Resuelve

Página 327

Obtención de la primitiva de algunas funciones

■ NÚMEROS Y POTENCIAS SENCILLAS

a) $\int \mathbf{1}\, \boldsymbol{dx} = x$

b) $\int \mathbf{2}\, \boldsymbol{dx} = 2x$

c) $\int \sqrt{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{dx} = \sqrt{2}x$

d) $\int \mathbf{2}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = x^2$

e) $\int \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = \frac{x^2}{2}$

f) $\int \mathbf{3}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = \frac{3x^2}{2}$

g) $\int \mathbf{7}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx} = \frac{7x^2}{2}$

h) $\int \boldsymbol{x}^2\, \boldsymbol{dx} = \frac{x^3}{3}$

i) $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x}^2\, \boldsymbol{dx} = \frac{x^3}{6}$

■ POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

a) $\int (-1)\boldsymbol{x}^{-2}\, \boldsymbol{dx} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

b) $\int \boldsymbol{x}^{-2}\, \boldsymbol{dx} = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

c) $\int \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}^2}\, \boldsymbol{dx} = \frac{-5}{x}$

d) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^3}\, \boldsymbol{dx} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

e) $\int \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^3}\, \boldsymbol{dx} = 2\int \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{-2}{2x^2} = \frac{-1}{x^2}$

f) $\int \frac{\mathbf{5}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^3}\, \boldsymbol{dx} = \frac{-5}{2(x-3)^2}$

■ LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

a) $\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x}^{1/2}\, \boldsymbol{dx} = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

b) $\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \sqrt{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = \int \frac{3}{2} x^{1/2}\, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

c) $\int 7\sqrt{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = 7\int \sqrt{x}\, dx = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

d) $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x}^{-1/2}\, \boldsymbol{dx} = x^{1/2} = x$

e) $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}\, \boldsymbol{dx} = \sqrt{x}$

f) $\int 5\sqrt{\boldsymbol{x}^3}\, \boldsymbol{dx} = 5\int x^{3/2}\, dx = 5\frac{x^{5/2}}{5/2} = 2\sqrt{x^5}$

■ ¿RECUERDAS QUE $D(\ln x) = \frac{1}{x}$?

a) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = \ln|x|$

b) $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x}\, dx = \frac{1}{5}\ln|5x|$

c) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{5}}\, \boldsymbol{dx} = \ln|x+5|$

d) $\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{6}}\, \boldsymbol{dx} = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+6}\, dx = \frac{3}{2}\ln|2x+6|$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) $\int \boldsymbol{cos\ x\ dx} = sen\ x$

b) $\int \boldsymbol{2cos\ x\ dx} = 2sen\ x$

c) $\int \boldsymbol{cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx} = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\int \boldsymbol{cos\ 2x\ dx} = \frac{1}{2}\int 2cos\ 2x\ dx = \frac{1}{2}\ sen\ 2x$

e) $\int \boldsymbol{(-sen\ x)\ dx} = cos\ x$

f) $\int \boldsymbol{sen\ x\ dx} = -cos\ x$

g) $\int \boldsymbol{sen\ (x - \pi)\ dx} = -cos\ (x - \pi)$

h) $\int \boldsymbol{sen\ 2x\ dx} = \frac{1}{2}\int 2sen\ 2x\ dx = \frac{-1}{2}\ cos\ 2x$

i) $\int \boldsymbol{(1 + tg^2\ 2x)\ dx} = \frac{1}{2}\int 2\,(1 + tg^2\ 2x)\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ 2x$

j) $\int \boldsymbol{tg^2\ 2x\ dx} = \int (1 + tg^2\ 2x - 1)\ dx = \int (1 + tg^2\ 2x)\ dx - \int 1\ dx = \frac{1}{2}\ tg\ 2x - x$

