$

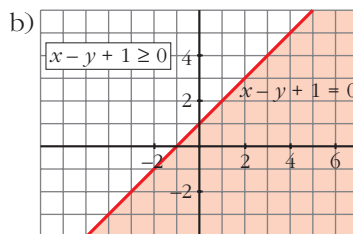
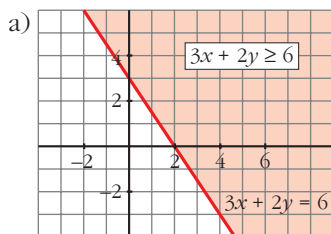
- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Página 89

1. Resuelve:

a) $3x + 2y \geq 6$

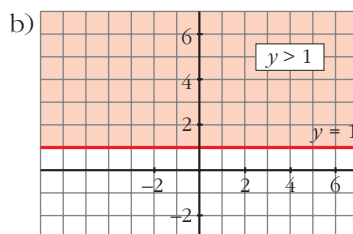
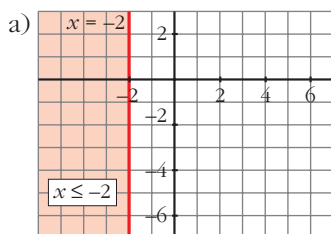
b) $x - y + 1 \geq 0$



2. Resuelve:

a) $x \leq -2$

b) $y > 1$



Página 90

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y \geq 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

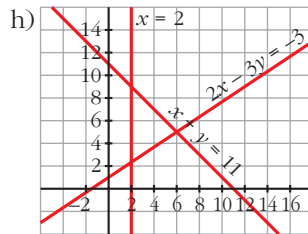
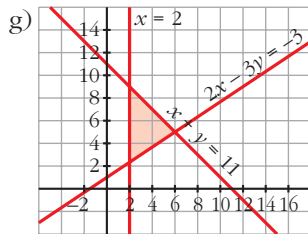
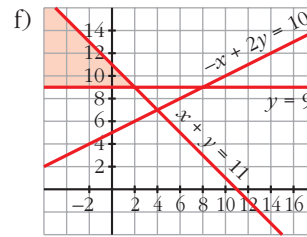
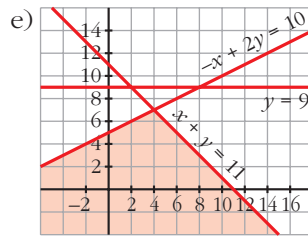
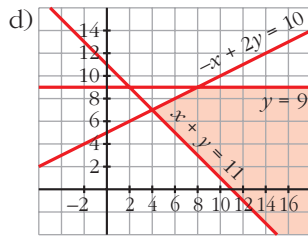
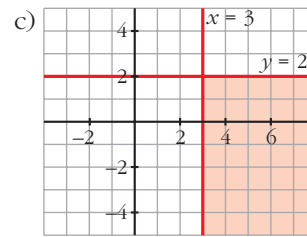
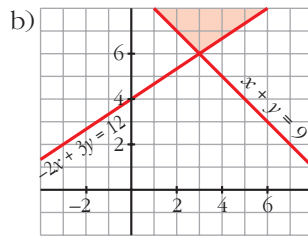
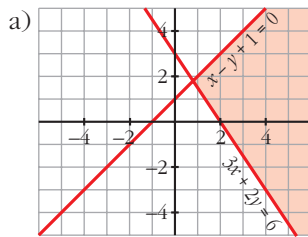
d)
$$\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq -3 \\ x + y \geq 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



No hay solución.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

División de polinomios

1 Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^4 - x^2 - 1) : (3x^2 - 3x - 4)$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 + 12x - 9 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x - 9 \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

Cociente = $x^2 + 2x - 3$
Resto = 0

$$\begin{array}{r}
 b) \quad 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 3x - 5 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^3 + 3x} \\
 -5x^2 + 10x - 3 \\
 \underline{5x^2 - 5} \\
 10x - 8
 \end{array}$$

Cociente = $3x - 5$
Resto = $10x - 8$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 3x^4 \quad - x^2 \quad - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 3x - 4 \\ x^2 + x + 2 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^4 + 3x^3 + 4x^2} \\
 3x^3 + 3x^2 - 1 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 + 4x} \\
 6x^2 + 4x - 1 \\
 \underline{-6x^2 + 6x + 8} \\
 10x + 7
 \end{array}$$

Cociente = $x^2 + x + 2$
Resto = $10x + 7$

2 Expresa las siguientes fracciones en la forma:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

a) $\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$

b) $\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2}$

c) $\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2}$

d) $\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3}$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 4x + 1 \quad | \quad 2x + 1 \\ -4x^2 - 2x \quad \quad \quad 2x - 3 \\ \hline -6x + 1 \\ \quad \quad \quad 6x + 3 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x + 1} = 2x - 3 + \frac{4}{2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad | \quad 3x - 2 \\ -6x^3 + 4x^2 \quad \quad \quad 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline 9x^2 - 9x \\ -9x^2 + 6x \\ \hline -3x \\ \quad \quad \quad 3x - 2 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad -2 \end{array}$$

$$\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2} = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{-2}{3x - 2}$$

c) $15x - 2x^3 - 4 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 15x - 4$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 15 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 30 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 15 & 26 \end{array}$$

$$\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2} = x^3 + 15 + \frac{26}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 \quad + 18 \quad | \quad 2x + 3 \\ -2x^3 - 3x^2 \quad \quad \quad x^2 - 4x + 6 \\ \hline -8x^2 \quad \quad \quad + 18 \\ \quad \quad \quad 8x^2 + 12x \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 12x + 18 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -12x - 18 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3} = x^2 - 4x + 6$$

Regla de Ruffini

3 Halla el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

| | | | | | | |
|----|---|----|---|---|----|---------------------|
| a) | 1 | -2 | 0 | 5 | -1 | Cociente: $x^3 + 5$ |
| | 2 | | 2 | 0 | 0 | Resto: 9 |
| | 1 | 0 | 0 | 5 | 9 | |

| | | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|----------------------------------|
| b) | 1 | 0 | 1 | -20 | 0 | Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$ |
| | -2 | | -2 | 4 | -10 | Resto: 60 |
| | 1 | -2 | 5 | -30 | 60 | |

| | | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|----------------------------------|
| c) | 1 | 0 | 0 | 0 | -81 | Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ |
| | -3 | | -3 | 9 | -27 | Resto: 0 |
| | 1 | -3 | 9 | -27 | 0 | |

4 Aplica la regla de Ruffini para calcular $P(-2)$ y $P(5)$, siendo:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$$

| | | | | | | |
|--|----|----|----|---|-----|-------------|
| | 1 | 0 | -3 | 5 | -7 | |
| | -2 | | -2 | 4 | -2 | P(-2) = -13 |
| | 1 | -2 | 1 | 3 | -13 | |

| | | | | | | |
|--|---|---|----|-----|-----|------------|
| | 1 | 0 | -3 | 5 | -7 | |
| | 5 | | 5 | 25 | 110 | P(5) = 568 |
| | 1 | 5 | 22 | 115 | 568 | |

