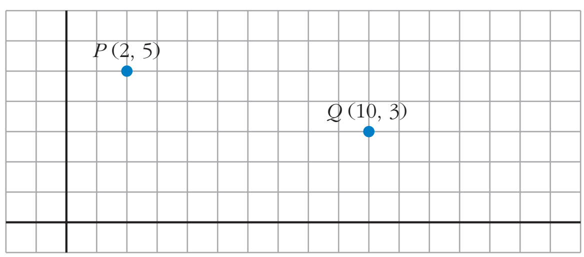
8 GEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS AFINES Y MÉTRICOS

Página 187

REFLEXIONA Y RESUELVE

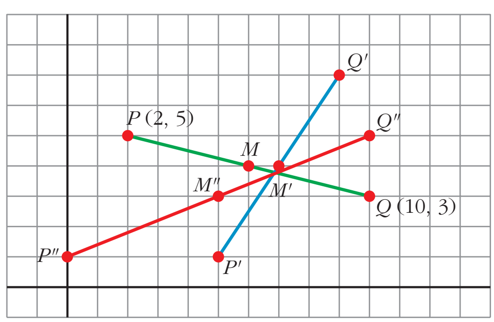
Punto medio de un segmento

Toma los puntos $P(2, 5)$, $Q(10, 3)$ y represéntalos en el plano:



- **Localiza gráficamente el punto medio, M, del segmento PQ y da sus coordenadas. ¿Encuentras alguna relación entre las coordenadas de M y las de P y Q?**

$M(6, 4)$



- **Haz lo mismo con los segmentos de extremos:**

a) $P'(5, 1)$, $Q'(9, 7)$

b) $P''(0, 1)$, $Q''(10, 5)$

a) $M'(7, 4)$

b) $M''(5, 3)$

Basándote en los resultados anteriores, intenta dar un criterio para obtener las coordenadas del punto medio de un segmento a partir de las de sus extremos.

Observamos que las coordenadas del punto medio de cada segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Ecuaciones de la recta

■ **Comprueba que las ecuaciones:**

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

corresponden también a una recta, hallando varios de sus puntos. (Dale a t los valores $-2, -1, 0, 1, 2, 3,$ y representa los puntos correspondientes; comprobarás que todos están sobre la misma recta).

Elimina el parámetro procediendo del siguiente modo:

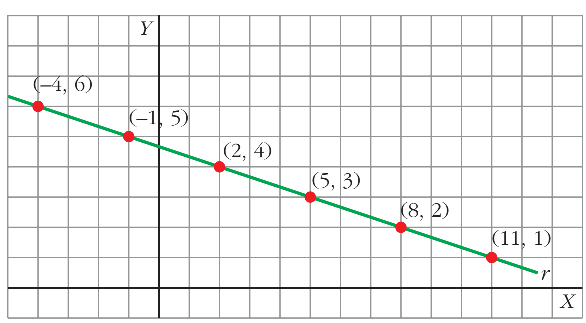
— Despeja t en la primera ecuación.

— Sustituye su valor en la segunda.

— Reordena los términos de la ecuación resultante.

Obtendrás, así, la ecuación de esa recta, en la forma habitual.

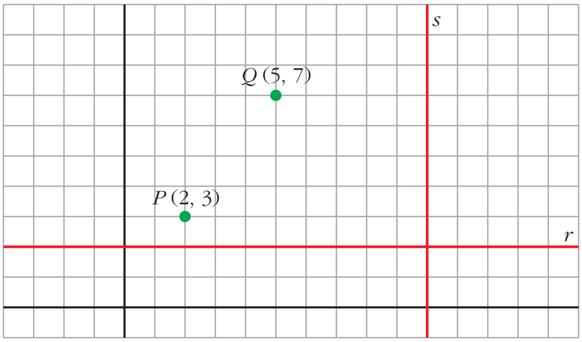
t	–2	–1	0	1	2	3
(*x*, *y*)	(–4, 6)	(–1, 5)	(2, 4)	(5, 3)	(8, 2)	(11, 1)

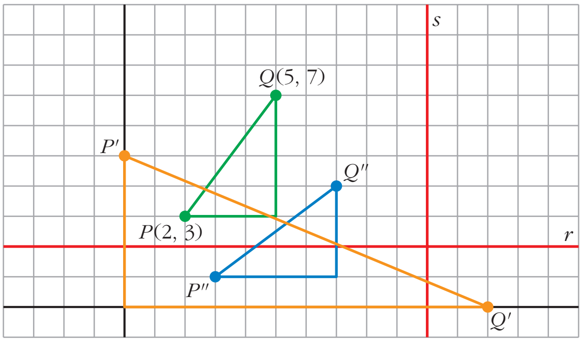


$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x-2}{3} \\ t &= 4 - y \end{aligned}\right\} \to \frac{x-2}{3} = 4 - y \to x - 2 = 12 - 3y \to y = \frac{-x+14}{3} \to$$

$$\to y = \frac{-1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Distancias en el plano





■ **Halla la distancia de los puntos *P* y *Q* a las rectas *r* y *s*.**

$d(P, r) = 1$; $d(P, s) = 8$; $d(Q, r) = 5$; $d(Q, s) = 5$

■ **Halla la distancia entre los puntos *P* y *Q* (ayúdate del teorema de Pitágoras).**

$d(P, Q) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, pues P y Q son dos vértices de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4.

■ **Halla, también, la distancia entre:**

a) *P'*(0, 5), *Q'*(12, 0)

b) *P''*(3, 1), *Q''*(7, 4)

Basándote en los resultados anteriores, intenta dar un criterio para hallar la distancia entre dos puntos a partir de sus coordenadas.

a) $d(P', Q') = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

b) $d(P'', Q'') = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, donde $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$.

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$

Página 189

1. **Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.**

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2. **Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A, \ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3. **Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas**

$A(1, 7)$ $\quad B(-3, 4)$ $\quad C(k, 5)$

estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (k + 3, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \rightarrow -4 = -3k - 9 \rightarrow 3k = -5 \rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

Página 190

4. **Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:**

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

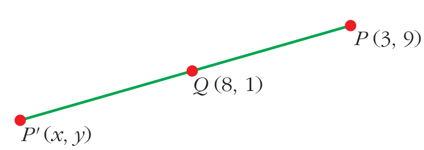
c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overrightarrow{PA}/\overrightarrow{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overrightarrow{PB}/\overrightarrow{PQ} = 1/5$.

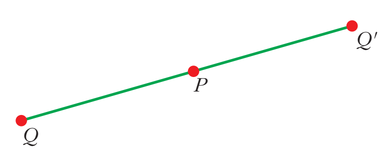
a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11 \end{array}\right\} \rightarrow P'(13, -11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así: $$\left.\begin{array}{l} \frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19 \end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3,\ y-9) = \frac{2}{3}(8-x,\ -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3,\ y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$$

Página 193

1. Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita y explícita de la recta que pasa por *A* y *B*, siendo:

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b) $A(0, 4)$, $B(6, 0)$**

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d) $A(3, 5)$, $B(3, 2)$**

a) $A(-1, -1)$; $B(3, 3) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$ Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$; $B(6, 0) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$ Explícita: $y = \dfrac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$; $B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$ Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$; $B(3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$ Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

2. **Obtén las ecuaciones implícita, paramétricas y continua de la recta $y = 2x + 3$.**

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \ \to \ y = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \ \to \ A(0, 3) \\ \text{Si } x = 1 \ \to \ y = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \ \to \ B(1, 5) \end{array}\right\} \to \ \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x - 0}{1} = \dfrac{y - 3}{2}$

3. **a) Encuentra dos puntos, P y Q, pertenecientes a la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.**

b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a (2, –3).

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m es la pendiente de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

— Si $x = 0 \ \to \ 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \ \to \ y = 2 \ \to \ P(0, 2)$

— Si $x = -3 \ \to \ 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \ \to \ y = 0 \ \to \ Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \ \to \ 2x + 6 = 3y \ \to \ \dfrac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$m = \dfrac{2}{3} \ \to \ (1, m) = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \dfrac{2}{3}\right) \ \to \ \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

Página 194

1. Halla la recta del haz de centro $P(-3, 5)$ que pasa por $(8, 4)$.

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

2. Los haces de rectas cuyos centros son $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$ tienen una recta en común. ¿Cuál es?

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

3. Las rectas $r: 3x - 5y - 7 = 0$ y $s: x + y + 4 = 0$ forman parte de un mismo haz. ¿Cuál de las rectas de ese haz tiene pendiente 4?

- El centro del haz es el punto de corte de r y s. Lo hallamos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + \ \ y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \rightarrow -8y - 19 = 0 \rightarrow y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \rightarrow 32x - 8y + 7 = 0$$

Página 197

1. Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a r.

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector dirección de } r: \ \vec{v}_r = (-5, 2)$$

- Recta paralela a r que pasa por P.

  $P(4, -3)$ $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $$s: \begin{cases} x = \ \ 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- Recta perpendicular a r que pasa por P.

  $P(4, -3)$ $\vec{v}_l = (2, 5)$

  $$l: \begin{cases} x = \ \ 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

2. La pendiente de r es 3/5. Halla:

a) Las coordenadas de un vector paralelo a la recta r.

b) La pendiente de una recta perpendicular a la recta r.

c) Las coordenadas de un vector perpendicular a la recta r.

a) $m_r = \dfrac{3}{5} \rightarrow \vec{v} = (5, 3)$ es paralelo a r.

b) $-\dfrac{1}{m} = m_r \rightarrow m = -\dfrac{5}{3}$

c) $m = -\dfrac{5}{3} \rightarrow \vec{w} = (-3, 5)$ es perpendicular a r.

3. $s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ **. Halla:**

a) Ecuación continua de una recta, r_1, perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) Ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) Ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s; \ \vec{v}_s = (-1, 3)$$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$$r_1: \frac{x - 5}{3} = \frac{y + 3}{1}$$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$.

$P_2(0, 4) \in r_2$.

$$r_2: \frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$.

$P_3(-3, 0) \in r_3$.

r_3: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 1$

4. Determina las ecuaciones implícitas de dos rectas que pasen por $P(-3, 4)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a r.

$$\boldsymbol{r: 5x - 2y + 3 = 0}$$

r: $5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow 5x + 3 = 2y \rightarrow y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

La pendiente de r es $m_r = \dfrac{5}{2}$.

- Recta s paralela a r que pasa por $P(-3, 4)$.

  $m_s = m_r = \dfrac{5}{2}$

  s: $y - 4 = \dfrac{5}{2}(x+3) \rightarrow s$: $5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que pasa por $P(-3, 4)$.

