Capítulo 3. Cálculo Infinitesimal

3.1 Resumen Teórico de Cálculo Infinitesimal

3.1.1 Funciones. Definiciones y conceptos básicos

Una función real de variable real es una relación (aplicación) entre los números reales, de tal forma que a cada número real x se le hace corresponder un número real, que se denota por $f(x)$. Atendiendo a la expresión de la relación numérica establecida entre un número y su asociado, las funciones pueden ser polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

Al conjunto de valores donde la función está definida se denomina **dominio** de la función. Al conjunto de valores que toma la función, se denomina **recorrido**. La representación gráfica de los puntos del plano cuyas coordenadas son de la forma $(x, f(x))$, es decir los puntos que verifican $y = f(x)$, se denomina **gráfica** de la función f.

Por ejemplo, la gráfica de una función lineal (polinómica de grado uno), $f(x) = ax + b$ es una recta; la de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyo vértice verifica $x = -\dfrac{b}{2a}$.

3.1.2 Límite de una función en un punto. Asíntotas

De una manera intuitiva, el concepto de **límite de una función en un punto** podría definirse de la forma siguiente. A medida que los valores de la variable independiente "x" se "acercan" al valor de "a", los valores asociados "$f(x)$" se aproximan a "L", entonces se dice que el límite de la función f en a es L y se denota por $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Cuando los valores de x son elegidos mayores que a, al límite se le conoce por **límite lateral por la derecha** y se denota por $f(a^+)$ y cuando son elegidos menores que a se le conoce por **límite lateral por la izquierda** y se denota por $f(a^-)$. Por tanto, el límite de una función en un punto existirá si ambos límites laterales existen y son iguales.

Si la función no está acotada en $x = a$, se dice que el limite de f en $x = a$ es infinito y se denota por $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. En tal caso, se dice que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de f. Por otra parte, si para valores de x lo suficientemente elevados, los valores de $f(x)$ tienden (se aproximan) a un valor L, se dice que el límite de f cuando x tiende a infinito es L y se denota por $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. En tal caso, se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de f.

3.1.3 Continuidad

Una función f **es continua en** $x = a$ si existe el límite de $f(x)$ en $x = a$ y coincide con el valor que toma la función en a, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.

Por el contrario, si f no es continua en $x = a$ se dice que f es discontinua en a.

El concepto de continuidad puede ser extendido a un conjunto. Así, se dice que f es continua en un conjunto si es continua en cualquier elemento del conjunto. Por ejemplo, las funciones polinómicas son continuas en el conjunto de los números reales.

3.1.4 Derivabilidad. Comportamiento de una función en un punto

Una función f se dice que es **derivable en** $x = a$ si existe el siguiente límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Al valor del límite se denomina derivada de f en a y se representa por $f'(a)$. Análogamente, puede definirse el concepto de derivada por la derecha $f'(a^+)$ y por la izquierda $f'(a^-)$. Así, f será derivable en a si $f'(a^+) = f'(a^-)$ y recíprocamente.

En la práctica, un método para estudiar la derivabilidad de una función definida a trozos, consiste en derivar ésta en el interior de cada región y posteriormente comprobar que la función derivada obtenida coincide tanto por la izquierda como por la derecha de los puntos donde la función cambia su expresión.

En un sentido geométrico, el concepto de derivada de una función está relacionado con la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$. Concretamente, f es derivable en $x = a$ si existe tal recta tangente y $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente. Por tanto, **la recta tangente a la gráfica de f en** $x = a$ viene dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Si f es derivable en $x = a$, se tiene que:

1) Si f es **creciente (decreciente)** en $x = a$, entonces $f'(a) \geq 0$ ($f'(a) \leq 0$),
2) Si a es un **máximo o un mínimo** de f, entonces $f'(a) = 0$.
   Concretamente: si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces $x = a$ es un mínimo de f. Y si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $x = a$ es un máximo de f (suponiendo que $f''(a)$ existe).

Una función f se dice que es **convexa** en $x = a$ si en un entorno suyo la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ está por debajo de la gráfica de f. Si está por encima se dice que f

es **cóncava** en $x = a$. Y si la recta tangente atraviesa a la gráfica de f se dice que $x = a$ es un punto de inflexión. Se verifica que f es convexa en $x = a$ si $f''(a) > 0$; f es cóncava en $x = a$ si $f''(a) < 0$ y $x = a$ es un punto de inflexión si la segunda derivada de la función cambia de signo en $x = a$ con $f''(a) = 0$.

El concepto de derivabilidad puede ser extendido a un conjunto. Así se dice que f es derivable en un conjunto si es derivable en cualquier elemento del conjunto. Este hecho nos permite definir la función derivada f' de una función f.

Las derivadas (funciones derivadas) de algunas funciones elementales son:

$f(x)$	$k(cte)$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	a^x	$L(x)$	$sen(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$a^x L(a)$	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-sen(x)$

La linealidad de la derivación $(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))' = \lambda \cdot f'(x) + \mu \cdot g'(x)$, la derivada del producto de dos funciones $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$), la derivada del cociente de dos funciones $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ y la **regla de la cadena** (derivada de la composición de funciones $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$), nos permiten obtener la expresión de la derivada de cualquier función real de variable real.