5 Utiliza la regla de Ruffini para averiguar si el polinomio $x^4 - 3x^2 - 4$ es divisible por cada uno de los siguientes monomios:

$$x + 1; x - 1; x + 2; x - 2$$

| | | | | | | |
|--|----|----|----|---|----|---------------------------------|
| | 1 | 0 | -3 | 0 | -4 | No es divisible por $(x + 1)$. |
| | -1 | | -1 | 1 | 2 | |
| | 1 | -1 | -2 | 2 | -6 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|---------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | -3 | 0 | -4 | No es divisible por $(x - 1)$. |
| | | 1 | 1 | -2 | -2 | |
| | 1 | 1 | -2 | -2 | -6 | |

| | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|---------------------------------|
| -2 | 1 | 0 | -3 | 0 | -4 | Sí es divisible por $(x + 2)$. |
| | | -2 | 4 | -2 | 4 | |
| | 1 | -2 | 1 | -2 | 0 | |

| | | | | | | |
|---|---|---|----|---|----|---------------------------------|
| 2 | 1 | 0 | -3 | 0 | -4 | Sí es divisible por $(x - 2)$. |
| | | 2 | 4 | 2 | 4 | |
| | 2 | 2 | 1 | 2 | 0 | |

6 Calcula, en cada caso, el valor de m para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$

b) $(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$

c) $(4x^3 + mx^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

| | | | | | |
|---|---|----|----|---------|-------------------------------|
| 4 | 2 | -9 | 2 | m | $m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$ |
| | | 8 | -4 | -8 | |
| | 2 | -1 | -2 | $m - 8$ | |

| | | | | | |
|----|---|----|---|-----|-----------|
| -3 | 1 | 3 | 0 | m | -3 |
| | | -3 | 0 | 0 | -3m |
| | 1 | 0 | 0 | m | $-3m - 3$ |

$-3m - 3 = 0 \rightarrow m = -1$

c) $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 2x + 1$

$P(-1) = -4 + m + 2 + 1 = m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

7 El resto de la división $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$ es igual a -7 .

¿Cuánto vale k ?

Si llamamos $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$, entonces:

$P(-2) = 8 + 12 - 2k + 7 = 27 - 2k = -7 \rightarrow k = 17$

Factorización de polinomios

8 Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 + 5x - 14$ c) $2x^2 - 8x - 10$ d) $4x^2 - 9$

a) $x^2 - x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

b) $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -7 \end{matrix}$$

c) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

d) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

9 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - x^2 + 9x - 9$ b) $x^4 + x^2 - 20$ c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$ d) $x^4 - 81$

a)

| | | | | |
|---|---|----|---|----|
| 1 | 1 | -1 | 9 | -9 |
| 1 | | 1 | 0 | 9 |
| 1 | 0 | 9 | 0 | |

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9) \rightarrow \text{Raíces: } x = 1$$

b)

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | -20 |
| 2 | | 2 | 4 | 10 | 20 |
| 1 | 2 | 5 | 10 | 0 | |
| -2 | | -2 | 0 | -10 | |
| 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | |

$$x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 2; x_2 = -2$$

c)

| | | | | |
|----|---|----|----|----|
| -1 | 1 | 1 | -5 | -5 |
| -1 | | -1 | 0 | 5 |
| 1 | 0 | -5 | 0 | 0 |

$$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$\text{Raíces: } x_1 = -1; x_2 = \sqrt{5}; x_3 = -\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 d) & 1 & 0 & 0 & 0 & -81 \\
 3 & & 3 & 9 & 27 & 81 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\
 -3 & & -3 & 0 & -27 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 9 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 3; x_2 = -3$$

10 Sacar factor común y utilizar los productos notables para factorizar los polinomios siguientes:

- | | | |
|----------------------|-------------------|-----------------------|
| a) $x^3 - x$ | b) $4x^4 - 16x^2$ | c) $x^3 + 2x^2 + x$ |
| d) $3x^2 + 30x + 75$ | e) $5x^3 - 45x$ | f) $2x^3 - 8x^2 + 8x$ |

- a) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$
 b) $4x^4 - 16x^2 = 4x^2(x^2 - 4) = 4x^2(x - 2)(x + 2)$
 c) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$
 d) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$
 e) $5x^3 - 45x = 5x(x^2 - 9) = 5x(x - 3)(x + 3)$
 f) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x(x - 2)^2$

11 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$ | b) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$ |
| c) $x^5 - 16x$ | d) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x$ |

a) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3(x^3 - 7x + 6) = 2x^3(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 1 & & 1 & 1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -6 & 0 \\
 2 & & 2 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0 &
 \end{array}$$

Raíces: $x_1 = 0; x_2 = 1$
 $x_3 = 2; x_4 = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 b) & 6 & 7 & -1 & -2 \\
 -1 & & -6 & -1 & 2 \\
 \hline
 & 6 & 1 & -2 & 0
 \end{array}$$

$$6x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x + 1)(6x^2 + x - 2) = (x - 1)6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (x + 1)(2x - 1)(3x + 2)$$

Raíces: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{-2}{3}$

c) $x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

| | | | | | |
|----|---|----|---|----|-----|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -16 |
| | | 2 | 4 | 8 | 16 |
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 0 |
| -2 | | -2 | 0 | -8 | |
| | 1 | 0 | 4 | | 0 |

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

d) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x^3 - x^2 - 9x + 9) =$
 $= 2x(x - 1)(x^2 - 9) = 2x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$

| | | | | |
|---|---|----|----|----|
| 1 | 1 | -1 | -9 | 9 |
| 1 | | 1 | 0 | -9 |
| | 1 | 0 | -9 | 0 |

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

Fracciones algebraicas

12 Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

a) $\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}$

c) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x}{x + 1}$

d) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x - 2} = x + 3$

13 Reduce al mínimo común denominador y opera:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} &= \frac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} = \\ &= \frac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} &= \frac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} = \\ &= \frac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)} = \frac{4x+8}{x^2+x-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 &= \frac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x^2 + 6x + 3 + 3x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 6x + 3x - 3}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{2x^3 + x^2 + x}{(x+1)^2(x-1)} \end{aligned}$$

14 Efectúa las siguientes operaciones reduciendo al mínimo común denominador:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x}$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x} &= \frac{6(x-1)}{6x} - \frac{3(x+1)}{6x} + \frac{2}{6x} = \\ &= \frac{6x-6-3x-3+2}{6x} = \frac{3x-7}{6x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x} = \frac{2(2x-1)}{2x^2} - \frac{x(x-3)}{2x^2} = \frac{4x-2-x^2+3x}{2x^2} = \frac{-x^2+7x-2}{2x^2}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-2-x}{x(x-1)} = \frac{x^2-2}{x^2-x}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3}{6(x+2)} - \frac{4}{6(x+2)} = \frac{-1}{6(x+2)} = \frac{-1}{6x+12} \end{aligned}$$