  $m_l = -\dfrac{l}{m_r} = -\dfrac{2}{5}$

  l: $y - 4 = -\dfrac{2}{5}(x+3) \rightarrow l$: $2x + 5y - 14 = 0$

Página 199

1. Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $\boldsymbol{r: 3x + 5y - 8 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{r: 2x + y - 6 = 0}$

$\boldsymbol{s: 6x + 10y + 4 = 0}$ $\boldsymbol{s: x - y = 0}$

c) $\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}}$

d) $\boldsymbol{r: 3x - 5y = 0, \quad s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}}$

a) r: $3x + 5y - 8 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5)$

s: $6x + 10y + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (6, 10)$

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} \neq \dfrac{-8}{4} \rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

b) r: $2x + y - 6 = 0 \;\to\; \vec{n}_r = (2, 1)$

s: $x - y = 0 \;\to\; \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \;\to$ Las dos rectas se cortan.

c) r: $\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \;\to\; \vec{v}_r = (5, -3)$

s: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \;\to\; \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \;\to$ Las dos rectas se cortan.

d) r: $3x - 5y = 0 \;\to\; \vec{n}_r = (3, -5) \;\to\; \vec{v}_r = (5, 3)$

s: $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \;\to\; \vec{v}_s = (5, 3),\; P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Página 200

1. Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $\boldsymbol{r_1}$: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $\boldsymbol{r_2}$: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

b) $\boldsymbol{r_1}$: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, $\boldsymbol{r_2}$: $\boldsymbol{3x - 5y + 4 = 0}$

c) $\boldsymbol{r_1: y = 5x - 1,\; r_2: y = 4x + 3}$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (-4, 3)|}{|(-2, 1)|\,|(-4, 3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0{,}9838699101 \;\to\; \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (5, 3)|}{|(-2, 1)|\,|(5, 3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \;\to\; \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5$; $m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left| \frac{4 - 5}{1 + 5 \cdot 4} \right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \;\to\; \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

Página 201

1. $\boldsymbol{P(-6, -3), \; Q(9, 5)}$

$\boldsymbol{r: 3x - 4y + 9 = 0, \; s: 5x + 15 = 0}$

Halla la distancia entre los dos puntos. Halla también las distancias de cada uno de los puntos a cada recta.

$P(-6, -3), \; Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\,(P, s) = \frac{|5(-6) + 15|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\,(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

2. **a) Halla el área del triángulo de vértices $\boldsymbol{A(-3, 8), \; B(-3, 2), \; C(5, 2)}$ con la fórmula de Herón.**

b) Hállala, también, mediante la fórmula habitual $\boldsymbol{S = b \cdot h_b/2}$, siendo $\boldsymbol{b}$ el lado $\boldsymbol{\overline{AC}}$. ¿Hay otra forma más sencilla?

a) $A(-3, 8), \; B(-3, 2), \; C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{aligned} a &= |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b &= |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \\ c &= |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{aligned}\right\} \; p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12$$

$S = \sqrt{12(12-8)\,(12-10)\,(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

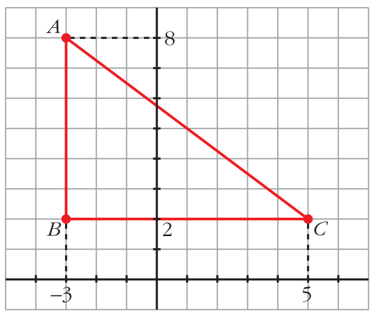
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4} \;\rightarrow\; y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \;\rightarrow\; r: 3x + 4y - 23 = 0$

• $h_b = dist\ [B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4(2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

$S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24\ \text{u}^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:



Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo:

$S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{u}^2$

Página 206

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Coordenadas de puntos

1 **Determina en los siguientes casos si los puntos A, B y C están alineados**

a) $A(5, -2)$, $B(3, -2)$, $C(-5, -2)$

b) $A(-1, -2)$, $B(2, 7)$, $C(1, 2)$

c) $A(0, 3)$, $B(2, 2)$, $C(4, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, A, B y C están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2, 7) - (-1, -2) = (3, 9)$

$\overrightarrow{BC} = (1, 2) - (2, 7) = (-1, -5)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no son proporcionales, por tanto, A, B y C no están alineados.

c) $\overrightarrow{AB} = (2, 2) - (0, 3) = (2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (4, 1) - (2, 2) = (2, -1)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ coinciden, por tanto, los puntos están alineados.

2 **Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5, -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1) \end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

3 **El punto $P(5, -2)$ es el punto medio del segmento AB, del que conocemos el extremo $A(2, 3)$. Halla B.**

☛ ***Si $B = (x, y)$, $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$.***

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } B = (x, y) \\ \text{Como } P \text{ es punto medio de } AB \end{array}\right\} \to \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x + 2 = 10 \to x = 8 \\ y + 3 = -4 \to y = -7 \end{array}\right\} \to B = (8, -7)$$

4 **Halla el punto simétrico de $P(1, -2)$ respecto del punto $H(3, 0)$.**

☛ ***H es el punto medio entre P y su simétrico.***

Si $P'(x, y)$ es simétrico de $P(1, -2)$ respecto de $H(3, 0)$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ H es el punto medio de PP' $\rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-2}{2}\right) = (3, 0) \rightarrow \left.\begin{cases} x+1=6 \rightarrow x=5 \\ y-2=0 \rightarrow y=2 \end{cases}\right\} \rightarrow P'(5, 2)$$

5 **Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sea $P(x, y)$.

Sustituimos en la condición que nos imponen:

$$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x-0, y-(-2)) = 2(3-x, 4-y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3-x) \\ y+2 = 2(4-y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6-2x \\ y+2 = 8-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

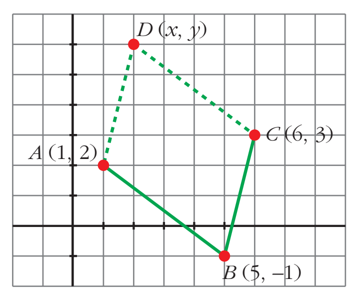
6 **Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.**

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(5-1, -1-2) = (6-x, 3-y)$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 = 6-x \\ -3 = 3-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$



Ecuaciones de rectas

7 **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por A y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}$.**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$ **b)** $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 5 puntos en cada caso.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos puntos: (1, 6); (5, 5); (9, 4); (13, 3); (17, 2).

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(-1, 4)$; $(-1, 6)$; $(-1, 8)$; $(-1, 10)$.

8 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por P y Q de todas las formas posibles.**

a) $P(6, -2)$ y $Q(0, 5)$

b) $P(3, 2)$ y $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ y $Q(8, 0)$

Halla, en todos los casos, un vector de dirección unitario.

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 6}{-6} = \dfrac{y + 2}{7}$

Ec. implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ec. explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 3}{0} = \dfrac{y - 2}{4}$

Ec. implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 0}{8} = \dfrac{y - 0}{0}$

Ec. implícita y explícita: $y = 0$

9 **Halla las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:**

a) $2x - y = 0$ **b)** $x - 7 = 0$

c) $3y - 6 = 0$ **d)** $y = -\frac{1}{3}x$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$ **f)** $\frac{1+x}{2} = 1 - y$

a) Si $x = t \rightarrow 2t - y = 0 \rightarrow y = 2t \rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

Obtenemos un punto y un vector de esta ecuación, $P(0, 0)$, $\vec{v}(-3, 1)$, y a partir de ellos, las ecuaciones paramétricas:

$\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$

Obtenemos un punto, P, y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(1, -1)$; $\vec{v}(3, 2)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

f) $\frac{1+x}{2} = 1 - y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Obtenemos un punto, P, y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(-1, 1)$; $\vec{v}(2, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$

10 **Halla la ecuación continua de cada una de las siguientes rectas:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \end{cases}$ **b)** $r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3t \end{cases}$

c) $r_3: 3x + y - 1 = 0$ **d)** $r_4: y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2t - 1 \\ y = -3t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} t = \frac{x+1}{2} \\ t = \frac{y}{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3}$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ t = \dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{3}$

c) $3x + y - 1 = 0 \rightarrow 3x = -y - 1 \rightarrow x = \dfrac{-y-1}{3} \rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3}$

d) $y + 1 = \dfrac{1}{2}(x - 2) \rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1}$

11 **Determina la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:**

a) $r_1: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$

b) $r_2: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

c) $r_3: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r_4: y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{2}{5}$

Obtén, en cada caso, un vector normal a la recta.

a) $\dfrac{x+1}{-2} = y - 1 \rightarrow x + 1 = -2y + 2 \rightarrow x + 2y - 1 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(1, 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{5} \rightarrow 5x - 5 = -y - 2 \rightarrow 5x + y - 3 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(5, 1)$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 3t - 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y - 2 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(0, 1)$

d) $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{2}{5} \rightarrow 10y = -15x + 4 \rightarrow 15x + 10y - 4 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(15, 10)$

12 **Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.**

☛ ***Ambos ejes pasan por el origen de coordenadas y sus vectores directores son los vectores de la base.***

Eje X: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } X \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \rightarrow$ Eje X: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$

Eje Y: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } Y \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \rightarrow$ Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \rightarrow x = 0$

13 **Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector de dirección, un vector normal y su pendiente:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ **b)** $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$

c) $r_3: x + 3 = 0$ **d)** $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

a) Vector dirección: $\vec{v} = (2, 5)$

Vector normal: $\vec{n} = (-5, 2)$

Pendiente: $m = \dfrac{5}{2}$

b) Vector dirección: $\vec{v} = (2, 4)$

Vector normal: $\vec{n} = (-4, 2)$

Pendiente: $m = \dfrac{4}{2} = 2$

c) Vector dirección: $\vec{v} = (0, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

Pendiente: No tiene, es una recta vertical.

d) Vector dirección: $\vec{v} = (3, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (-1, 3)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{3}$

14 **Comprueba si el punto $P(13, -18)$ pertenece a alguna de las siguientes rectas:**

$r_1: 2x - y + 5 = 0$ $r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$

$r_3: 3y + 54 = 0$ $r_4: \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases}$

$r_1: 2x - y + 5 = 0 \ \rightarrow \ 2 \cdot 13 + 18 + 5 \neq 0$ $P \notin r_1$

$r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 13 = 12 + t \ \rightarrow \ t = 1 \\ -18 = -5 + 13t \ \rightarrow \ t = -1 \end{matrix}$ $P \notin r_2$

$r_3: 3y + 54 = 0 \ \rightarrow \ 3(-18) + 54 = 0$ $P \in r_3$

$r_4: \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 13 = 13 \\ -18 = 10 - t \ \rightarrow \ t = 28 \end{matrix}$ $P \in r_4$

15 **Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto dado:**

a) (5, –2)

b) (7, 3)

c) (–3, 4)

a) $(5, -2) \ \rightarrow \ 5 + k(-2) - 7 = 0 \ \rightarrow \ -2k = 2 \ \rightarrow \ k = -1$

b) $(7, 3) \ \rightarrow \ 7 + k \cdot 3 - 7 = 0 \ \rightarrow \ 3k = 0 \ \rightarrow \ k = 0$

c) $(-3, 4) \ \rightarrow \ -3 + 4k - 7 = 0 \ \rightarrow \ 4k = 10 \ \rightarrow \ k = \dfrac{5}{2}$

Página 207

16 **Dada la recta** $r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, **escribe las ecuaciones (en forma explícita) de las siguientes rectas:**

a) Paralela a r **que pasa por** $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r **que pasa por** $B(-2, 5)$.