ALGUNAS EXPONENCIALES

a) $\int \boldsymbol{e^{x-1}\ dx} = e^{x-1}$

b) $\int \boldsymbol{e^{2x+1}\ dx} = \frac{1}{2}\ e^{2x+1}$

1 Primitivas. Reglas básicas para su cálculo

Página 329

1 Halla:

a) $\int x^4\,dx$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3)\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

f) $\int \frac{3}{x^2}$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\,dx$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\,dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx$

j) $\int (\sqrt{5}x - 3)^4\,dx$

k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\,dx$

l) $\int \frac{5x^3 + 6x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3}}{x}\,dx$

m) $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5x}{x+2}\,dx$

n) $\int \frac{5dx}{6-4x}$

ñ) $\int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x-2}\,dx$

o) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx$

a) $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + k$

b) $\int (5x^3 - 8x^2 + 2x - 3)\,dx = 5\int x^3 dx - 8\int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 3\int dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + x^2 - 3x + k$

c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \frac{x^{(1/3)+1}}{\frac{1}{3}+1} + k = \frac{3}{4}x^{4/3} = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + k$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{-(1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 2x^{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/5}\,dx = \frac{x^{-(2/5)+1}}{-\frac{2}{5}+1} + k = \frac{5}{3}x^{3/5} + k = \frac{5\sqrt[5]{x^3}}{3} + k$

f) $\int \frac{3}{x^2}\,dx = 3\int x^{-2}\,dx = 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + k = -\frac{3}{x} + k$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\,dx = \frac{5}{6}\int x^{-4}\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + k = -\frac{5}{18x^3} + k$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\,dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\,dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int x^{-1/6}\,dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x^{-(1/6)+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6\sqrt[3]{2}}{5\sqrt{3}}\sqrt[6]{x^5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\,dx + \int \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$$

j) $\int (\sqrt{5}x-3)^4\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{5}\,x-3)^{4+1}}{4+1}+k=\frac{(\sqrt{5}\,x-3)^5}{5\sqrt{5}}+k$

k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\,dx = \int (7x-6)^{2/3}\,dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{(7x-6)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1}+k=\frac{3}{35}(7x-6)^{5/3}+k=\frac{3\,(7x-6)\,\sqrt[3]{(7x-6)^2}}{35}+k$

l) $\int \frac{5x^3+6x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{x}\,dx = \int\left(5x^2+6x-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)dx=\frac{5x^3}{3}+3x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{3}\,ln\,|x|+k$

m) $\int \frac{2x^4-6x^3+5x}{x+2}\,dx = \int\left(2x^3-10x^2+20x-35+\frac{70}{x+2}\right)dx=\frac{x^4}{2}-\frac{10x^3}{3}+10x^2-35x+70\,ln\,|x+2|+k$

n) $\int \frac{5}{6-4x}\,dx = -\frac{5}{4}\,ln\,|6-4x|+k$

ñ) $\int \frac{2x^4+6x-3}{x-2}\,dx = \int\left(2x^3+4x^2+8x+22+\frac{41}{x-2}\right)dx=\frac{x^4}{2}+\frac{4x^3}{3}+4x^2+22x+41\,ln\,|x-2|+k$

o) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{7x^4}{x^2}\right)dx-\int\left(\frac{5x^2}{x^2}\right)dx+\int\left(\frac{3x}{x^2}\right)dx-\int\left(\frac{4}{x^2}\right)dx=$

$=\int 7x^2\,dx-\int 5\,dx+\int\frac{3}{x}\,dx-\int\frac{4}{x^2}\,dx=\frac{7x^3}{3}-5x+3\,ln\,|x|+\frac{4}{x}+k$

Página 330

2 a) $\int (3x-5\,tg\,x)\,dx$ b) $\int (5\cos x+3^x)\,dx$ c) $\int (3\,tg\,x-5\cos x)\,dx$ d) $\int (10^x-5^x)\,dx$

a) $\int (3x-5\,tg\,x)\,dx = 3\int x\,dx-5\int tg\,x\,dx=\frac{3x^2}{2}-5\,(-ln\,|cos\,x|)+k=\frac{3x^2}{2}+5\,ln\,|cos\,x|+k$

b) $\int (5\,cos\,x+3^x)\,dx = 5\int cos\,x\,dx+\int 3^x\,dx=5sen\,x+\frac{3^x}{ln\,3}+k$

c) $\int (3\,tg\,x-5\,cos\,x)\,dx = 3\int tg\,x\,dx-5\int cos\,x\,dx=3\,(-ln\,|cos\,x|)-5sen\,x+k=-3ln\,|\,cos\,x\,|-5sen\,x+k$

d) $\int (10^x-5^x)\,dx = \frac{10^x}{ln\,10}-\frac{5^x}{ln\,5}+k$

3 a) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\,arctg\,x+k$

b) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = ln\,|x^2+1|+k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)dx=x-2arctg\,x+k$

d) $\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1}\,dx = \int\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx=\int\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=x+ln\,|x^2+1|+k$