15 Opera y simplifica:

a) $\frac{3}{x} : \frac{x-3}{x}$

b) $\frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3$

d) $\frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\frac{3}{x} : \frac{x-3}{x} = \frac{3x}{x(x-3)} = \frac{3}{x-3}$

b) $\frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1} = \frac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{5}{(x-1)}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{36} \cdot \frac{27}{x^3} = \frac{27x^6}{36x^3} = \frac{3x^3}{4}$

d) $\frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x-2}$

Página 94

16 Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] : (x^2 - 1)$

c) $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] (x-1)$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-2x}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} =$
 $= \frac{-x+1}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} : \frac{x}{x+1} =$
 $= \frac{-1}{x+1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x+1)}{x(x+1)} = \frac{-1}{x}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) : \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] : (x^2 - 1) &= \left[\frac{x-1}{x} : \frac{x+1}{x} \right] : (x^2 - 1) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} : (x^2 - 1) = \\ &= \frac{x-1}{x+1} : (x^2 - 1) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2 - 1)} = \\ &= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{x-1-x-1}{x^2-1} : \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \\ &= \frac{-2}{x^2-1} : \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) : \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] (x-1) &= \left[\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x} \right] (x-1) = \frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)} \cdot (x-1) = \\ &= \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2} \right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} \right) &= \\ &= \frac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)} = \\ &= \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} : \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} = 1 \end{aligned}$$

17 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2}$$

$$\text{c) } \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{d) } \frac{2x(x^2-2x) - (x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$\text{e) } \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)2x}{x^4}$$

$$\text{f) } \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$$

$$\text{g) } \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{h) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} &= \frac{(2x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2}$$

$$\text{c) } \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} &= \frac{(2x^3 - 4x^2) - (2x^3 - 2x^2 + 4x - 4)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1)2x}{x^4} = \frac{2x^3 - (2x^3 - 2x)}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{f) } \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{(2x^2 - 9x + 10) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$\text{g) } \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} &= \frac{(2x^3 - 4x^2) - (2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

Ecuaciones de primer y segundo grado

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } (3x + 1)(2x - 3) - (x - 3)(6x + 4) = 9x$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{2}{3}(x + 1) = \frac{(2x - 3)^2 - (13x - 5)}{16}$$

$$\text{c) } \frac{1}{6}[(13 - 2x) - 2(x - 3)^2] = -\frac{1}{3}(x + 1)^2$$

$$\text{d) } \frac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \frac{x^2 + 2}{2}$$

$$\text{e) } 0,5(x - 1)^2 - 0,25(x + 1)^2 = 4 - x$$

$$\text{f) } (0,5x - 1)(0,5x + 1) = (x + 1)^2 - 9$$

$$\text{a) } 6x^2 - 9x + 2x - 3 - 6x^2 - 4x + 18x + 12 = 9x$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{(2x + 2)}{3} = \frac{4x^2 + 9 - 12x - 13x + 5}{16}$$

$$12x^2 - 12 - 32x - 32 = 12x^2 + 27 - 36x - 39x + 15$$

$$-44 - 32x = 42 - 75x$$

$$43x = 86$$

$$x = 2$$

$$\text{c) } \frac{1}{6}(13 - 2x - 2x^2 - 18 + 12x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$\frac{1}{6}(-2x^2 + 10x - 5) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$-\frac{2x^2}{6} + \frac{10x}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$-2x^2 + 10x - 5 = -2x^2 - 2 - 4x$$

$$14x = 3$$

$$x = \frac{3}{14}$$

$$\text{d) } 2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{10}$$

$$x = \frac{24 \pm 16}{10} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}(x^2 + 1 - 2x) - \frac{1}{4}(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = 4 - x$$

$$2x^2 + 2 - 4x - x^2 - 1 - 2x = 16 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$f) \left(\frac{x}{2} - 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$\frac{x^2}{4} - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$x^2 - 4 = 4x^2 + 4 + 8x - 36$$

$$0 = 3x^2 + 8x - 28$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -14/3 \end{cases}$$

19 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:

$$a) (x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$$

$$b) \frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$$

$$c) \frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$$

$$d) \frac{3x^2 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left[x^2 - 2 - \frac{1}{2}x \right] = \frac{x^2 - 5}{4}$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$$

$$6x - 3 = 2x^2 + 6x - 11$$

$$8 = 2x^2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$b) 6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x(x - 13) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 13$$

$$c) 6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$$

$$0 = 18x^2 - 8x$$

$$2x(9x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$$

$$d) \frac{3x^2 - 1}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x}{4} = \frac{x^2 - 5}{4}$$

$$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$$

$$4x^2 - x = 0$$

$$x(4x - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/4 \end{cases}$$

20 Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):

$$a) \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$$

$$b) 0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 = 1,25x - (0,5x + 2)^2$$

$$c) (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$d) \frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$$

$$0 = 0$$

Tiene infinitas soluciones.

$$b) \frac{x}{5} + \frac{3}{5} - \frac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{4} - 4 - 2x$$

$$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$$

$$29x = -87$$

$$x = -\frac{87}{29}$$

$$x = -3$$

$$c) 25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$$

$$9 = 0$$

No tiene solución.

$$d) 4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$$

$$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$$

$$x = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$$

21 Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Búscalas y resuelve las otras.

$$a) x + 2 + 3x^2 = \frac{5x^2 + 6x}{2}$$

b) $(x + 2)^2 - 3 = 4x$

c) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

d) $2(2 - x)(3x + 1) - (1 - 2x)(x + 3) + 24 = 0$

e) $\frac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x + 1}{5} = 0$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

b) $x^2 + 4 + 4x - 3 = 4x$

$$x^2 + 1 = 0$$

No tiene solución.

c) $x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x = 8x$

$$0 = 3x^2 - 4x - 15$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5/3 \end{cases}$$

d) $12x + 4 - 6x^2 - 2x - x - 3 + 2x^2 + 6x + 24 = 0$

$$-4x^2 + 15x + 25 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{-8} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5/4 \end{cases}$$

e) $x^2 + 1 - 2x - 3x + 1 + 3x + 3 = 0$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

No tiene solución.