$r: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}(x + 1) - 3 \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \rightarrow s: y = 5(x + 2) + 5 \rightarrow s: y = 5x + 15$

17 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto** $P(1, -3)$ **y es:**

a) Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$. **En forma paramétrica.**

b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$. **En forma continua.**

c) Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) $\vec{v}_r = (3, 2)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

b) $\vec{v}_r = (1, 1)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 3}{1}$

c) $\vec{v}_r = (2, 0)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow r: y = -3$

d) $\vec{v}_r = (1, 0)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow r: y = -3$

18 **Halla la ecuación de la paralela a** $2x - 3y = 0$ **cuya ordenada en el origen es** -2.

☛ ***La recta pasa por el punto*** $(0, -2)$.

$r: 2x - 3y = 0$

$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r \rightarrow \text{la pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\}$

$\rightarrow \begin{cases} m_s = m_r = 2/3 \\ P(0, -2) \in s \end{cases} \rightarrow \underbrace{y = \frac{2}{3}x - 2}_{\text{ECUACIÓN EXPLÍCITA}} \rightarrow \underbrace{2x - 3y - 6 = 0}_{\text{ECUACIÓN IMPLÍCITA}}$

19 **Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

☛ ***El eje de ordenadas es el vertical: $x = 0$.***

• Veamos primero cuál es el punto de corte, $P(x, y)$, de la recta con el eje de ordenadas.

$$r: \begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \end{cases} \rightarrow 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$$

Luego $P(0, 2) \in r$ y también debe ser $P(0, 2) \in s$, donde $s \perp r$.

• Como $s \perp r \rightarrow$ sus pendientes deben cumplir:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-4/3} = \frac{3}{4}$$

• Como $P(0, 2) \in s$ y $m_s = \dfrac{3}{4} \rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + 2 \rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

20 **Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:**

a) Su vector de posición es $\vec{a}(-3, 1)$ y su vector de dirección es perpendicular a $\vec{v}(0, -2)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ y es paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) Es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo $P(0, 4)$ y $Q(-6, 0)$.

a) La ecuación vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por $A(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \text{ (pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector dirección puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-6, -4)$

$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}\,(4, -6) \text{ es un vector dirección de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases}$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

21 **De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso:**

a) s es paralela a la recta r y pasa por el origen de coordenadas.

b) s es perpendicular a la recta r y contiene al punto (1, 2).

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por (0, 0):

$s: y = \frac{2}{3}x$

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$:

$y = \frac{-3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$

Haz de rectas

22 **Consideramos el haz de rectas de centro (3, –2).**

a) Escribe la ecuación de este haz de rectas.

b) Halla la ecuación de la recta de este haz que pasa por el punto (–1, 5).

c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?

d) Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

a) $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x - 3)$

b) Si pasa por (–1, 5), entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x - 3)$, obtenemos:

$5 = -2 + m(-1 - 3) \rightarrow 7 = -4m \rightarrow m = -\frac{7}{4}$; es decir:

$y = -2 - \frac{7}{4}(x - 3) \rightarrow 4y = -8 - 7x + 21 \rightarrow 7x + 4y - 13 = 0$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente –2.

Por tanto, será:

$y = -2 - 2(x - 3) \rightarrow y = -2 - 2x + 6 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x - 3) \rightarrow y = -2 + mx - 3m \rightarrow mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$; es decir:

$|-3m - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \rightarrow m = \frac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\frac{5}{12}x - y - \frac{15}{12} - 2 = 0 \rightarrow 5x - 12y - 39 = 0$

23 **Determina el centro del haz de rectas de ecuación:**

$$\mathbf{3kx + 2y - 3k + 4 = 0}$$

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \rightarrow 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \rightarrow x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \rightarrow y_0 = -2$

El centro del haz es el punto (1, –2).

24 **Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. Halla la ecuación de la recta de dicho haz de pendiente –2.**

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 3 \rightarrow y = -2x + 7$$

Posición relativa de dos rectas

25 **Halla el punto de corte de las rectas r y s en cada caso:**

a) $r: 2x - y + 5 = 0; \quad s: x + y + 4 = 0$

b) $r: x - 2y - 4 = 0; \quad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r: 2x - y + 5 = 0 \\ s: \ \ x + y + 4 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $P(-3, -1)$

b) $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \rightarrow x - 1 = \dfrac{y-2}{-3} \rightarrow -3x + 3 = y - 2 \rightarrow 3x + y - 5 = 0$

$\left.\begin{array}{l} r: x - 2y - 4 = 0 \\ s: 3x + y - 5 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $P(2, -1)$

c) Por las ecuaciones de $r: x = 2(*)$

$s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases} \rightarrow x = 3 + 2y \xrightarrow{(*)} 2 = 3 + 2y \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto, $P\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$.

26 **Calcula el valor de los parámetros k y t para que las siguientes rectas se corten en el punto $A(1, 2)$:**

$$r: kx - ty - 4 = 0$$

$$s: 2tx + ky - 2 = 0$$

$\left.\begin{array}{l} A \in r \rightarrow k \cdot 1 - t \cdot 2 - 4 = 0 \\ A \in s \rightarrow 2t \cdot 1 + k \cdot 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} k - 2t - 4 = 0 \\ 2k + 2t - 2 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $k = 2; \quad t = -1$

27 **Determina el valor de k para que las rectas r y s sean paralelas.**

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2}$$

$$s: \frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k}$$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales; es decir:

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k} \rightarrow k = 4$$

28 **Halla el valor de k para que las siguientes rectas sean coincidentes:**

$$r: 2x + 3y + 5 = 0 \qquad s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \rightarrow k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

Página 208

29 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:**

a) $r: 5x + y + 7 = 0$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0$

$s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (5, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5) \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-3, 5) \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

c) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

Ángulos

30 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ 10x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2t \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{array}\right\}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r\!: y = 2x + 5 \\ s\!: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \to$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r\, m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \to \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to$

$$\to cos\ \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|\ |\vec{w}|} = \frac{|30 - 30|}{|\vec{v}|\ |\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$$

c) Los vectores dirección de esas rectas son:

$$\vec{d}_1 = (-1, 2) \quad y \quad \vec{d}_2 = (-3, 1)$$

Entonces:

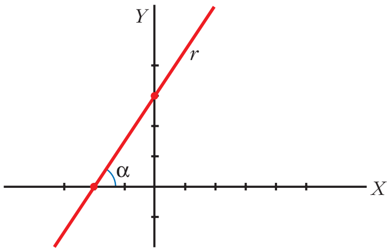
$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1|\ |\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \to cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\ |\vec{a}_2|} =$

$$= \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$$

31 **¿Qué ángulo forma la recta $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?**

☛ ***No es necesario que apliques ninguna fórmula. Sabes que la pendiente de r es la tangente del ángulo que forma r con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de r.***



La pendiente de r es $m_r = \dfrac{3}{2}$.

La pendiente de r es, además, $tg\ \alpha$:

$$m_r = tg\ \alpha \to tg\ \alpha = \frac{3}{2} \to \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$

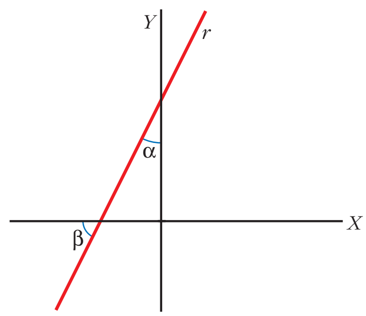
32 **¿Qué ángulo forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de ordenadas?**

☛ ***El ángulo pedido es el complementario del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas.***

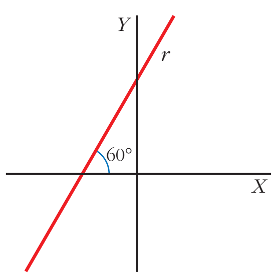
El ángulo pedido, α, es complementario de $\beta \;\rightarrow\; tg\ \beta = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

Por otro lado, $tg\ \beta = m_r = 2$:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha = 26° \ 33' \ 54{,}2''$$



33 **Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el OX.**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\dfrac{3}{n} \end{array}\right\} \text{ Como } tg\ 60° = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \;\rightarrow\; n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

34 **Calcula m y n en las rectas de ecuaciones:**

r: $mx - 2y + 5 = 0$

s: $nx + 6y - 8 = 0$

sabiendo que r pasa por el punto $P(1, 4)$ y que r y s forman un ángulo de 45°.

☛ ***Las coordenadas de P deben verificar la ecuación de r. Así calculas m. Expresa tg 45° en función de las pendientes de r y s para obtener n.***

☛ ***O bien mira el problema resuelto número 3.***

$P \in r \;\rightarrow\; m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \;\rightarrow\; m = 3$

r: $3x - 2y + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} \;\rightarrow\; m_r = \dfrac{3}{2}$

s: $nx + 6y - 8 = 0 \;\rightarrow\; y = -\dfrac{n}{6}x + \dfrac{8}{6} \;\rightarrow\; m_s = -\dfrac{n}{6}$

$$tg\ 45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$$

Hay dos posibilidades:

- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \rightarrow -2n - 18 = 12 - 3n \rightarrow n = 30$
- $\frac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \rightarrow -2n - 18 = -12 + 3n \rightarrow n = -\frac{6}{5}$

Distancias y áreas

35 Halla la distancia entre los puntos *P* y *Q* en cada caso:

a) *P*(1, 3), *Q*(5, 7) b) *P*(–2, 4), *Q*(3, –1) c) *P*(–4, –5), *Q*(0, 7)

a) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

b) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

c) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(0+4)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

36 Calcula *k* de modo que la distancia entre los puntos *A*(5, *k*) y *B*(3, –2) sea igual a 2.

$A(5, k),\ B(3, -2),\ \overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

37 Halla el valor que debe tener *a* para que la distancia entre *A*(*a*, 2) y *B*(–3, 5) sea igual a $\sqrt{13}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13} \rightarrow \sqrt{(-3-a)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} \rightarrow (-3-a)^2 + 9 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow (-3-a)^2 = 4$ ⟨ $-3 - a = 2 \rightarrow a = -5$; $-3 - a = -2 \rightarrow a = -1$

38 Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

• $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow$

$\rightarrow B(5, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

• Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

39 **Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a las siguientes rectas:**

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ **b)** $y = \frac{9}{4}$ **c)** $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$$

Entonces:

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$dist(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $dist(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

40 **Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas:**

a) $3x - 4y + 12 = 0$ **b)** $2y - 9 = 0$

c) $x = 3$ **d)** $3x - 2y = 0$

a) $dist(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$

b) $dist(0, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{9}{2}$

c) $dist(0, r) = \frac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{1} = 3$

d) $dist(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$

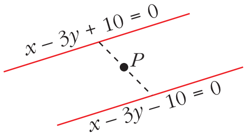
(es decir, la recta $3x - 2y = 0$ pasa por el origen).

41 **Determina c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Hay dos soluciones).**

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\text{Hay dos soluciones: } \begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \ \to \ c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \ \to \ c_2 = -10 \end{cases}$$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



42 **Halla la distancia entre las rectas r: $x - 2y + 8 = 0$ y r': $-2x + 4y - 7 = 0$.**

☛ ***Comprueba que son paralelas; toma un punto cualquiera de r y halla su distancia a r'.***

Sus pendientes son $m_r = \dfrac{1}{2} = m_{r'} \ \to$ Son paralelas.