Página 331

4 a) $\int sen^2\, x\, dx$ b) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ c) $\int \frac{dx}{1+8x^2}$

d) $\int \frac{dx}{25+9x^2}$ e) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$ i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

j) $\int e^{5x-2}\, dx$

a) Restando las ecuaciones del ejercicio resuelto 2.a) de esta página, obtenemos que $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$.

$$\int sen^2\, x\, dx = \int \frac{1-cos\, 2x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \frac{1}{2}\int cos\, 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{sen\, 2x}{2} + k = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

b) $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\, arc\ tg\, 3x + k$

c) $\int \frac{dx}{1+8x^2} = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{8}\, x)^2} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, arc\ tg\, \sqrt{8}x + k$

d) $\int \frac{dx}{25+9x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\frac{9}{25}x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}}arc\ tg\,\frac{3x}{5} + k = \frac{1}{15}arc\ tg\,\frac{3x}{5} + k$

e) $\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{2}{3}x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\, arc\ tg\,\sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k = \frac{\sqrt{6}}{6}arc\ tg\,\sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\, arc\ sen\, 3x + k$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{8}\, x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\, arc\ sen\, \sqrt{8}\, x + k$

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}x\right)^2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}}\, arc\ sen\,\frac{3x}{5} + k = \frac{1}{3}\, arc\ sen\,\frac{3x}{5} + k$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\, arc\ sen\,\sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\ sen\,\sqrt{\frac{2}{3}}\, x + k$

j) $\int e^{5x-2}\, dx = \frac{1}{5}\, e^{5x-2} + k$

2 Expresión compuesta de integrales inmediatas

Página 333

1 a) $\int cos^5 x\,(-sen\,x)\,dx$ b) $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\,(-sen\,x)\,dx$ c) $\int e^{cos\,x}\,sen\,x\,dx$

d) $\int e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\,dx$ e) $\int tg\,x^2 \cdot 2x\,dx$ f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$ h) $\int ln\,(x^2+1)\,2x\,dx$ i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2}\,(4x^3+5)\,dx$

a) $\int cos^5 x\,(-sen\,x)\,dx = \int (cos\,x)^5\,(-sen\,x)\,dx = \frac{cos^6 x}{6} + k$, ya que $D[cos\,x] = -sen\,x$.

b) $\int \sqrt[3]{cos^2 x}\,(-sen\,x)\,dx = \int (cos\,x)^{2/3}\,(-sen\,x)\,dx = \frac{(cos\,x)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{cos^5 x}$, porque $D[cos\,x] = -sen\,x$.

c) $\int e^{cos\,x}\,sen\,x\,dx = -\int e^{cos\,x}\,(-sen\,x)\,dx = -e^{cos\,x} + k$, puesto que $D[cos\,x] = -sen\,x$.

d) $\int e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\,dx = e^{x^3+x^2} + k$, ya que $D[x^3+x^2] = 3x^2+2x$.

e) $\int tg\,x^2 \cdot 2x\,dx = \int \frac{sen\,x^2}{cos\,x^2} \cdot 2x\,dx = -\int \frac{-sen\,x^2 \cdot 2x}{cos\,x^2}\,dx = -ln\,|cos\,x^2| + k$, porque $D[cos^2 x] = -sen\,x^2 \cdot 2x$.

f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = arc\,tg\,x^3 + k$, puesto que $D[x^3] = 3x^2$.

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx = \int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,dx = arc\,sen\,e^{-x}$, ya que $D[e^{-x}] = -e^{-x}$.

h) $\int ln\,(x^2+1)\,2x\,dx = (x^2+1)\,ln\,(x^2+1) - (x^2+1) + k$, porque $D[x^2+1] = 2x$.

i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2}\,(4x^3+5)\,dx = \int (x^4+5x)^{2/3}\,(4x^3+5)\,dx = \frac{(x^4+5x)^{(2/3)+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^4+5x)^5} + k$,

ya que $D[x^4+5x] = 4x^3+5$.