Ecuaciones bicuadradas

22 Resuelve y comprueba las soluciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

e) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

f) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

g) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

h) $x^4 - 4x^2 = 0$

i) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

j) $9x^4 - x^2 = 0$

• Resuelve b) y j) sacando factor común.

a) $x^2 = z$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

b) $x^2 = z$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \text{ (no vale)} \\ z = 1 & \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \begin{cases} z = -2 \text{ (no vale)} \\ z = -1 \text{ (no vale)} \end{cases} \text{ (no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$$z^2 - 9z + 8 = 0$$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \begin{cases} z = 8 & \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

e) $x^2 = z$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \begin{cases} z = 9 & \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

f) $x^2 = z$

$$z^2 - 5z + 36 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{2} \text{ (no tiene solución)}$$

g) $x^2 = z$

$$9z^2 - 46z + 5 = 0$$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 180}}{18} \begin{cases} z = 90/18 = 5 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \\ z = 2/18 = 1/9 & \begin{cases} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

h) $x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

i) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

$$z = x^2$$

$$4z^2 - 17z + 4 = 0$$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \begin{cases} z = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1/4 & \begin{cases} x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

j) $9x^4 - x^2 = 0$

$$x^2(9x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = -\frac{1}{3}$$

23 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2 - 1)(x^2 + 3) - (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 4x^2$

a) $2x^4 - 6x^2 + x^2 - 3 = x^4 - x^2 + x^2 - 1 - 8$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = z$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} z = 3 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \\ z = 2 & \begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) $\frac{3x^4 + 9x^2 - x^2 - 3}{4} - 2x^4 + 6x^2 - x^2 + 3 = 4x^2$

$$3x^4 + 8x^2 - 3 - 8x^4 + 20x^2 + 12 = 16x^2$$

$$-5x^4 + 12x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = z \rightarrow z = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{-10} \begin{cases} z = -3/5 \text{ (no vale)} \\ z = 3 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Página 95

Ecuaciones con radicales

24 Resuelve: $\sqrt[3]{x^2 - 28} + 3 = 0$

• *Aísla el radical y eleva al cubo.*

$$\sqrt[3]{x^2 - 28} = -3; \quad x^2 - 28 = -27, \quad x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

25 Resuelve:

a) $\frac{1}{\sqrt{5x + 14}} = \frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{13 - 5x}} = -1$

a) $7 = \sqrt{5x + 14} \rightarrow 49 = 5x + 14 \rightarrow 35 = 5x \rightarrow x = 7$

b) $-3 = \sqrt[3]{13 - 5x} \rightarrow -27 = 13 - 5x \rightarrow 5x = 40 \rightarrow x = 8$

26 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$

b) $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$$

c) $2 - 5x = (-x\sqrt{3})^2$

$$2 - 5x = x^2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (\sqrt{5x-6})^2 &= (4-\sqrt{2x})^2 \\
 5x-6 &= 16+2x-8\sqrt{2x} \\
 (8\sqrt{2x})^2 &= (-3x+22)^2 \\
 64 \cdot 2x &= 9x^2+484-132x \\
 128x &= 9x^2+484-132x \\
 0 &= 9x^2-260x+484 \\
 x &= \frac{260 \pm \sqrt{67\,600-17\,424}}{18} \begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

27 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$

b) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$

e) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2$
 $3x+4 = 16+4x^2-16x$
 $4x^2-19x+12 = 0$
 $x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} \begin{cases} x = 4 \text{ (no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$

b) $(x-1)^2 = (\sqrt{7-3x})^2$
 $x^2+1-2x = 7-3x$
 $x^2+x-6 = 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \text{ (no vale)} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

c) $(\sqrt{5x+6})^2 = (2x+3)^2$
 $5x+6 = 4x^2+9+12x$
 $4x^2+7x+3 = 0$
 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \begin{cases} x_1 = -3/4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$$d) (\sqrt{x^2 + x})^2 = (\sqrt{x + 1})^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$e) (\sqrt{x^2 + 3})^2 = (\sqrt{3 - x})^2$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

Ecuaciones factorizables

28 Sacar factor común y resolver:

$$a) 5x^3 - 3x^2 = 0$$

$$b) x^4 + 4x^2 = 0$$

$$c) 4x^3 - x = 0$$

$$d) 2x^4 - 3x^3 = 0$$

$$a) x^2(5x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{5}$$

$$b) x^2(x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0$$

$$c) x(4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \begin{cases} x_2 = 1/2 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

$$d) x^3(2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$$

29 Resolver las siguientes ecuaciones igualando a cero cada factor:

$$a) (2x - 7)(x + 3)^2 = 0 \begin{cases} 2x - 7 = 0; x = \dots \\ (x + 3)^2 = 0; x = \dots \end{cases}$$

$$b) x(x^2 - 4)(3x + 12) = 0$$

$$c) (x + 2)^2(x - 1)^2 = 0$$

$$d) 3x(x - 2)^3 = 0$$

$$e) (x - 5)(x^2 + 1) = 0$$

$$a) x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -3$$

$$b) x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = -4$$

$$c) x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$d) x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$e) x = 5$$

30 Descompón en factores y resuelve:

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$

f) $-x^3 + 13x - 12 = 0$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

b) $x^2(x - 1)^2 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

c) $x(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3$

e) $2(x - 1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

f) $-(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 3$

g) $(x - 1)^2(x - 3) = 0$

h) $(x - 2)(x + 2)^2 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 3$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

Ecuaciones con la x en el denominador

31 Resuelve la ecuación $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$.

• *Multiplica los dos miembros de la ecuación por el mín.c.m. de los denominadores: $(x + 3)(x - 3)$.*

$x(x + 3) + 2x(x - 3) = 6$

$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$

$3x^2 - 3x - 6 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

32 Resuelve:

a) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+4}$

b) $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$

c) $\frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{2x}$

• *Haz producto de medios igual a producto de extremos.*

a) $x^2 + 4x = 4x + 4$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

$$b) 6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6$$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

$$c) 4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{2} \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

33 Resuelve:

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$$

$$c) \frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$$

$$d) \frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$$

$$a) 2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

$$b) 3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) 600x - 1200 + 80x^2 - 160x = 600x$$

$$80x^2 - 160x - 1200 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$d) 8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$$

$$2x^2 - 14x - 60 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4} \begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

34 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$ b) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$

a) $8x - 24 - x^2 + 3x - 4x + 22 = x^2 + 6x - 3x - 18$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} \begin{cases} x_1 = (4 + 12)/4 = 4 \\ x_2 = (4 - 12)/4 = -2 \end{cases}$$

b) $10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x = 3x^2 + 15x + 15x + 75$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

35 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2,3^x = 18$

b) $7 \cdot 3^x = 567$

c) $\frac{2^x}{3} = 7,5$

d) $4^{2x-1} = 0,25$

a) $x \log 2,3 = \log 18 \rightarrow x = \frac{\log 18}{\log 2,3} = 3,47$

b) $3^x = \frac{567}{7} \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow x = 4$

c) $2^x = 22,5 \rightarrow x = \frac{\log 22,5}{\log 2} = 4,49$

d) $4^{2x-1} = 4^{-1} \rightarrow 2x-1 = -1 \rightarrow x = 0$

36 Las siguientes ecuaciones exponenciales tienen soluciones enteras. Hállalas:

a) $2^{x^2+1} = 32$

b) $3^{2x-5} = 2187$

c) $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

d) $(0,5)^x = 16$

a) $2^{x^2+1} = 2^5 \rightarrow x^2+1 = 5 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $3^{2x-5} = 3^7 \rightarrow 2x-5 = 7 \rightarrow x = 6$

c) $7^{x/2} = 7^{-2} \rightarrow \frac{x}{2} = -2 \rightarrow x = -4$

d) $2^{-x} = 2^4 \rightarrow x = -4$

Página 96

37 Resuelve las ecuaciones siguientes mediante un cambio de variable:

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

c) $3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}$

a) $2^x = z; z^2 - 5z + 4 = 0; z_1 = 4, z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0$

b) $3^x = z; z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \rightarrow z = 27 \rightarrow x = 3$

c) $3^x = z; z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \rightarrow z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \rightarrow 27z^2 - 728z - 27 = 0$