Entonces, la distancia entre r y r' será:

$$dist(P, r') \text{ donde } P \in r$$

Sea $x = 0$.

Sustituyendo en $r \ \to \ y = \dfrac{-8}{-2} = 4 \ \to \ P(0, 4) \in r$

Así:

$$dist(r, r') = dist(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

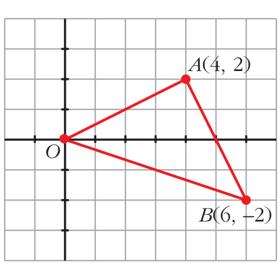
43 **En el triángulo cuyos vértices son $O(0, 0)$, $A(4, 2)$ y $B(6, -2)$, calcula:**

a) La longitud del lado $\overline{OB}$.

b) La distancia de A al lado OB.

c) El área del triángulo.

a) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$



b) Ecuación de OB:

$$m = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}; \quad y = -\frac{1}{3}x \ \to \ x + 3y = 0$$

Distancia de A a OB:

$$d = \frac{|4 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \text{ (es la altura del triángulo).}$$

c) $\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{10}} = 10 \text{ u}^2$

44 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.**

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\} \quad 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2$$

$\to$ Por tanto, el triángulo es rectángulo.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5 \text{ u}^2$$

45 **Halla el área del triángulo cuyos vértices son $P(-1, 2)$, $Q(4, 7)$, $R(7, 0)$.**

$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(7+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ (Base del triángulo)

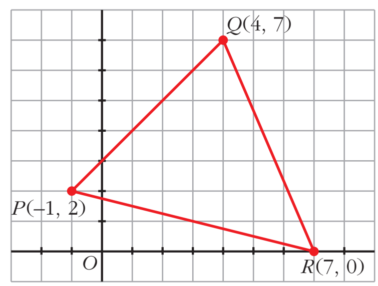
Ecuación de PR:

$$m = \frac{0-2}{7+1} = -\frac{1}{4} \to y = 0 - \frac{1}{4}(x-7) \to$$

$$\to 4y = -x + 7 \to x + 4y - 7 = 0$$

Altura: $d(Q, PR) = \dfrac{|4 + 4 \cdot 7 - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{17}}$

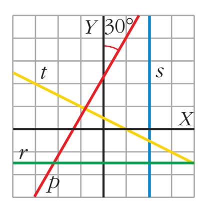
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{25}{\sqrt{17}} = 25 \text{ u}^2$$

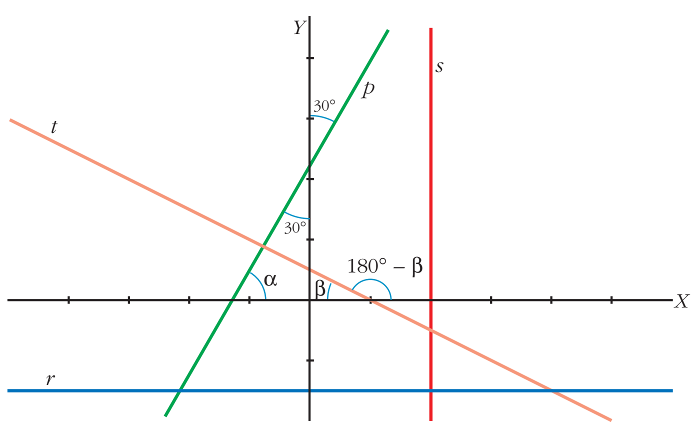


Página 209

PARA RESOLVER

46 **Halla las ecuaciones de las rectas r, s, t y p.**





- p: Pasa por los puntos (–3, –3) y (1, 4).

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{4-(-3)}{1-(-3)} = \frac{7}{4}$$

  Por tanto:

$$p:\ y = 1 + \frac{7}{4}(x-4) \rightarrow 7x - 4y + 9 = 0$$

- r: Su pendiente es 0 y pasa por el punto $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$.

  Por tanto:

$$r:\ y = -\frac{3}{2}$$

- s: Su vector dirección es (0, 1) y pasa por (2, 0).

  Por tanto:

$$s: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$$

- t: Pasa por los puntos (1, 0) y (–3, 2).

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{2-0}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

  Por tanto:

$$t:\ y = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow x + 2y - 1 = 0$$

47 **Dada la recta:**

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + kt \end{cases}}$$

halla un valor para *k* de modo que *r* sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

- La bisectriz del segundo cuadrante es $x = -y \rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ (en paramétricas).

  Su vector dirección es $\vec{d} = (-1, 1)$.

- El vector dirección de r es $\vec{r} = (3, k)$.

- Como queremos que r // bisectriz del segundo cuadrante, entonces sus vectores dirección deben ser proporcionales:

$$\frac{-1}{3} = \frac{1}{k} \rightarrow k = -3$$

48 **En el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, -4)$, halla las ecuaciones de:**

a) La altura que parte de *B*.

b) La mediana que parte de *B*.

c) La mediatriz del lado *CA*.

a) La altura que parte de B, h_B, es una recta perpendicular a AC que pasa por el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} h_B \perp AC\,(5, -7) \to \text{ el vector dirección de } h_B \text{ es } \vec{h}_B\,(7, 5) \\ B(5, 1) \in h_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{x-5}{7} \\ t = \dfrac{y-1}{5} \end{cases} \to \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{5} \to h_B: 5x - 7y - 18 = 0$$

b) m_B (mediana que parte de B) pasa por B y por el punto medio, m, de AC:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{3-4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in m_B \\ B(5, 1) \in m_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to \vec{m}_B\left(5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ es vector dirección de } m_B.$$

Luego:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \dfrac{9}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \to \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\ t = \dfrac{2y \cdot 2}{3} \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{2x - 10}{9} \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \to$$

$$\to \frac{2x-10}{9} = \frac{2y-2}{3} \to m_B: 6x - 18y - 12 = 0$$

c) La mediatriz de CA, z, es perpendicular a CA por el punto medio del lado, m'. Así:

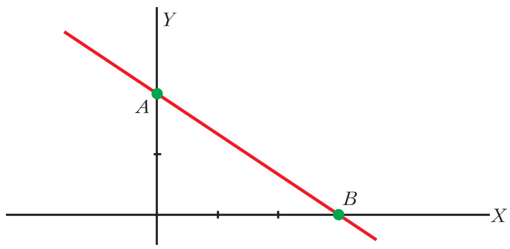
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (-5, 7) \perp z \to \text{ vector dirección de } z\text{: } \vec{z}(7, 5) \\ m'\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in z \end{array}\right\} \to$$

$$\to z: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 7t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 5t \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{2x-1}{14} \\ t = \dfrac{2y+1}{10} \end{cases} \to \frac{2x-1}{14} = \frac{2y+1}{10} \to$$

$$\to z: 20x - 28y - 24 = 0 \to z: 5x - 7y - 6 = 0$$

49 **La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, el segmento AB. Halla la ecuación de la mediatriz de AB.**

☛ ***Después de hallar los puntos A y B, halla la pendiente de la mediatriz, inversa y opuesta a la de AB. Con el punto medio y la pendiente, puedes escribir la ecuación.***



- $A = r \cap$ eje Y: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to 3y - 6 = 0 \to y = 2 \to A(0, 2)$

- $B = r \cap$ eje X: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to 2x - 6 = 0 \to x = 3 \to B(3, 0)$

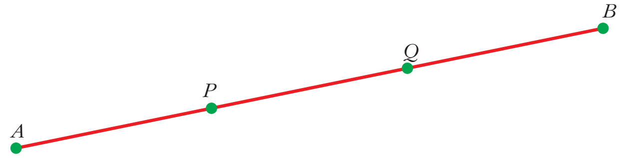
- $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \to \vec{m}_{AB} = (2, 3) \\ M_{AB}\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{ mediatriz} \end{array}\right\} \to$

  $\to y - 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \to y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \to m_{AB}\text{: } 6x - 4y - 5 = 0$

50 **Determina los puntos que dividen al segmento AB, $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres partes iguales.**

☛ ***Si P y Q son esos puntos, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.***

Escribe las coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ y de $\overrightarrow{AB}$, y obtén P. Q es el punto medio de $\overline{PB}$.



- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x + 2, y - 1) = \frac{1}{3}(7, 3) \to$

  $\to \begin{cases} x + 2 = \frac{7}{3} \to x = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \\ y - 1 = \frac{3}{3} \to y = 1 + 2 = 2 \end{cases} \to P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

- Q es el punto medio de $PB \to Q\left(\frac{1/3 + 5}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \to Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

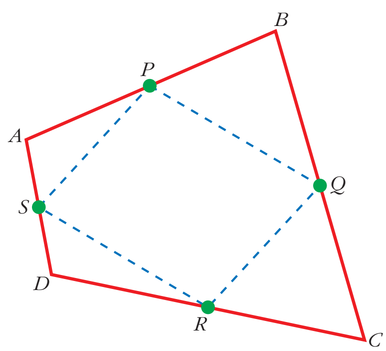
51 **¿Qué coordenadas debe tener P para que se verifique que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{QR} = 0$, siendo $Q(3, 2)$ y $R(-1, 5)$?**

$3\,\overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{QR} \;\to\; 3(3 - x,\, 2 - y) = 2(-4, 3) \;\to$

$$\to \begin{cases} 9 - 3x = -8 \\ 6 - 3y = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{17}{3} \\ y = 0 \end{cases} \to P\left(\dfrac{17}{3},\, 0\right)$$

52 **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices:**

$A(3, 8)$ $B(5, 2)$ $C(1, 0)$ $D(-1, 6)$



$P\left(\dfrac{5+3}{2},\, \dfrac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$

$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

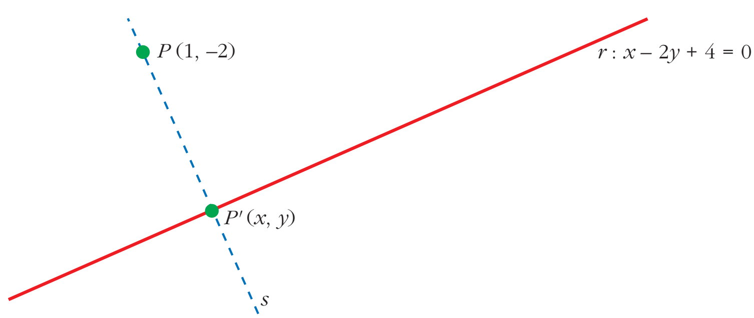
$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3 - 4,\, 1 - 5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0 - 1,\, 3 - 7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \;\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4 - 1,\, 5 - 7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3 - 0,\, 1 - 3) = (3, -2) \end{array}\right\} \;\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

53 **Halla el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta:**

$r\colon x - 2y + 4 = 0$

☛ ***Escribe la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte con r.***



Sea s la recta perpendicular a r desde P y $\vec{r} = (2, 1)$ vector director de r.