Página 334

2 a) $\int \sqrt{x^3-3x^2+5} \cdot (x^2-2x)\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{cos^3 x\,dx}{sen^4 x}$

d) $\int (x^2+1)\,ln\,(x^3+3x)\,dx$ e) $\int \frac{sen\,x\,cos\,x}{1+sen^4 x}\,dx$ f) $\int e^{x+\sqrt{x}}\left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x}\right)dx$

a) Llamamos $u = x^3 - 3x^2 + 5 \to du = 3(x^2-2x)\,dx \to \frac{du}{3} = (x^2-2x)\,dx$

$$\int \sqrt{x^3-3x^2+5}\,(x^2-2x)\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{6}u^{3/2} + k = \frac{2}{9}(x^3-3x^2+5)^{3/2} + k =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-3x^2+5)^3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^{\sqrt{x}})^2}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = I$

Hacemos $u = e^{\sqrt{x}} \to du = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \to 2\,du = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2\,du = 2arc\ sen\ u + k = 2arc\ sen\ e^{\sqrt{x}} + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^3 x\,dx}{sen^4 x} = \int \frac{cos^2 x \cdot cos\ x}{sen^4 x}\,dx = \int \frac{(1-sen^2 x)\cdot cos\ x}{sen^4 x}\,dx = I$

Llamamos $u = sen\ x \to du = cos\ x\,dx$

$$I = \int \frac{1-u^2}{u^4}\,du = \int \frac{du}{u^4} - \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-4}\,du - \int u^{-2}\,du = -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + k = -\frac{1}{3sen^3 x} + \frac{1}{sen\ x} + k$$

d) $\displaystyle\int (x^2+1)\,ln\,(x^3+3x)\,dx = I$

Si $u = x^3 + 3x \to du = (3x^2+3)\,dx \to \dfrac{du}{3} = (x^2+1)\,dx$

$$I = \int ln\ u\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\,u\cdot ln\ u - \frac{1}{3}\,u + k = \frac{1}{3}(x^3+3x)\,ln\,(x^3+3x) - \frac{1}{3}(x^3+3x) + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{sen\ x\cdot cos\ x}{1+sen^4 x}\,dx = \int \frac{sen\ x\cdot cos\ x}{1+(sen^2 x)^2}\,dx = I$

Llamamos $u = sen^2 x \to du = 2sen\ x\cdot cos\ x\,dx \to \dfrac{du}{2} = sen\ x\cdot cos\ x\,dx$

$$I = \int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\,arc\ tg\ u + k = \frac{1}{2}\,arc\ tg\,(sen^2 x) + k$$

f) $\displaystyle\int e^{x+\sqrt{x}}\left(\frac{6x+3\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int e^{x+\sqrt{x}}\left(6+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = I$

Como $D[x+\sqrt{x}] = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, hacemos $u = x + \sqrt{x} \to du = \left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx \to 6\,du = \left(6+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$I = \int e^u\,6\,du = 6e^u + k = 6e^{x+\sqrt{x}} + k$$

Página 335

3 $\displaystyle\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx$

Para eliminar la raíz hacemos $x - 4 = t^2 \to dx = 2t\,dt \quad (x = t^2 + 4)$

$$\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx = \int \sqrt{t^2}\,(t^2+4+5)\,2t\,dt = 2\int t^2\,(t^2+9)\,dt = 2\int (t^4+9t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + 6t^3 + k = \frac{2\sqrt{(x-4)^5}}{5} + 6\sqrt{(x-4)^3} + k$$

4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$

Para eliminar las raíces hacemos $x-1=t^6 \ \to\ dx=6t^5\,dt \quad (x=1+t^6)$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx=\int \frac{\sqrt[3]{t^6}+t^6}{\sqrt{(t^6)^3}}\,6t^5\,dt=6\int \frac{t^2+t^6}{t^9}\,t^5\,dt=6\int\left(\frac{1}{t^2}+t^2\right)dt=$$

$$=6\int (t^{-2}+t^2)\,dt=-\frac{6}{t}+2t^3+k=-\frac{6}{\sqrt[6]{x-1}}+2\sqrt[6]{(x-1)^3}+k$$