$z_1 = 27 \rightarrow x_1 = 3; z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale)

38 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+2} = 823\,543$

b) $5^{5x-2} = 390\,625$

c) $3^x + 3^{x+2} = 39$

d) $10^{3+x} = 1$

a) $7^{x+2} = 7^7 \rightarrow x+2 = 7 \rightarrow x = 5$

b) $5^{5x-2} = 5^8 \rightarrow x = 2$

c) $3^x(1+9) = 39 \rightarrow 3^x = 3,9 \rightarrow x = \frac{\log 3,9}{\log 3} = 1,24$

d) $3+x = 0 \rightarrow x = -3$

39 RESUELTO EN EL LIBRO DE TEXTO.

40 Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = \log 9 - \log 4$

b) $\ln x = 3 \ln 5$

c) $3 + 2 \log x = 5$

d) $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$

a) $\log x = \log \frac{9}{4} \rightarrow x = \frac{9}{4}$

b) $\ln x = \ln 5^3 \rightarrow x = 125$

c) $\log x = 1 \rightarrow x = 10$

d) $\log_2 x = -9 \rightarrow x = 2^{-9} = \frac{1}{512}$

Sistemas de ecuaciones

41 Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } y = 1 - 23x$$

$$2x - 11 + 253x = -11$$

$$0 = 255x$$

$$x = 0, y = 1$$

$$\text{b) } x = 10 - 5y$$

$$30 - 15y + 5 = 2y + 1$$

$$34 = 17y$$

$$y = \frac{34}{17}, y = 2$$

$$x = 0, y = 2$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$$

$$x = 2 - 3y$$

$$2 - 3y + 8y = 7; 5y = 5; y = 1$$

$$x = -1, y = 1$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \begin{cases} -2x + 3y = -24 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ 2y = -16; y = -8$$

$$x = 0, y = -8$$

42 Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

• **Suma las dos ecuaciones.**

$$\text{a) } x = \frac{5y}{3}$$

$$\frac{5y^2}{3} = 15; y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3$$

$$b) 6y + 6x = 5xy \quad 4 - 4x + 6x = \frac{5x(2-2x)}{3}$$

$$y = \frac{2-2x}{3} \quad 6x + 12 = 10x - 10x^2$$

$$10x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

No tiene solución.

$$c) 2x^2 - 10x + 12 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$$

$$-x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 = 0$$

$$2y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 4; \quad x_2 = 3, y_2 = 1; \quad x_3 = 2, y_3 = 4; \quad x_4 = 2, y_4 = 1$$

$$d) x = \frac{4y}{3}$$

$$\frac{7y}{3} \cdot \frac{y}{3} = 7$$

$$y^2 = 9; \quad y = \pm 3$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; \quad x_2 = -4, y_2 = -3$$

43 Resuelve por sustitución:

$$a) \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{aligned} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y = 4x \\ (x^2 + 1)16x^2 = 5 \end{aligned}$$

$$16x^4 + 16x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{-16 \pm 24}{32} = \begin{cases} 1/4 \rightarrow x_1 = 1/2; \quad x_2 = -1/2 \\ -5/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -2$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{6}{x}; \quad x^2 - \frac{36}{x^2} = 5; \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = -2$$

44 Resuelve por reducción:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{a) } 3x^2 - 5y^2 = 30$$

$$\underline{-3x^2 + 6y^2 = -21}$$

$$y^2 = 9; \quad y = \pm 3$$

$$x^2 = 25; \quad x = \pm 5$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; \quad x_2 = -5, y_2 = 3; \quad x_3 = 5, y_3 = -3; \quad x_4 = -5, y_4 = -3$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}$$

$$\underline{x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4}}$$

$$2x^2 = \frac{2}{4}; \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 + 2y = 3$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0; \quad 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 - 2y = 3$$

$$4y^2 - 2y - 2 = 0; \quad 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = -\frac{1}{2}, y_3 = 1; \quad x_4 = -\frac{1}{2}, y_4 = -\frac{1}{2}$$

45 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} + \frac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 &= 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x &= y - y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3$$

$$2x - 3y = 1; \quad x = \frac{1 + 3y}{2}$$

$$\frac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \rightarrow 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2$$

$$13y^2 - 10y - 3 = 0; \quad y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{26} = \frac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = \frac{2}{13}, \quad y_2 = -\frac{3}{13}$$

$$\text{b) } x = \frac{28}{y}$$

$$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65$$

$$784 + y^4 = 65y^2$$

$$y^4 - 65y^2 + 784 = 0; \quad y^2 = z$$

$$z = \frac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \rightarrow y = \pm 7 \\ 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{cases}$$

$$x_1 = 7, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -7, \quad y_2 = -4; \quad x_3 = 4, \quad y_3 = 7; \quad x_4 = -4, \quad y_4 = -7$$

$$\text{c) } x = \frac{15}{y}$$

$$\frac{15/y}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{15}{y^2} = \frac{5}{3}; \quad 45 = 5y^2; \quad y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = -5, \quad y_2 = -3$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 7 \\ x &= \frac{4y}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{16y^2}{9} - y^2 = 7$$

$$16y^2 - 9y^2 = 63; y^2 = 9$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

46 Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x + y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x + 1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x + y + 2} = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } x = (5 - y)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$$

$$8y = 24; y = 3; x = 4$$

$$x = 4; y = 3$$

$$\text{b) } 4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; x = \frac{y^2 + 2y - 3}{4}$$

$$x = \frac{1 + 3y}{2} = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow x = 8 \\ -1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$$

$$\text{c) } y = 2x - 6$$

$$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$$

$$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$$

$$0 = x^2 - 33x + 162$$

$$x = \frac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$x = 6; y = 6 \text{ (} x = 27, y = 48 \text{ no vale)}$$

$$\text{d) } y = 2x - 5$$

$$\sqrt{3x - 5} = x - 1$$

$$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = 1 \\ 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = 1$$

47 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$$

$$\text{a) } y - x = 1$$

$$2^x + 2^y = 12$$

$$y = 1 + x \rightarrow 2^x + 2^{1+x} = 12 \rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$$

$$x = 2; \quad y = 3$$

$$\text{b) } 5^x \cdot 5^y = 1$$

$$5^x : 5^y = 25$$

$$\left. \begin{aligned} 5^{x+y} &= 5^0 \rightarrow x + y = 0 \\ 5^{x-y} &= 5^2 \rightarrow x - y = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$1 + y = 0 \rightarrow y = -1$$

