Ejercicios de Selectividad de Álgebra

1. **(3 puntos)** Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estantes se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es 35 euros. Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso, sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante, ni tampoco más de 70 de 3 estantes. en millones de pesetas, se ajustan a la función.

2. a) **(1.5 puntos)** Un autobús transporta 90 viajeros con 3 tarifas diferentes:
   1ª: Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0.70 euros.
   2ª: Estudiantes, con descuento del 50 %.
   3ª: Jubilados, con descuento del 80 %.
   Se sabe que el número de estudiantes es 10 veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46.76 euros. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar el número de viajeros, de cada tarifa, que va en el autobús.
   b) **(1.5 puntos)** Dada la matriz :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, determine, si existe, la matriz X que verifique $A\cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Una persona desea adelgazar. En la farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes condiciones:
   No debe tomar más de 150 g de la mezcla, ni menos de 50 g.
   La cantidad de A debe ser mayor o igual que la de B.
   No debe incluir más de 100 g del compuesto A.
   Se sabe que cada 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y cada 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas.
   a) **(2 puntos)** Formule matemáticamente el conjunto de restricciones, dibuje la región factible y determine sus vértices.
   b) **(1 punto)** ¿Cuántos gramos debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?

4. **(3 puntos)** Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.
   Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

5. Sea el sistema de inecuaciones siguiente:
   $$x + y \leq 120; \quad 3y \leq x; \quad x \leq 100; \quad y \geq 10.$$
   a) **(2 puntos)** Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
   b) **(1 punto)** ¿En qué punto de esa región, alcanza el máximo?

6. Sean las matrices
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$
   Calcule x, y, z, sabiendo que $A\cdot B = 2C - D$.

7. **(3 puntos)** Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, ésta debe doblar, al menos, la inversión en fondos B.
   La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2.7 % y la de los B ha sido del 6.3 %.
   Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtenga el máximo beneficio. Calcule este beneficio.

8. Sean las matrices :
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: *A·B*, *B·C*, *C·A*.

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial: *A·X + B = C*.

9. **(3 puntos)** Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.
Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1.75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.
Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

10. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Calcule los valores de *m* para que dicha matriz tenga inversa.
b) **(2 puntos)** Haciendo *m* =4, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. **(3 puntos)** Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches.
La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricar los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y reporta un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y reporta un beneficio de 15 euros.
Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

12. **(3 puntos)** Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál sería dicho ingreso?

13. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}$.

a) **(2 puntos)** Clasifique y resuelva el sistema.
b) **(1 punto)** Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.

14. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.
b) **(1 punto)** Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t \cdot A$.
c) **(1 punto)** Calcule la matriz *X* que verifica $A \cdot X + B = C$.

15. **(3 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 3x + 5y$, en el recinto del plano determinado por las inecuaciones:

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; 3x - 2y \geq 10, \;\; 2x + 3y \leq 24, \;\; x - 5y \geq -1.$$

16. **(3 puntos)** Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.

17. **(3 puntos)** De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Halle los restantes elementos de A sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. a) **(2 puntos)** Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.
Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

b) **(1 punto)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004}.

19. a) **(1 punto)** Los vértices de un polígono convexo son (1, 1), (3, 1/2), (8/3, 5/2), (7/3, 3) y (0, 5/3). Calcule el máximo de la función objetivo $F(x, y) = 3x - 2y + 4$ en la región delimitada por dicho polígono.
b) **(2 puntos)** Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 2y \geq 6 \quad ; \quad x - y \leq 1 \quad ; \quad y \leq 5 \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0$$

y determine sus vértices.

20. Sea el sistema de inecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & \leq & 6 \\ 3x - 2y & \leq & 13 \\ x + 3y & \geq & -3 \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$.

a) **(2 puntos)** Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.
b) **(1 punto)** Halle los puntos del recinto en los que la función $F(x, y) = x - 2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **(2 puntos)** Calcule la matriz P que verifica $B \cdot P - A = C^t$. (C^t, indica traspuesta de C)
b) **(0.5 puntos)** Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.
c) **(0.5 puntos)** Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

22. **(1 punto)** Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x - 3y \geq -13 \quad , \quad 2x + 3y \geq 17 \quad , \quad x + y \leq 11 \quad , \quad y \geq 0.$$

b) **(1 punto)** Determine los vértices de este recinto.
c) **(1 punto)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 5x + 6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

23. a) **(1.5 puntos)** Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema:
"Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero".

b) **(1.5 puntos)** Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ 2x - y + 2z & = & 3 \\ 3x + 2y - 3z & = & 3 \end{array} \right.$.