Ejercicios de Análisis de Selectividad

1. Las ganancias de una empresa, en miles de euros, se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$.
   a). **(2 puntos)** Represente gráficamente la función $y=f(x)$, para $x \in (-\infty,+\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.
   b). **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?
   c). **(0.5 puntos)** A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$
   a). **(1 punto)** Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x=-2$.
   b). **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando $a=2$.
   c). **(1 punto)** Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando $a=2$.

3. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x<0 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
   a) **(1 punto)** Represéntela gráficamente.
   b) **(0.5 puntos)** Estudie su continuidad.
   c) **(1 punto)** Obtenga, si existe, la derivada de f en x = 1/2, x = -1/2 y x = 0.
   d) **(0.5 puntos)** Indique si posee máximos y mínimos relativos y en qué puntos.

4. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de *f(x)* millones de euros, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{5}{2x} & \text{si } x>5 \end{cases}.$$

   a). **(1 punto)** Represente la función *f(x)*.
   b). **(0.75 puntos)** Halle la inversión que produce máxima ganancia.
   c). **(0.75 puntos)** Halle el valor de la inversión que produce ganancia nula.
   d). **(0.5 puntos)** Razone lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinidamente.

5. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión:

$$h(t)=-5t^2+40t$$

   a). **(0.75 puntos)** ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
   b). **(1 punto)** Represente gráficamente la función $h(t)$.
   c). **(0.75 puntos)** ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?
   d). **(0.5 puntos)** ¿En qué instante llega al suelo?

6. **(3 puntos)** Determine los valores que han de tomar "a" y "b" para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4x+b & \text{si } x<1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   sea derivable.

7. La gráfica de la función derivada de una función $f(x)$ es una parábola de vértice $(1,-4)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$. A partir de la gráfica de f':
   a). **(1.75 puntos)** Estudie el crecimiento y el decrecimiento de f. ¿Para qué valores de x se alcanzan los máximos y mínimos relativos?

b). **(1.25 puntos)** Esboce la forma de la gráfica de una función cuya derivada sea la parábola dada.

8. El consumo de luz (en miles de pesetas) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión:

$$f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10 \qquad 0 \le t \le 12$$

a) **(1 punto)** ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?
b) **(1 punto)** ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?
c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

9. Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) **(1 punto)** $f(x) = \frac{\mathrm{L}x}{x^2}$ ($\mathrm{L}x$ indica logaritmo neperiano de x)

b) **(1 punto)** $g(x) = (1 - x^3)\cos x$

c) **(1 punto)** $h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$

10. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

a) **(2 puntos)** Dibuje su gráfica y, a la vista de ella, estudie monotonía y extremos.
b) **(1 punto)** Estudie su continuidad y derivabilidad.

11. Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "x" euros, su beneficio diario, en euros, será:

$$B(x) = -10x^2 + 100x - 210.$$

a) **(1 punto)** Represente la función precio-beneficio.
b) **(1 punto)** Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?
c) **(1 punto)** Determine a qué precios de la caja obtiene pérdidas el agricultor.

12. **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x) = x^3 + bx + c$, determine los valores de "b" y "c" sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (-1 , 3).

b). **(1.5 puntos)** Calcule "a" para que el valor mínimo de la función $g(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

13. **(1 punto)** Halle la función derivada de la función y simplifique el resultado: $f(x) = L\left(\frac{x}{x+1}\right)$

b). **(1 punto)** Obtenga las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

c). **(1 punto)** Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

14. Sea la función $f(x) = \frac{4x-1}{2x-2}$.

a) **(2 puntos)** Determine su dominio, los puntos de corte con los ejes, sus asíntotas, y represéntela gráficamente.
b) **(1 punto)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

15. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$.

a). **(1 punto)** Analice su continuidad y su derivabilidad.
b). **(1.5 puntos)** Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.
c). **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función.

16. Sea la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x.$

a). **(1 punto)** Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.

b). **(1 punto)** Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.
c). **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

17. Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :
a). **(0.75 puntos)** $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$.
b). **(0.75 puntos)** $g(x)=(x^2-1)\cdot L\,x$.
c). **(0.75 puntos)** $h(x)=2^{5x}$.
d). **(0.75 puntos)** $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$.

18. De una función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-9x+6$.
a). **(1.5 puntos)** Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.
b). **(1.5 puntos)** Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por (0, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

19. **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a $y=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=2$.
b). **(1.25 puntos)** ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=2x^2+3x+1$, la recta tangente es paralela a $y=3x-5$?
c). **(0.5 puntos)** Sea $g(x)=2x^2-8x+a$. Halle *a* para que el valor mínimo de *g* sea 3.

20. **(2 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+7 & \text{si} \quad x\le 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}.$$

b). **(1 punto)** Calcule la derivada de $g(x)=(x+1)\cdot e^{2x+1}$.

21. La temperatura *T*, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo *t*, en horas, por la expresión:

$$T(t)=40t-10t^2 \quad \text{con} \quad 0\le t\le 4.$$

a). **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *T* y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.
b). **(1.5 puntos)** ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

22. **(1.5 puntos)** Halle los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un extremo relativo en el punto $(-2,3)$.
b). **(1.5 puntos)** Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-4x+2$ en su punto de inflexión.

23. **(1.5 puntos)** Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule *a* y *b* para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).
b). **(1.5 puntos)** Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{2}{x}+L\,x$ en el punto de abscisa $x=1$.

24. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$.
a). **(1 punto)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b). **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c). **(1 punto)** Represéntela gráficamente.