Página 97
Método de Gauss
48 Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} x - y - z &= -10 \\ x + 2y + z &= 11 \\ 2x - y + z &= 8 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{aligned} x - y - z &= -10 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x - 2y &= -2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} x - y - z &= -10 \\ 2x + y &= 1 \\ 7x &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{cases} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\}$$

49 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{cases} \begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 6 \cdot 2.^a \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \begin{array}{l} z = \frac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

50 Resuelve por el método de Gauss:

a)
$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \frac{-5}{2} \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

51 Resuelve aplicando el método de Gauss:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array} \right.$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{f) } \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array} \right.$$

• Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 5 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 + 1/2 = 3/2 \\ z = x + 1/2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 1/2 \\ z = 2 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a : 6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Las ecuaciones } 2.^a \text{ y } 3.^a \text{ dicen cosas contradic-} \\ \text{torias.} \\ \text{El sistema es incompatible, no tiene soluci3n.} \end{array} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en funci3n de z :

$$\begin{cases} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (5 - 5z) + y = 2 - 3z \rightarrow y = 2z - 3 \\ x = 5 - 5z \end{cases}$$

Soluci3n: $x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

$$d) \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 5 \cdot 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{5x - 9}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Soluci3n: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

Las ecuaciones $2.^a$ y $3.^a$ obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

$$f) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en funci3n del par3metro y :

$$\begin{cases} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2(1 - 3y) + z = 1 - y \rightarrow z = 3 - 7y \\ x = 1 - 3y \end{cases}$$

Soluci3n: $x = 1 - 3y$, $z = 3 - 7y$

Inecuaciones

52 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$

d) $\frac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \leq 4x + 14 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \rightarrow -14 < 5x \rightarrow x > -\frac{14}{5}$; $(-\frac{14}{5}, +\infty)$

d) $3x - 5x > -10 \rightarrow -2x > -10 \rightarrow 2x < 10 \rightarrow x < 5$; $(-\infty, 5)$

53 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x-1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1$; $(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1$; $(-\infty, 1)$

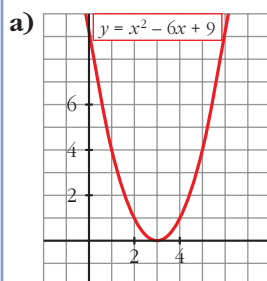
c) $x(x + 5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0$; $(-5, 0)$

d) $(3x - 2)(3x + 2) > 0 \rightarrow (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

e) $(x + 2)(x + 4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

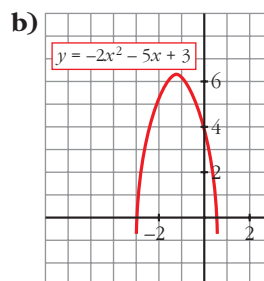
f) $(x + 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

54 Observando la representación gráfica de estas parábolas, di cuáles son las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones propuestas:



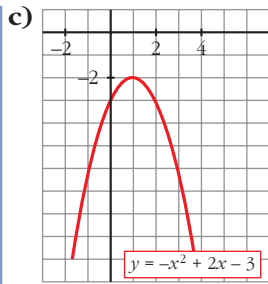
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$



$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$



$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

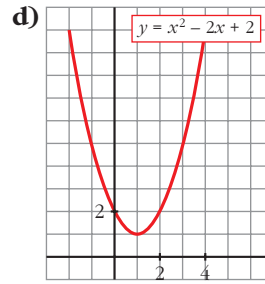
$$-x^2 + 2x - 3 < 0$$

a) Ecuación: $x = 3$

Inecuación: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

c) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: \mathbb{R}



$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0$$

b) Ecuación: $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$

Inecuación: $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

d) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: \mathbb{R}

55 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

• Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.

a) $\begin{cases} 4x < 4 \rightarrow x < 1 \\ x > -4 \end{cases} \left\} (-4, 1)\right.$

b) $\begin{cases} 3x > -5 \rightarrow x > -5/3 \\ x > 4 \end{cases} \left\} (4, +\infty)\right.$

c) $\begin{cases} x > 17 \\ 5x > 19 \rightarrow x > 19/5 \end{cases} \left\} (17, +\infty)\right.$

d) $\begin{cases} x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{cases} \left\} \text{No tiene solución}\right.$

56 Resuelve:

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$

d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

a) $-(x + 3)(x - 1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) < 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

$$c) x(x+3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$$

$$d) -(x-1)(x-5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$

57 Resuelve:

$$a) x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$b) x^2 - 7x + 6 > 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$$

$$a) [1, 6]$$

$$b) (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$$

58 Comprueba que todos los números reales son solución de esta inecuación:

$$5(x-2) - 4(2x+1) < -3x+1$$

$$5x - 10 - 8x - 4 < -3x + 1$$

$$0 < 15$$

Queda $0 < 15$, que se verifica para todos los números reales.

Página 98

59 Comprueba que no hay ningún número que verifique esta inecuación:

$$3(x-2) + 7 < x + 2(x-5)$$

$$3x - 6 + 7 < x + 2x - 10$$

$$0 < -11$$

Queda $0 < -11$, que no es cierto.

60 Ana tiene 8 años menos que Javier. ¿Cuántos años puede tener Ana, si sabemos que el triple de su edad es mayor que el doble de la de Javier?

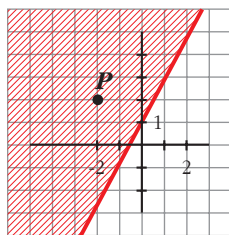
$$\text{Ana} \rightarrow x \quad 3x > 2(x+8)$$

$$\text{Javier} \rightarrow x+8 \quad 3x > 2x+16$$

$$x > 16$$

Ana tendrá más de 16 años.

61



a) Comprueba que el punto P verifica la inecuación $2x - y \leq -1$.

b) Elige tres puntos cualesquiera de la zona rayada y prueba que son soluciones de la inecuación.

a) Las coordenadas de P son $(-2, 2)$.

Sustituyendo en la inecuación, queda: $2 \cdot (-2) - (-2) = -2 \leq -1$

b) Por ejemplo, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, -1)$.

Todos los puntos de la zona rayada cumplen la inecuación.