Así, $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{r} \Rightarrow$ el vector dirección de s, $\vec{s}$, también es perpendicular a $\vec{r}\,(\vec{s} \perp \vec{r})$, luego podemos tomar $\vec{s}(1, -2)$. Como $P(1, -2) \in s$:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 + t \;\to\; t = x - 1 \\ y = -2 - 2t \;\to\; t = \dfrac{y+2}{-2} \end{cases} \to x - 1 = \dfrac{y+2}{-2} \to -2x + 2 = y + 2 \to$$

$$\to s\colon 2x + y = 0$$

El punto $P'(x, y)$ es tal que:

$$P' = s \cap r \begin{cases} s: 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \\ r: x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-2x) + 4 = 0 \rightarrow x + 4x + 4 = 0 \rightarrow$$

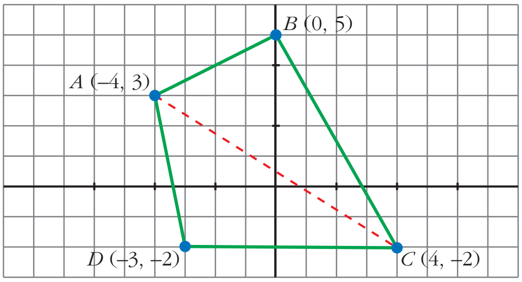
$$\rightarrow x = \frac{-4}{5} \rightarrow y = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

Luego: $P'\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

54 **Halla el área del cuadrilátero de vértices:**

$$\mathbf{A(-4, 3) \quad B(0, 5) \quad C(4, -2) \quad D(-3, -2)}$$

☛ ***Traza una diagonal para descomponerlo en dos triángulos de la misma base.***



- La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

$$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$$

- Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

$$h_B = dist\,(B, r) \quad \text{y} \quad h_D = dist\,(D, r)$$

donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

Tomando como vector dirección de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow r: 5x + 8y - 4 = 0$$

Luego:

$$h_B = dist\,(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

$$h_D = dist\,(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

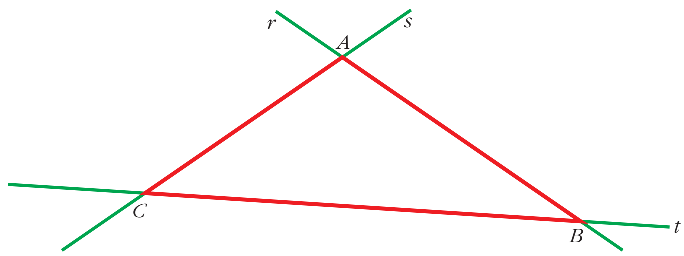
• Así:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) =$$

$$= \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

55 **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:**

$$\boldsymbol{r: x = 3 \qquad s: 2x + 3y - 6 = 0 \qquad t: x - y - 7 = 0}$$



• $A = r \cap s \quad \begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \to \ 6 + 3y - 6 = 0 \ \to \ y = 0$

Luego: $A(3, 0)$

• $B = r \cap t \quad \begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \to \ 3 - y - 7 = 0 \ \to \ y = -4$

Luego: $B(3, -4)$

• $C = s \cap t \quad \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \ \to \ x = y + 7 \end{cases} \to$

$\to \ 2(y + 7) + 3y - 6 = 0 \ \to \ 2y + 14 + 3y - 6 = 0 \ \to \ 5y + 8 = 0 \ \to$

$\to \ y = \frac{-8}{5} \ \to \ x = \frac{-8}{5} + 7 = \frac{27}{5}$

Luego: $C\left(\frac{27}{5}, \frac{-8}{5}\right)$

• Consideramos el segmento AB como base:

$$|\overrightarrow{AB}| = |(0, -4)| = \sqrt{16} = 4$$

• La altura desde C es $h_C = dist\,(C, r) = \frac{|(-8/5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{23}{5}$

• Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h_C}{2} = \frac{4 \cdot 23/5}{2} = \frac{46}{5}$$

56 **En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B.**

• *Mediana*. Es el segmento BM donde M es el punto medio de AC.

$$M\left(\frac{3}{2}, 0\right) \to \quad \overrightarrow{BM} = \left(\frac{3}{2} - 2, 0 - 4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

La longitud de la mediana es: $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{1/4 + 16} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

• *Altura*. Es el segmento BP donde P es el pie de la perpendicular a AC desde B.

$\overrightarrow{AC} = (5, 2) \to$ la recta que contiene ese segmento es:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \to \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \to 2x - 5y - 3 = 0$$

$\vec{v} = (-2, 5) \perp \overrightarrow{AC} \to$ la recta $s \perp r$ que pasa por B:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \to \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{5} \to 5x + 2y - 18 = 0$$

$$P = r \cap s \to \begin{cases} r: 2x - 5y - 3 = 0 \\ s: 5x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 5, y sumamos:

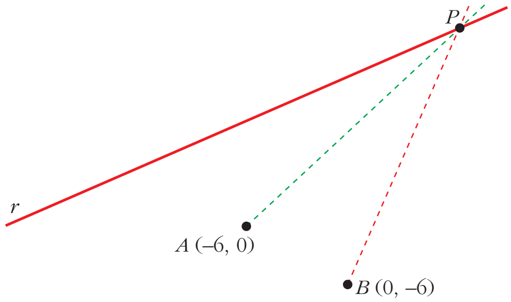
$$\begin{array}{r} 4x - 10y - 6 = 0 \\ 25x + 10y - 90 = 0 \\ \hline 29x - 96 = 0 \end{array} \to x = \frac{96}{29} \to \quad 2 \cdot \frac{96}{29} - 5y - 3 = 0 \to$$

$$\to 5y = \frac{192}{29} - 3 = \frac{105}{29} \to y = \frac{105}{29} : 5 = \frac{21}{29}$$

Luego: $P\left(\dfrac{96}{29}, \dfrac{21}{29}\right)$

Así: $h_B = |\overrightarrow{BP}| = \left|\left(\dfrac{38}{29}, -\dfrac{95}{29}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{10\,469}{29^2}} = \dfrac{\sqrt{10\,469}}{29} \approx 3{,}528$

57 **Halla el punto de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ y $B(0, -6)$.**



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

1. $P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

2. $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 6)^2}$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow 3x - 4x + 8 = 0 \rightarrow x = 8 = y \rightarrow P(8, 8)$

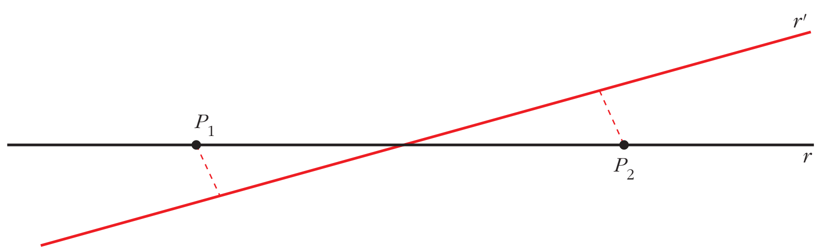
58 **Determina un punto en la recta $y = 2x$ que diste 3 unidades de la recta $3x - y + 8 = 0$.**

$$\begin{cases} P(x, y) \in r\colon y = 2x \\ dist(P, r') = 3, \text{ donde } r'\colon 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{|3x - y + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{|3x - 2x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow \frac{|x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ dos posibilidades: } \begin{cases} x + 8 = 3\sqrt{10} \rightarrow x_1 = 3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \\ x + 8 = -3\sqrt{10} \rightarrow x_2 = -3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow y_1 = 6\sqrt{10} - 16 \rightarrow \\ \rightarrow y_2 = -6\sqrt{10} - 16 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} P_1\,(3\sqrt{10} - 8,\ 6\sqrt{10} - 16) \\ P_2\,(-3\sqrt{10} - 8,\ -6\sqrt{10} - 16) \end{cases}$$



59 **Halla los puntos de la recta $y = -x + 2$ que equidistan de las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$.**

Sean r_1, r_2 y r_3 las tres rectas del ejercicio, respectivamente.

Buscamos los puntos $P(x, y)$ que cumplan:

$$\begin{cases} P \in r_1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \end{cases} \rightarrow \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|x + 2(-x + 2) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2(-x + 2) + 1|}{2\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\to |-x-1| = \frac{|6x-3|}{2} \to \begin{cases} -x-1 = \dfrac{6x-3}{2}, \text{ o bien} \\ -x-1 = \dfrac{-6x+3}{2} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} -2x-2 = 6x-3, \text{ o bien} \\ -2x-2 = -6x+3 \end{cases} \to \begin{cases} 8x = 1 \\ 4x = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{8} + 2 = \dfrac{15}{8} \\ y_2 = -\dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to \begin{cases} P_1\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right) \\ P_2\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

60 **Calcula c para que la distancia entre las rectas $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16+9}} = 3 \to$

$$\to \frac{|6+c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$$

61 **El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.**

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \to \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \to r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = 5/2 - 5t \\ y = 1/2 + 3t \end{cases} \to \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \to$$

$$\to h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \to h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + 2y - 16 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \to y = \frac{36}{12} = 3 \to$$

$$\to 3x - 3 + 8 = 0 \to 3x + 5 = 0 \to x = \frac{-5}{3}$$

Luego: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

• $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{34} \cdot (\sqrt{850}/6)}{2} \approx 14{,}17$

$$(*)\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \rightarrow |\overrightarrow{CM}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

62 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta: $x + 5y - 6 = 0$.**

$$\boldsymbol{r: 3x - y - 9 = 0 \qquad s: x - 3 = 0}$$

$$P = r \cap s: \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x \quad\quad - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 9 - y - 9 = 0 \rightarrow y = 0$$

Luego: $P(3, 0)$

Como la recta pedida y $x + 5y - 6 = 0$ forman un ángulo de 45°, entonces si sus pendientes son, respectivamente, m_1 y m_2, se verifica:

$$tg\ 45° = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{(-1/5) - m_1}{1 + (-1/5) \cdot m_1}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = \left|\frac{-1 - 5 \cdot m_1}{5 - m_1}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 - m_1 = -1 - 5m_1, \text{ o bien} \\ -(5 - m_1) = -1 - 5m_1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4m_1 = -6 \rightarrow m_1 = -6/4 \\ 6m_1 = 4 \rightarrow m_1 = 4/6 \end{cases}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$t_1: y - 0 = \frac{-6}{4}(x - 3) \rightarrow t_1: y = \frac{-3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$t_2: y - 0 = \frac{4}{6}(x - 3) \rightarrow t_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$$

63 **Dadas $r: 2x - y - 17 = 0$ y $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula el valor de k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°.**

☛ ***Halla la pendiente de r. La pendiente de s es $3/k$. Obtendrás dos soluciones.***

Las pendientes de r y s son, respectivamente:

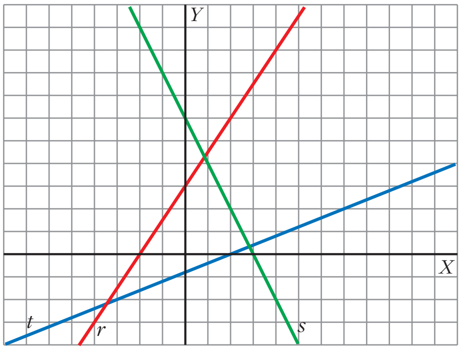
$$m_r = 2 \quad \text{y} \quad m_s = \frac{3}{k}$$

