Teoría de grafos

1. Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

2. Matriz de adyacencia - El grafo está representado por una matriz cuadrada M_{nxn} de tamaño n^2, donde n es el número de vértices. Si hay una arista entre un vértice **x** y un vértice **y**, entonces el elemento m_{xy} es 1, de lo contrario, es 0. La matriz de adyacencia para el grafo no dirigido siguiente viene dada por:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

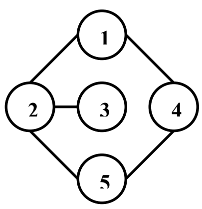
3. En los grafos no dirigidos, no tienen flechas entre nodos, la matriz de adyacencia es simétrica. Construcción de la matriz a partir de un grafo.
   a. Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
   b. Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.
   c. Finalmente, se obtiene una matriz que representa el número de aristas (relaciones) entre cada par de nodos (elementos).
   d. Existe una matriz de adyacencia única para cada grafo.

4. Un grafo es conexo si cada par de vértices está conectado por un camino; es decir, si para cualquier par de vértices (a, b), existe al menos un camino posible desde a hacia b.

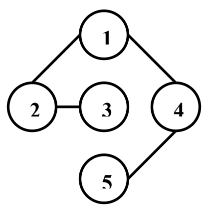
5. Un grafo es no conexo , si hay un par de vértices sin conectar.

6. Ejemplo: Escribe la matriz de adyacencia asociada a los siguientes grafos:

Grafo conexo



Grafo no conexo



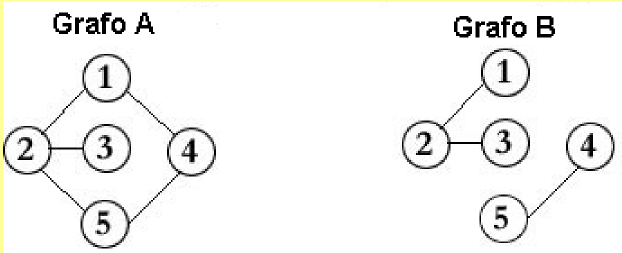
$$\text{Grafo conexo}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Grafo no conexo}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Algunos ejemplos de ejercicios de matrices como expresiones de tablas y grafos:

Ejemplo 1.

Sean los grafos siguientes:



a) Escriba la matriz de adyacencia asociada a los grafos *A* y *B* de la figura anterior.

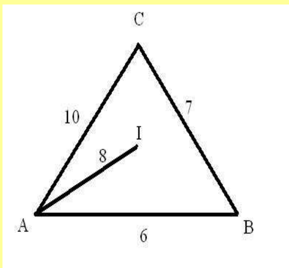
b) Si las matrices *C* y *D* unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, represente los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Realice la siguiente operación matricial: $D \cdot C - C \cdot D$

Ejemplo 2.

En un instituto I hay alumnos de tres pueblos, A, B y C. La distancia entre A y B es 6 km, la de B a C es 7 km, la de A a C es 10 km y la de A a I es 8 km. Una empresa de transporte escolar hace dos rutas: la ruta 1 parte de B y recorre sucesivamente C, A e I; la ruta 2 parte de C y recorre sucesivamente B, A e I.



1. Determine la matriz *M*, 2x3, que expresa los kilómetros que recorren los alumnos de cada pueblo por cada ruta.
2. El número de alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo es:
   Pueblo A: 10 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2. Pueblo B: 15 alumnos la ruta 1 y 8 alumnos la ruta 2.
   Pueblo C: 5 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.

Determine la matriz *N*, 3x2, que indique los alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo.

3. **S**i la empresa cobra 12 céntimos por Km a cada persona, determine la matriz *P* = 0.12 *M*· *N*, e interprete cada uno de sus elementos.

$$M = \begin{array}{c} \\ Ruta1 \\ Ruta2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ AlumnosA \\ AlumnosB \\ AlumnosC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Ruta1 & Ruta2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 3.