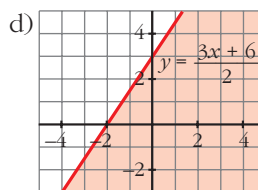
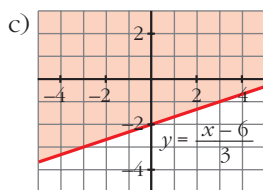
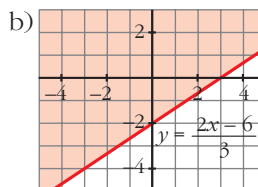
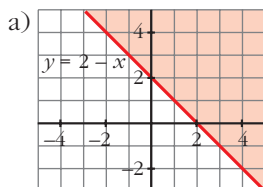
62 Resuelve gráficamente:

a) $x + y - 2 \geq 0$

b) $2x - 3y \leq 6$

c) $\frac{x - 3y}{2} \leq 3$

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq -1$



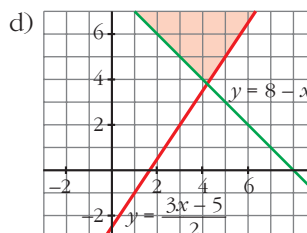
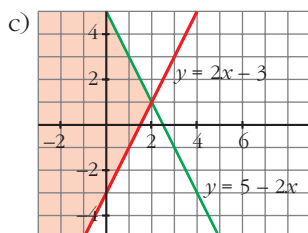
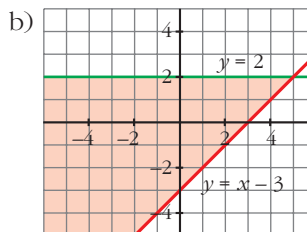
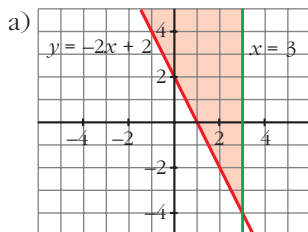
63 Resuelve gráficamente:

a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \geq 2 \end{cases}$

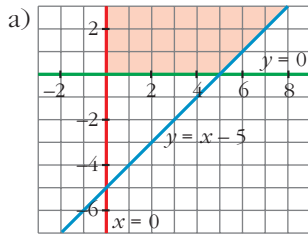
c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

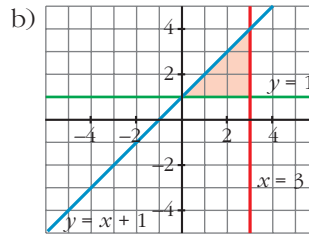


64 Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas:

a)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$$



PARA RESOLVER

Problemas de ecuaciones y de sistemas

65 Para la calificación de un curso, se decide que la primera evaluación cuente un 25%, la segunda, un 35%, y la tercera, un 40%. Una alumna ha tenido un 5 en la primera y un 7 en la segunda. ¿Qué nota tiene que conseguir en la tercera para que su calificación final sea 7?

$$0,25 \cdot 5 + 0,35 \cdot 7 + 0,40 \cdot x = 7$$

$$0,40x = 3,3$$

$$x = 8,25$$

Ha de conseguir un 8,25.

66 Un comerciante compra 50 kg de harina y 80 kg de arroz, por los que tiene que pagar 66,10 €; pero consigue un descuento del 20% en el precio de la harina y un 10% en el del arroz. De esa forma, paga 56,24 €. ¿Cuáles son los precios iniciales de cada artículo?

$$\begin{cases} \text{Precio 1 kg harina} \rightarrow x \\ \text{Precio 1 kg de arroz} \rightarrow y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 50x + 80y = 66,10 \\ 0,8 \cdot 50x + 0,9 \cdot 80y = 56,24 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 0,65 \text{ €} \\ y = 0,42 \text{ €} \end{array} \right.$$

Un kilo de harina valía 0,65 € y un kilo de arroz 0,42 €.

67 La edad de un padre es el cuádruple de la de su hijo, pero dentro de 16 años será solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

| | AHORA | DENTRO DE 16 AÑOS |
|-------|-------|-------------------|
| PADRE | $4x$ | $4x + 16$ |
| HIJO | x | $x + 16$ |

$$4x + 16 = 2(x + 16); \quad 4x + 16 = 2x + 32; \quad x = 8$$

El padre tiene 32 años y el hijo 8 años.

- 68** La suma de un número par, el par anterior y los dos impares que lo siguen, es 34. Calcula ese número.

$$x + x - 2 + x + 1 + x + 3 = 34 \rightarrow x = 8$$

Es el número 8.

- 69** Las dos cifras de un número suman 12. Si se invierte el orden de las mismas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}$$

Es el número 57.

- 70** Tres empresas aportan 2, 3 y 5 millones de euros para la comercialización de un nuevo avión. A los cinco años reparten beneficios, correspondiendo a la tercera 189 000 € más que a la segunda. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

• A la primera le corresponden $\frac{2}{10}$ de los beneficios.

Beneficios

$$1.^a \rightarrow 2 \text{ millones} \rightarrow y$$

$$2.^a \rightarrow 3 \text{ millones} \rightarrow x$$

$$3.^a \rightarrow \frac{5 \text{ millones}}{10 \text{ millones}} \rightarrow \frac{189\,000 + x}{2x + y + 189\,000}$$

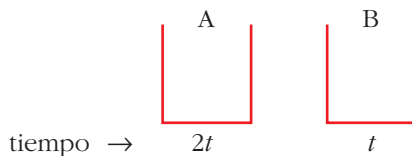
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{10}(2x + y + 189\,000) = y \\ \frac{3}{10}(2x + y + 189\,000) = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x - 4y = -189\,000 \\ -4x + 3y = -567\,000 \end{array} \left\} \begin{array}{l} x = 283\,500 \\ y = 189\,000 \end{array}$$

$$\text{Total} = 2x + y + 189\,000 = 945\,000 \text{ €}$$

La cantidad repartida fue de 945 000 €.

- 71** Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en 2 horas. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?

• Si A tarda x horas en llenar el depósito, en 1 hora llena $\frac{1}{x}$ del depósito.

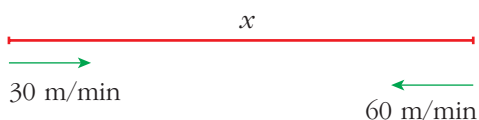


En 1 hora $\rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2t}$ partes del depósito

Tiempo entre los dos: $\frac{2t}{3} = 2$ horas $\rightarrow 2t = 6$ horas $\rightarrow t = 3$ horas

B tarda 3 horas y A, 6 horas.

- 72** Un remero sube con su barca por un río a una velocidad de 30 m/min y baja a 60 m/min. ¿Hasta qué distancia se aleja en un paseo de hora y media?



$$\left. \begin{aligned} 30 &= \frac{x}{t} \\ 60 &= \frac{x}{90 - t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 30t &= x \\ 60(90 - t) &= x \end{aligned}$$

$$30t = 5400 - 60t; \quad t = 60 \text{ min}$$

Tarda 60 minutos en la ida y 30 en la vuelta. Se aleja una distancia de 1800 m.

- 73** Se mezclan 30 kg de café de 6 €/kg con cierta cantidad de otro de 8 €/kg, resultando la mezcla a 7,25 €/kg.

¿Qué cantidad del café más caro se ha utilizado?

• $\text{Precio de 1 kg de mezcla} = \frac{\text{coste total}}{\text{total de kilos}}$

A \rightarrow 30 kg \rightarrow 6 €/kg

B \rightarrow x kg \rightarrow 8 €/kg

Mezcla \rightarrow $(30 + x)$ kg \rightarrow 7,25 €/kg

$$7,25 = \frac{30 \cdot 6 + 8x}{30 + x}; \quad 217,5 + 7,25x = 180 + 8x$$

$$0,75x = 37,5 \rightarrow x = 50 \text{ kg}$$

- 74** Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20% a unos y un 25% a otros.

Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25%.

| | PRECIO ORIGINAL | | CON DESCUENTO |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------|
| UNOS $\rightarrow x$ | $\rightarrow 1\,200x$ | $\xrightarrow{-20\%}$ | $0,8 \cdot 1\,200x = 960x$ |
| OTROS $\rightarrow y$ | $\rightarrow 1\,200y$ | $\xrightarrow{-25\%}$ | $0,75 \cdot 1\,200y = 900y$ |

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}$$

Se vendieron 20 ordenadores con un 25% de descuento y 40 ordenadores con un 20% de descuento.

Página 99

- 75** En la primera prueba de una oposición, queda eliminado el 52% de los participantes. En la segunda prueba, se elimina el 25% de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?

• *Recuerda que para calcular el 52% de una cantidad, hay que multiplicarla por 0,52. ¿Por cuánto habrá que multiplicar para calcular el 25% del 48% restante?*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{QUEDAN} & & \text{QUEDAN} & & \\ \text{Se presentan } x & \xrightarrow[1.\text{ª prueba}]{-52\%} & 0,48x & \xrightarrow[2.\text{ª prueba}]{-25\%} & 0,75 \cdot 0,48x = 0,36x & & \end{array}$$

Queda el 36% del total. Se ha eliminado el 64% del total:

$$0,64x = 512 \rightarrow x = 800$$

Se presentaron 800 personas.

- 76** Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

• *Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.*

$$\text{Tenía } x \text{ docenas} \rightarrow \frac{36}{x} \text{ €/docena}$$

$$\text{Le quedan } x - 4 \text{ docenas} \rightarrow \left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) \text{ €/docena}$$

$$\left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) (x - 4) = 36 \rightarrow (36 + 0,45x) (x - 4) = 36x$$

$$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x \rightarrow 0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$$

$$x = 20 \quad (x = -16 \text{ no vale}) \rightarrow \text{Tenía 20 docenas.}$$

- 77** Sobre el número de visitantes a cierta exposición se sabe que:

- Durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero.
- En marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero.
- El número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo.

¿Cuántas personas vieron la exposición en enero?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Enero} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febrero} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Marzo} \\ x & & 1,12x & & 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x \\ x = 0,9856x + 36 & \rightarrow & x = 2500 & \text{ personas} & \end{array}$$

78 Un inversor, que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8%, y el resto, en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

$$28\,600 \text{ €} \left\{ \begin{array}{l} x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,08x \\ (28\,000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,06(28\,000 - x) \end{array} \right.$$

$$0,08x = 0,06(28\,000 - x) + 200 \rightarrow 0,08x = 1\,680 - 0,06x + 200 \rightarrow x = 13\,428,57$$

13 428,57 € al 8% y 14 571,43 € al 6%.

Página 99

AUTOEVALUACIÓN

1. Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

Las raíces de $P(x)$ son -2 , -1 y 2 .

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad Q(x) = 2x(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1 .

2. Opera y simplifica el resultado:

a) $\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$

a) $\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5) - 2x}{(x+5)^3} = \frac{5-x}{(x+5)^3}$

b) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) = \left(\frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{x+2+x}{x+2}\right) =$
 $= \left(\frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{2x+2}{x+2}\right) =$
 $= \left(\frac{3x+2}{x(x+2)}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2}\right) = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$

d) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 →

→ $2(3x+1) - 3(5x^2+3) = 3(x^2-1) - 2(x+2)$ →

→ $6x+2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$ → $-15x^2 + 6x - 7 = 3x^2 - 2x - 7$ →

→ $18x^2 - 8x = 0$ → $2x(9x-4) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 9x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{4}{9} \end{array} \right.$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - 8y - 9 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-9) \cdot (1)}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ y = -1 \text{ (no vale)} \end{array} \right.$

c) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x \rightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{2x-1})^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 4x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (2) \cdot (1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ (Son válidas ambas soluciones.)

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} &= \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)} \rightarrow (x+1) \cdot x - (x-3)(x+3) = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x^2+x-(x^2-9) = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x^2+x-x^2+9 = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x+9 = x^2-3 \rightarrow x^2-x-12 = 0 \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (1) \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9 \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^2 \rightarrow x^2-2 = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot (5^2)^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot 5^{2x-2} = 5^{3x} \rightarrow$
 $\rightarrow 5^{x^2+2x-2} = 5^{3x} \rightarrow x^2+2x-2 = 3x \rightarrow x^2-x-2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

5. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \rightarrow -\frac{6}{y} + 2y = -1 \rightarrow -6 + 2y^2 = -y \rightarrow 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$$x_1 = -\frac{4}{3}; y_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 1; y_2 = -2$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow x = 4 + 2y$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-2(4 + 2y)} + y = -1 &\rightarrow (\sqrt{-8 - 4y})^2 = (-1 - y)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \rightarrow y = -3$$

$$x = 4 + 2(-3) \rightarrow x = -2$$

Solución: $x = -2$; $y = -3$

6. Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1.^a - 3 \cdot 3.^a} \\ \xrightarrow{2.^a - 3.^a} \\ \xrightarrow{3.^a} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -8y + 7z = 29 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1.^a + 8 \cdot 2.^a} \\ \xrightarrow{2.^a} \\ \xrightarrow{3.^a} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -z = -3 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow z = 3 \\ \rightarrow y = -1 \\ \rightarrow x = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1$; $y = -1$; $z = 3$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a - 1.^a} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 22y - 42z = -4 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{2.^a} \\ \xrightarrow{3.^a - 2 \cdot 2.^a} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 0 = 8 \end{array} \right.$$

El sistema no tiene solución.

7. Resuelve:

a) $x^2 + 5x \geq 0$ b) $x^2 - 25 < 0$ c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \rightarrow x(x + 5) \geq 0$

Las raíces de $x(x + 5) = 0$ son 0 y -5:

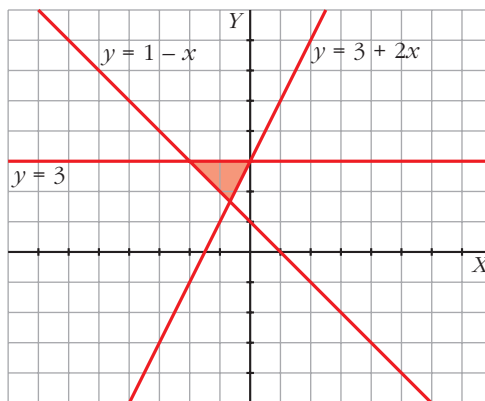


Si $x = -6 \rightarrow -6(-6 + 5) > 0$
 Si $x = -1 \rightarrow -1(-1 + 5) < 0$
 Si $x = 1 \rightarrow 1(1 + 5) > 0$ } Solución: $(-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ Solución: $(-5, 5)$

c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{cases}$ Solución: $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8. Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0,4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$$x = 125, y = 1$$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.