Entonces:

$$tg\ 60° = \left|\frac{2 - 3/k}{1 + 2 \cdot 3/k}\right| \rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{2k - 3}{k + 6}\right| \rightarrow \text{ dos casos:}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{3}(k + 6) = 2k - 3 \\ -\sqrt{3}(k + 6) = 2k - 3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{6\sqrt{3} + 3}{2 - \sqrt{3}} = 24 + 15\sqrt{3} \\ k_2 = \dfrac{6\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} = 9\sqrt{3} - 12 \end{cases}$$

64 **Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**



$m_r = \dfrac{3}{2}$; $m_s = -2$; $m_t = \dfrac{2}{5}$

$$tg\ (\widehat{r, s}) = \left|\frac{3/2 - (-2)}{1 + 3/2 \cdot (-2)}\right| = \frac{7/2}{2} = \frac{7}{4}$$

Luego: $(\widehat{r, s}) = 60°\ 15'\ 18,4''$

$$tg\ (\widehat{r, t}) = \left|\frac{3/2 - 2/5}{1 + 3/2 \cdot 2/5}\right| = \left|\frac{15 - 4}{10 + 6}\right| = \frac{11}{16}$$

Luego: $(\widehat{r, t}) = 34°\ 30'\ 30,7''$

Por último: $(\widehat{s, t}) = 180° - (\widehat{r, s}) - (\widehat{r, t}) = 85°\ 14'\ 11''$

65 **Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

☛ ***Representa el triángulo y observa si tiene algún ángulo obtuso.***

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{BA}\ (-11, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (6, -6)$; $\overrightarrow{CA}\ (-6, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$; $\overrightarrow{CB}\ (5, 3)$

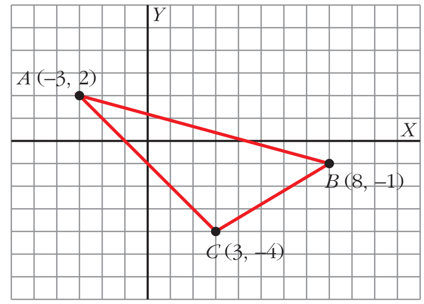
$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{66 + 18}{\sqrt{130}\,\sqrt{72}} \approx 0{,}868$$

Luego: $\hat{A} = 29°\ 44'\ 41{,}6''$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{55 - 9}{\sqrt{130}\,\sqrt{34}} \approx 0{,}692$$

Luego: $\hat{B} = 46°\ 13'\ 7{,}9''$

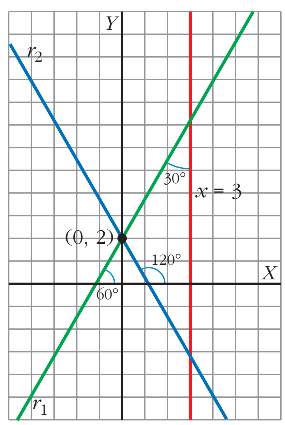
Así, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 104°\ 2'\ 10{,}5''$



Página 210

66 **Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.**

☛ ***La recta que buscamos forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.***



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

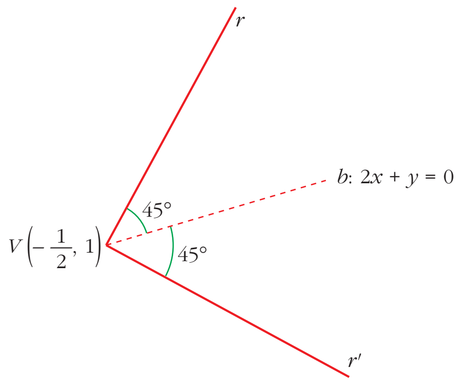
$$r_1: y = \sqrt{3}x + 2$$

$$r_2: y = -\sqrt{3}x + 2$$

67 **La recta $2x + y = 0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

Las pendientes de las tres rectas son: $m_b = -2$, m_r, $m_{r'}$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b\, m_r}\right| \to 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \to m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \to m_{r'} = -1/3 \end{cases} \to$$

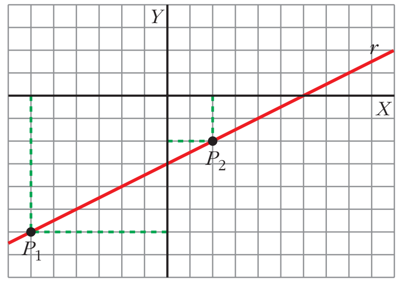
$$\to \begin{cases} r: y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = 3x + \frac{5}{2} \\ r': y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

68 **Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X: y = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \begin{cases} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \to \text{dos casos: } \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \to \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

$$\to \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} P_1\ (-6, -6) \\ P_2\ (2, -2) \end{cases}$$



69 **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \to$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \to m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 1 - m \to m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y - 2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

$$r_2: y - 2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$$

70 **Escribe la ecuación de la recta r que pasa por $A(2, 3)$ y $B(5, 6)$ y halla la ecuación de una recta paralela a r, cuya distancia a r sea igual a la distancia entre A y B.**

- $r: \begin{cases} \text{vector dirección } \overrightarrow{AB} = (3, 3) \\ \text{pasa por } A(2, 3) \end{cases} \to r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases} \to$

$$\to \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} \to 3x - 3y + 3 = 0 \to r: x - y + 1 = 0$$

- $s \mathbin{/\!/} r \to m_s = m_r = 1 \to y = x + c \to s: x - y + c = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(A, s) = dist\,(A, B) \to$$

$$\to \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |\overrightarrow{AB}| \to$$

$$\to \frac{|1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \to \begin{cases} -1 + c = 6 \Rightarrow c_1 = 6 + 1 = 7 \\ -1 + c = -6 \Rightarrow c_2 = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\to s_1: x - y + 7 = 0$$

$$s_2: x - 5 = 0$$

71 **Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ repecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.**

- $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}$ donde P' es el simétrico de P respecto a esa recta y $\vec{v}$ es el vector dirección de la misma.

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \to (x - 1, y - 1) \cdot (2, 1) = 0 \to$$
$$\to 2(x - 1) + (y - 1) = 0 \to 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de PP', M, debe pertenecer a la recta. Luego:

$$M\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \to \frac{x+1}{2} - 2\,\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \to$$
$$\to x + 1 - 2y - 2 - 8 = 0 \to$$
$$\to x - 2y - 9 = 0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \to x = 9 + 2y \end{cases}\right\} \to$$

$$\to 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \to 18 + 4y + y - 3 = 0 \to y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\to x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego: $P' = (3, -3)$

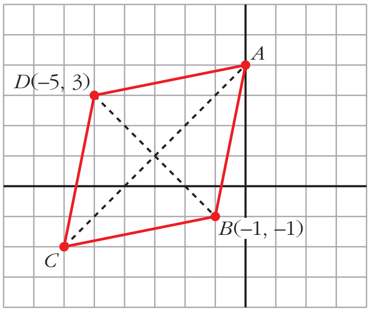
72 **Un rombo *ABCD* tiene un vértice en el eje de las ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$.**

Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.

Sea $A \in$ eje $Y \to A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

• Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BD} = (-4, 4) \to \vec{d} = (4, 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3, 1) \in d\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l}\text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \dfrac{4}{4} = 1 \\ M(-3, 1) \in d\end{array}\right. \to$$

$$\to d: y - 1 = (x + 3) \to y = x + 4$$

• Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \left\{\begin{array}{l} y = x + 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \to y = 4 \to A(0, 4)$$

• M es punto medio de $AC \to (-3, 1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{4 + y_2}{2}\right) \to$

$$\to \left.\left\{\begin{array}{l} -3 = \dfrac{x_2}{2} \to x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4 + y_2}{2} \to y_2 = -2 \end{array}\right.\right\} \to C(-6, -2)$$

• Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \to \text{Área} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$$

73 **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

☛ ***El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.***

ORTOCENTRO: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

• $h_A \left\{\begin{array}{l} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, -2) \to \vec{a} = (2, 3) \\ A \in h_A \end{array}\right. \to h_A: \left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{array}\right. \to$

$$\to \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 2}{3} \to h_A: 3x - 2y + 13 = 0$$

• $h_B \left\{\begin{array}{l} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (7, -1) \to \vec{b} = (1, 7) \\ B \in h_B \end{array}\right. \to h_B: \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 7t \end{array}\right. \to$

$$\to x - 1 = \frac{y - 3}{7} \to h_B: 7x - y - 4 = 0$$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ C \in h_C \end{cases} \rightarrow h_C: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow x - 4 = \dfrac{y-1}{-4} \rightarrow h_C: 4x + y - 17 = 0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \quad \text{Sumando:}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11x \qquad - 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{21}{11} \\ y = 7x - 4 = 7 \cdot \dfrac{21}{11} - 4 = \dfrac{147 - 44}{11} = \dfrac{103}{11} \end{array}\right\} R\left(\dfrac{21}{11}, \dfrac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente).

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\dfrac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \dfrac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow y - \dfrac{5}{2} = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - \dfrac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \\ y = -4x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} = -4x - \dfrac{3}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow 6x - 7 = -16x - 6 \rightarrow 22x = 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{22} \rightarrow$

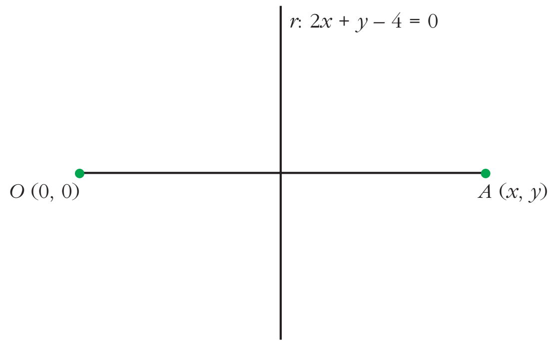
$\rightarrow y = -4 \cdot \dfrac{1}{22} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-4 - 33}{22} = \dfrac{-37}{22}$

Así, $S\left(\dfrac{1}{22}, \dfrac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

74 **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0).**

Halla las coordenadas del otro extremo.



Un vector dirección de la recta es el $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \;\rightarrow\; x - 2y = 0 \;\rightarrow\; x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \;\rightarrow\; 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow\; 4y + y - 8 = 0 \;\rightarrow$$

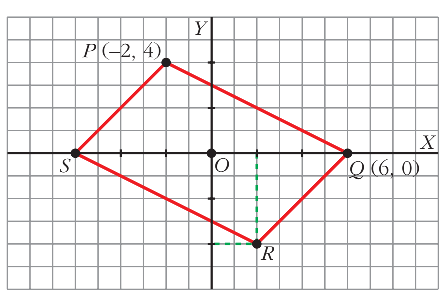
$$\rightarrow\; y = \frac{8}{5} \;\rightarrow\; x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

75 **Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo que tiene el centro en el origen de coordenadas. Halla:**

a) Los otros dos vértices.

b) Los ángulos del paralelogramo.



a) Como las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, que es el centro, se tienen fácilmente los otros dos vértices:

$$R(2, -4), \quad S(-6, 0)$$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = (8, -4) \rightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} = (-8, 4)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (-4, -4) \rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} = (4, 4)$

$$\cos \hat{P} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PS}|\,|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-32 + 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \rightarrow \hat{P} = 108° \; 26' \; 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\hat{P} + \hat{R})}{2} = 71° \; 33' \; 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríamos haber calculado $\hat{S}$ con los vectores:

$$\cos \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}|\,|\overrightarrow{SR}|} = \frac{32 - 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}31623 \rightarrow \hat{S} = 71° \; 33' \; 54''$$

76 **Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto (6, 0).**

Halla los otros vértices.