En una empresa de fabricación de móviles hay 3 categorías de empleados: A, B y C y se fabrican dos tipos de móviles: M y P.

Diariamente cada empleado de la categoría A fabrica 4 móviles del tipo M y 3 del tipo P, mientras que cada uno de la categoría B fabrica 5 móviles del tipo M y 4 del tipo P, y cada uno de la categoría C fabrica 6 móviles del tipo M y 5 móviles del tipo P. Para fabricar cada móvil del tipo M se necesitan dos chips y 4 conexiones y para fabricar cada móvil del tipo P 4 chips y 6 conexiones.

a) Escriba una matriz *X*, 3x2, que describa el número de móviles de cada tipo y otra matriz *Y*, de orden 2, que exprese el número de chips y conexiones de cada tipo de móvil.

b) Realice el producto de matrices $X \cdot Y$ e indique qué expresa dicho producto.

Ejemplo 4.

Un proveedor que suministra materia prima a 3 fábricas, F, G y H, transporta una parte de sus envíos a cada fábrica por carretera y la otra parte por tren, según se indica en la matriz *T*, cuyos elementos son las toneladas de materia prima que recibe cada fábrica por cada vía de transporte.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F & G & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 & 150 \\ 400 & 250 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ carretera \\ tren \end{array}$$

Los precios del transporte de cada tonelada de materia prima son 200 euros por carretera y 180 euros por tren, como indica la matriz $C = (200, 180)$.

Explique qué operación debe efectuarse con estas matrices para determinar una nueva matriz cuyos elementos sean los costes de llevar este material a la fábrica.

Ejemplo 5.

Una persona tiene que comprar 2 kg de manzanas, 1 kg de ciruelas y 1.5 kg de plátanos y otra necesita 0.5 kg de manzanas, 2.5 de ciruelas y 3 de plátanos. En la frutería A, los precios de las manzanas son 1.8 euros/kg, los de las ciruelas 2.1 y los de los plátanos 1.9 y en la frutería B son 1.7, 2.3 y 1.75 respectivamente.

Se escriben las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 2.5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.7 \\ 2.1 & 2.3 \\ 1.9 & 1.75 \end{pmatrix}$$

a) Determine $M \cdot N$ e indique qué representa cada uno de los elementos de la matriz producto.

b) ¿En qué frutería le conviene a cada persona hacer la compra?

Ejemplo 6.

Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, S y H, ha anotado en la matriz *A* los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y , en la matriz *B*, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de esos productos

Matriz *A*: $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} leche & queso & nata \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}$$

matriz *B* : $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} leche & queso & nata \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.20 & 4 & 1 \\ 0.25 & 3.60 & 1.20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}$$

Efectúe el producto $A \cdot B^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante.

6º Modelo de prueba:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

a) **(1.25 puntos)** Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.
b) **(1.25 puntos)** Para a = 1 y b = 0, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

EJERCICIO 2

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Halle el dominio de f.
b) **(1 punto)** Estudie la derivabilidad de f en x = 2.
c) **(1 punto)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

EJERCICIO 3

a) **(1.25 puntos)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A)$=0.5, que $P(B)$=0.4 y que $P(A \cup B) = 0.8$, determine $P(A/B)$.
b) **(1.25 puntos)** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0.3$, que $P(D) = 0.8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

EJERCICIO 4

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.
a) **(1.25 puntos)** Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8.1 días.
b) **(1.25 puntos)** ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92%?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la regióndeterminada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6;\ \ 4x + y \leq 10;\ \ -x + y \leq 3;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

y determine sus vértices.
b) **(1 punto)** Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2

Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$.
b) **(1 punto)** Para $a = -1$ y $b = 1$, estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y en $x = 1$.

EJERCICIO 3

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.
a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.
b) **(1.5 puntos)** Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

EJERCICIO 4

Sea la población $\{1,2,3,4\}$.
a) **(1 punto)** Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.
b) **(1.5 puntos)** Calcule la varianza de las medias muestrales.