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{aligned} r_1&: \\ r_2&: \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} x + y - 2 &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} x + y - 2 &= 0 \\ -x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

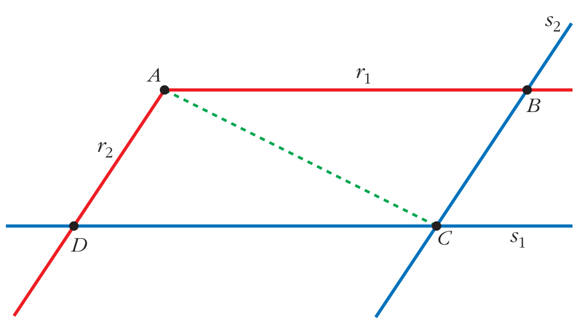
Sean $s_1 /\!/ r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 /\!/ r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$$r_1 \cap s_2 = B$$

$$r_2 \cap s_1 = D$$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \;\rightarrow\; 6 + 0 + a = 0 \;\rightarrow\; a = -6 \end{cases} \rightarrow\; s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \;\rightarrow\; 6 - 0 + b = 0 \;\rightarrow\; b = -6 \end{cases} \rightarrow\; s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2: \begin{cases} x + \;\; y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

  Resolviendo el sistema:

  De la primera ecuación $\rightarrow$ $x = 2 - y$ $\rightarrow$ en la segunda $\rightarrow$ $2 - y - 2y - 6 = 0$ $\rightarrow$

  $\rightarrow\; y = \dfrac{-4}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{10}{3} \;\rightarrow\; B\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$

- $D = r_2 \cap s_1: \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \;\; y - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 6 - y \end{cases}\right\} \rightarrow\; 6 - y - 2y + 4 = 0 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; y = \dfrac{10}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{8}{3} \;\rightarrow\; D\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

77 **Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ debe verificar $dist\,(P, r) = dist\,(P, s)$:

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 \;\;\;\;\;\rightarrow\; x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) \;\rightarrow\; x_2 = 3/7 \end{cases} \rightarrow\; P_1(-15, 0),\; P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$$

78 **Halla el punto de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.**

☛ ***Si tomamos como base $|\overrightarrow{PQ}| = 4$, la altura del triángulo mide 3. El punto que buscamos está a 3 unidades de PO y en la recta dada. Hay dos soluciones.***

Los vértices son $O(0, 0)$, $P(-4, 0)$, $Q(x, y)$.

Si tomamos como base OP, entonces:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{OP}| \cdot h}{2} \;\rightarrow\; 6 = \frac{4 \cdot h}{2} \;\rightarrow\; h = 3$$

El punto $Q(x, y) \in r \;\rightarrow\; 2x - 4y - 1 = 0$ y debe verificar que $dist\,(Q, OP) = 3$.

La recta sobre la que se encuentra OP tiene por vector dirección $\overrightarrow{OP}(-4, 0)$ y pasa por $(0, 0)$. Luego es el eje X: $y = 0$.

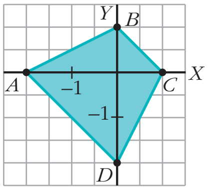
Así:

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \cdot 3 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{13}{2} \\ 2x - 4(-3) - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-11}{2} \end{cases}$$

Luego hay dos triángulos, OPQ_1 y OPQ_2, donde:

$$Q_1\left(\frac{13}{2}, 3\right) \text{ y } Q_2\left(\frac{-11}{2}, -3\right)$$

79 **Sean A, B, C, D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.**



***A* (–2, 0)**
***B* (0, 1)**
***C* (1, 0)**
***D* (0, –2)**

☛ ***Mira el problema resuelto número 1.***

Sean: $A = r \cap$ eje OX: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$

$B = r \cap$ eje OY: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1)$

$C = s \cap$ eje OX: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$

$D = s \cap$ eje OY: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2 \Rightarrow D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1)] \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases BC y DA.

Para calcular el área necesitamos la altura:

Como $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow y = -x - 2 \rightarrow AD: x + y + 2 = 0$

$$h = dist\,(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

80 **La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto $(0, 5)$ determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.**

$$\left.\begin{array}{l} s /\!/ r: x + y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to \ 0 + 5 + k = 0 \ \to \ k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

- Sean: $A = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \ x = 2 \ \Rightarrow \ A(2, 0)$

  $B = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to \ y = 2 \ \Rightarrow \ B(0, 2)$

  $C = s \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \ x = 5 \ \Rightarrow \ C(5, 0)$

  $D = s \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to \ y = 5 \ \Rightarrow \ D(0, 5)$

- $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot h = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}$$

81 **Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?**

- $d\,(P, OX) = 2d\,(P, OY) \ \to \ |y| = 2|x| \ \to \ \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \ \to \ \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(-5 - x)^2 + (6 - y)^2} \ \to$

  $\to \ x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \ \to$

  $\to \ -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \ \to \ 16x - 4y + 36 = 0 \ \to$

  $\to \ 4x - y + 9 = 0$

• Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$$P_1: \begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{2} \rightarrow y = -9$$

Luego: $P_1\left(\frac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2: \begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \rightarrow y = 3$$

Luego: $P_2\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$

82 **De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.**

☛ ***La ecuación $y = 2 + m(x - 1)$ representa a todas esas rectas. Pásala a forma general y aplica la condición $d(O, r) = 1$.***

• Esas rectas tienen por ecuación:

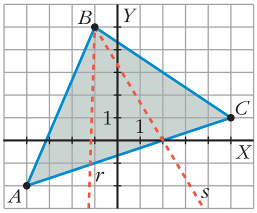
$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

• $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

83 **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y cortan a AC, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**



• La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen el lado AC en tres partes iguales:

$$\vec{OP} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \vec{OQ} = \frac{\vec{OC} + 2\vec{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

• La recta r es la que pasa por B y por P:

$$m = \frac{-1 - 5}{(-2/3) - (-1)} = \frac{-6}{(1/3)} = -18$$

$y = 5 - 18(x + 1) \rightarrow r: 18x + y + 13 = 0$

• La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5-0}{(-1)-(8/3)} = \frac{-5}{(-11/3)} = -\frac{15}{11}$$

$$y = 5 - \frac{15}{11}(x+1) \;\rightarrow\; 11y = 55 - 15x - 15 \;\rightarrow\; s\text{: } 15x + 11y - 40 = 0$$

84 **Dada la recta r: $2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.**

• Hallamos dos puntos de la recta dada. Por ejemplo: $A(2, 3)$ y $B(5, 5)$.

• Los dos puntos simétricos respecto al eje OX de A y B son $A'(2, -3)$ y $B'(5, -5)$.

• La recta, r', simétrica de r respecto al eje OX será la que pasa por A' y B':

$$m = \frac{-5-(-3)}{5-2} = \frac{-5+3}{3} = \frac{-2}{3}$$

La recta r' es: $y = -3 - \frac{2}{3}(x-2) \;\rightarrow\; 3y = -9 - 2x + 4 \;\rightarrow\; 2x + 3y + 5 = 0$

• De otra forma:

Si (x, y) es un punto de la recta r, entonces $(x, -y)$ es un simétrico respecto al eje OX. Por tanto, la ecuación de la recta r', simétrica de r respecto al eje OX, será:

$$2x - 3(-y) + 5 = 0 \;\rightarrow\; 2x + 3y + 5 = 0$$

Página 211

CUESTIONES TEÓRICAS

85 **Prueba que si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son perpendiculares, se verifica que $aa' + bb' = 0$.**

• El vector (a, b) es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.

• El vector (a', b') es perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.

• Si las dos rectas son perpendiculares, entonces:

$(a, b) \cdot (a', b') = 0$; es decir, $aa' + bb' = 0$.

86 **Dada la recta $ax + by + c = 0$, prueba que el vector $\vec{v} = (a, b)$ es ortogonal a cualquier vector determinado por dos puntos de la recta.**

☛ ***Llama $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ y haz $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ten en cuenta que los puntos A y B verifican la ecuación de la recta.***

• Si $A(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, entonces $\quad ax_1 + by_1 + c = 0$

• Si $B(x_2, y_2)$ pertenece a la recta, entonces $\quad ax_2 + by_2 + c = 0$

• Restando las dos igualdades: $\quad a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Esta última igualdad significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; es decir, que el vector (a, b) es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta.

87 **a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?**

b) ¿Y si falta el término en x?

c) ¿Y si falta el término en y?

a) La recta pasa por $(0, 0)$.

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

88 **Prueba que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puede escribirse de la forma: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.**

Un vector dirección de la recta es $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y un punto de la recta es $P(x_1, y_1)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta serán:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \;\rightarrow\; t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\[2ex] y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \;\rightarrow\; t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \;\rightarrow\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o, lo que es lo mismo:

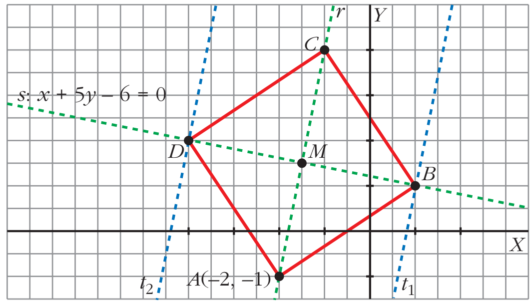
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

PARA PROFUNDIZAR

89 **Un cuadrado tiene una diagonal sobre la recta $x + 5y - 6 = 0$ y uno de sus vértices es $A(-2, -1)$. Halla los otros vértices y la longitud de la diagonal.**

- Se comprueba que $A \notin s$.
- Luego la otra diagonal en la que está A será r tal que $r \perp s$:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - y + G = 0 \\ \text{Como } A \in r \end{array}\right\} \rightarrow -10 + 1 + G = 0 \;\rightarrow\; G = 9 \;\rightarrow\; r\!: 5x - y + 9 = 0$$



• $M = r \cap s$ será el punto medio de las dos diagonales:

$$\left.\begin{cases} 5x - \ \ y + 9 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow \ 5(6 - 5y) - y + 9 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y + 9 = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{39}{26} = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ x = 6 - 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

Luego: $M\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

• M es el punto medio de AC $\rightarrow \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-2 + C_1}{2}, \frac{-1 + C_2}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} -3 = -2 + C_1 \ \rightarrow \ C_1 = -1 \\ \ \ 3 = -1 + C_2 \ \rightarrow \ C_2 = 4 \end{cases}\right\} \rightarrow \ C(-1, 4)$$

• B y D están en las rectas que equidistan de AC.

Dichas rectas son todos los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$dist\,(P, r) = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

pues, al ser un cuadrado, sus diagonales son iguales. Es decir:

$$dist\,(P, r) = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{|(1, 5)|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \frac{|5x - y + 9|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ \rightarrow \begin{cases} 5x - y + 9 = 26/2 \\ 5x - y + 9 = -26/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1\!: 5x - y - \ \ 4 = 0 \\ t_2\!: 5x - y + 22 = 0 \end{cases}$$

Así:

$$B = t_1 \cap s\!: \left.\begin{cases} 5x - \ \ y - 4 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y - 4 = 0 \ \rightarrow \ y = 1 \ \rightarrow \ x = 1 \ \Rightarrow \ B(1, 1)$$

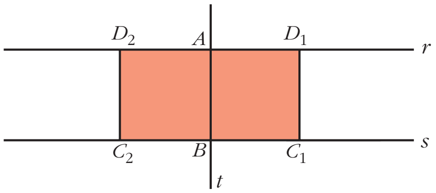
$$D = t_2 \cap s\!: \left.\begin{cases} 5x - \ \ y + 22 = 0 \\ x + 5y - \ \ 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y + 22 = 0 \ \rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow \ x = -4 \ \Rightarrow \ D(-4, 2)$$

• La longitud de la diagonal será:

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{26}$$

90 **De un cuadrado conocemos dos vértices contiguos $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \;\to\; s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \;\to\; k = -24 \;\to$

  $\to\; s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \;\to\; r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \;\to\; k' = -7 \;\to$

  $\to\; r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \;\to\; t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \;\to\; k'' = -11 \;\to$

  $\to\; t: 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

$$dist\,(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l}4x - y - 11 = 17 \;\to \\ 4x - y - 11 = -17 \;\to\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0\end{array}\right.$$

Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

$C_1 = t_1 \cap s \left\{\begin{array}{l}4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \;\to\; x = 24 - 4y\end{array}\right. \;\to$

$\to\; 96 - 16y - y - 28 = 0 \;\to\; y = 4 \;\to\; x = 8 \;\to\; C_1(8, 4)$

$C_2 = t_2 \cap s \left\{\begin{array}{l}4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \;\to\; x = 24 - 4y\end{array}\right. \;\to$

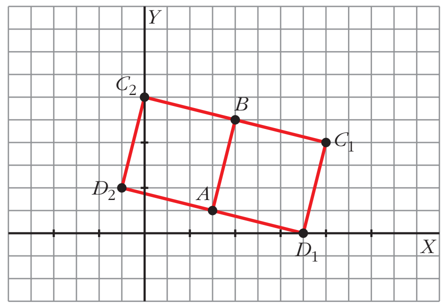
$\to\; 96 - 16y - y + 6 = 0 \;\to\; y = 6 \;\to\; x = 0 \;\to\; C_2(0, 6)$

$D_1 = t_1 \cap r \left\{\begin{array}{l}4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \;\to\; x = 7 - 4y\end{array}\right. \;\to$

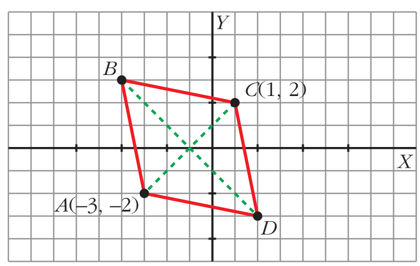
$\to\; 28 - 16y - y - 28 = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; x = 7 \;\to\; D_1(7, 0)$

$$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - \ \ y + 6 = 0 \\ \ \ x + 4y - 7 = 0 \ \rightarrow \ x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 28 - 16y - y + 6 = 0 \ \rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow \ x = -1 \ \rightarrow \ D_2(-1, 2)$$



91 **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y tiene por extremos los puntos *A*(–3, –2) y *C*(1, 2). Halla los vértices *B* y *D* y el perímetro del rombo.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \ \rightarrow \ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

  $$\textit{Perímetro} = 4 \ |\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  $$\left.\begin{array}{l} \text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1, 1) \ \rightarrow \ x - y + k = 0 \\ \text{Como, además, } A(-3, -2) \in \text{ recta } AC \end{array}\right\} \rightarrow$$

  $$\rightarrow \ -3 + 2 + k = 0 \ \rightarrow \ k = 1 \ \rightarrow \ AC: x - y + 1 = 0$$

  La recta s perpendicular a AC será:

  $$\left.\begin{array}{l} s: x + y + k' = 0 \\ \text{Como } M(-1, 0) \in s \end{array}\right\} \rightarrow \ -1 + k' = 0 \ \rightarrow \ k' = 1 \ \rightarrow \ s: x + y + 1 = 0$$

  Los puntos B y C serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \ \rightarrow \ x + y + 1 = 0 \ \rightarrow \ x = -1 - y$

$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow (x+3)^2+(y+2)^2 = 32$

$\rightarrow (2-y)^2+(y+2)^2 = 32 \rightarrow 4+y^2-4y+y^2+4+4y = 32 \rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$

$$\rightarrow y^2 = 12 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1-2\sqrt{3} \\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_2 = -1+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego, los vértices B y C son:

$$(-1-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad (-1+2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$$

92 **Determina la ecuación de una recta de pendiente –2 que forma con los ejes un triángulo de área igual a 81. ¿Cuántas soluciones hay?**

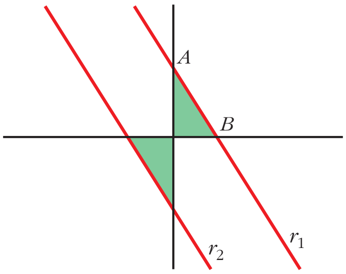
- Las rectas de pendiente –2 tienen por ecuación:

$$y = -2x + k$$

- Los puntos de corte con los ejes, A y B, son:

Si $x = 0 \rightarrow y = k \rightarrow A(0, k)$

Si $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{k}{2} \rightarrow B\left(\dfrac{k}{2}, 0\right)$



- Así:

Área $= \dfrac{k/2 \cdot k}{2} = 81 \rightarrow k^2 = 324 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = -18 \end{cases}$

Dos soluciones:

$$r_1: y = -2x + 18 \quad \text{y} \quad r_2: y = -2x - 18$$

93 **Conocemos dos vértices de un trapecio rectángulo $A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ y sabemos que uno de sus lados está sobre la recta $y = x + 1$. Calcula los otros dos vértices. (Hay dos soluciones).**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de r es $\vec{r} = (1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \rightarrow$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } A(1, 1) \in t \end{array}\right\} \to 4 + k = 0 \to k = -4 \to t\text{: } 4x - 4 = 0 \to t\text{: } x = 1$

  Así: $D_1 = t \cap r \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 2 \to D_1(1, 2)$

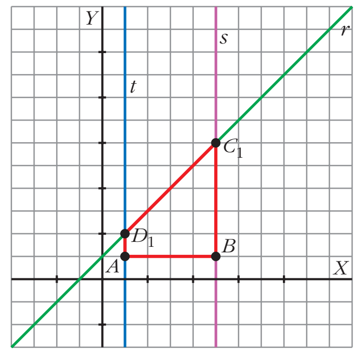
- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \to 4x + k = 0 \\ \text{Como } B(5, 1) \in s \end{array}\right\} \to$

  $\to 4 \cdot 5 + k = 0 \to k = -20 \to$

  $\to s\text{: } 4x - 20 = 0 \to s\text{: } x = 5$

  Así: $C_1 = s \cap r\text{: } \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \to$

  $\to y = 6 \to C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y C, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } A \in t \end{array}\right\} \to 1 = -1 + k \to k = 2 \to t\text{: } y = -x + 2$

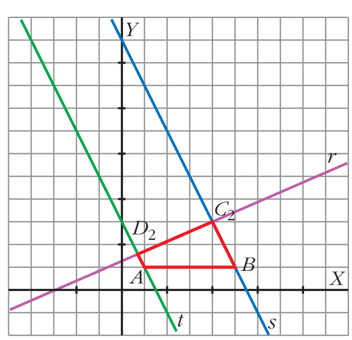
  Así: $D_2 = t \cap r\text{: } \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 2 = x + 1 \to 1 = 2x \to$

  $$\to x = \frac{1}{2} \to y = \frac{3}{2} \to D_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \to 1 = -5 + k \to k = 6 \to s\text{: } y = -x + 6$

  Así: $C_2 = s \cap r\text{: } \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 6 = x + 1 \to 5 = 2x \to$

  $$\to x = \frac{5}{2} \to y = \frac{7}{2} \to C_2\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$



Página 211

AUTOEVALUACIÓN

1. Se consideran los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ y $C(-4, k)$.

a) Calcula las coordenadas de un punto P que divida al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k para que el punto C sea el simétrico de B respecto de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \rightarrow (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \rightarrow \left.\begin{cases} 3x = 4 - x \rightarrow x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \rightarrow y = 3 \end{cases}\right\} P(1, 3)$$

b) A debe ser el punto medio de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \rightarrow 9 + k = 2 \rightarrow k = -7$$

2. Calcula la ecuación de estas rectas:

a) Pasa por $A(3, 2)$ y $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.

b) Pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente $m = \frac{-1}{3}$, en forma continua y explícita.

a) Vector dirección $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y-2) = 3 + 5y - 10 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \rightarrow$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \rightarrow y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3. **Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:**

a) Pasa por $P(2, -3)$ y es perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) Es paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ y su ordenada en el origen es 2.

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \;\rightarrow\; 2y + 6 = 5x - 10 \;\rightarrow\; 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

4. **Escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por (5, 1) y halla la recta de dicho haz que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x - 5) + b(y - 1) = 0$

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5} = \frac{y - 1}{0} \;\rightarrow\; y = 1$$

5. **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y de las rectas r y t, donde:**

$$r\!: 3x + 5y - 34 = 0 \qquad s\!: y = \frac{5}{3}x \qquad t\!: \begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$$

- Posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5, 3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3, 5) \end{array}\right\} \; r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

- Posición relativa de r y t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1, 0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5, 3) \end{array}\right\} \; r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

6. **Calcula k para que las rectas r y s formen un ángulo de 60°, siendo $r\!: y = 3$; $s\!: y = kx + 1$.**

La recta $r\!: y = 3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman r y s coincide con la pendiente de s, que es igual a k. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = k \\ tg\ 60° = \sqrt{3} \end{array}\right\} \; k = \sqrt{3}$$

7. **Considera los puntos $A(0, k)$ y $B(8, 5)$ y la recta $r: 3x + 4y + 1 = 0$. Determina el valor de k para que:**

a) La distancia entre A y B sea igual a 10.

b) La distancia entre A y r sea 1.

a) $dist(A, B) = \sqrt{8^2 + (5 - k)^2} = \sqrt{64 + 25 + k^2 - 10k} = 10 \rightarrow$

$$\rightarrow k^2 - 10k - 11 = 0 \quad \begin{cases} k = 11 \\ k = -1 \end{cases}$$

b) $dist(A, r) = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot k + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|4k + 1|}{5} = 1 \quad \begin{cases} 4k + 1 = 5 \rightarrow k = 1 \\ 4k + 1 = -5 \rightarrow k = -3/2 \end{cases}$