5 $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Hacemos el cambio $x=2sen\,\alpha \ \to\ dx=2cos\,\alpha\,d\alpha$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(2sen\,\alpha)^2}\,2cos\,\alpha\,d\alpha=\int\sqrt{4-4sen^2\,\alpha}\,2cos\,\alpha\,d\alpha=$$

$$=\int 2\sqrt{1-sen^2\,\alpha}\,2cos\,\alpha\,d\alpha=4\int cos^2\,\alpha\,d\alpha=4\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen\,2\alpha}{4}\right)+k=$$

$$=2arc\,sen\left(\frac{x}{2}\right)+sen\left[2arc\,sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]+k$$

3 Integración "por partes"

Página 336

1 Calcula:

$$\int x \, sen \, x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot sen \, x \, dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = x, \; du = dx \\ dv = sen \, x \, dx, \; v = -cos \, x \end{array}\right\} I = -x \cdot cos \, x + \int cos \, x \, dx = -x \cdot cos \, x + sen \, x + k$$

2 Calcula:

$$\int x \, arc \, tg \, x \, dx$$

Llamamos $I = \int x \cdot arc \, tg \, x \, dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = arc \, tg \, x, \; du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x \, dx, \; v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2} arc \, tg \, x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} arc \, tg \, x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arc \, tg \, x - \frac{1}{2}[x - arc \, tg \, x] + k = \frac{x^2}{2} arc \, tg \, x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arc \, tg \, x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} arc \, tg \, x - \frac{1}{2}x + k$$

Página 337

3 Calcula:

$$\int x^4 e^x \, dx$$

Resolvámosa integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^4 \;\to\; du = 4x^3 \, dx \\ dv = e^x \, dx \;\to\; v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = x^4 \cdot e^x - \int e^x \cdot 4x^3 \, dx = x^4 \cdot e^x - 4\int x^3 \cdot e^x \, dx$$

$$I_1 = \int x^3 \cdot e^x \, dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x$$

(Visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 337)

$$I = x^4 \cdot e^x - 4[x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x] + k = x^4 \cdot e^x - 4x^3 \cdot e^x + 12x^2 \cdot e^x - 24x \cdot e^x + 24e^x + k$$

4 **Calcula:**

$$\int sen^2\, x\, dx$$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = sen\, x \ \rightarrow \ du = cos\, x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \ \rightarrow \ v = -cos\, x \end{array}\right\}$$

$$I = -sen\, x \cdot cos\, x - \int (-cos\, x)\, cos\, x\, dx = -sen\, x \cdot cos\, x + \int cos^2\, x\, dx =$$

$$= -sen\, x \cdot cos\, x + \int (1 - sen^2\, x)\, dx = -sen\, x \cdot cos\, x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx =$$

$$= -sen\, x \cdot cos\, x + x - \int sen^2\, x\, dx$$

Es decir:

$$I = -sen\, x \cdot cos\, x + x - I \ \rightarrow \ 2I = -sen\, x \cdot cos\, x + x \ \rightarrow \ I = \frac{x - sen\, x \cdot cos\, x}{2} + k$$

4 Integración de funciones racionales

Página 338

1 Calcula:

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx = \int\left(3x+7+\frac{29}{x-4}\right)dx = \frac{3x^2}{2}+7x+29\ ln\,|x-4|+k$$

2 Calcula:

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx$$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}+\frac{17/4}{2x+1}\right)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{13}{4}x-\frac{17}{8}\ ln\,|2x+1|+k =$$

$$= \frac{3x^2}{4}-\frac{13}{4}x-\frac{17}{8}\ ln\,|2x+1|+k$$

Página 341

3 Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{5x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$5x-3 = A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{lllll} x=0 & \to & -3=-A & \to & A=3 \\ x=1 & \to & 2=2B & \to & B=1 \\ x=-1 & \to & -8=2C & \to & C=-4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx = \int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)dx = 3\ ln\,|x|+ln\,|x-1|-4\ ln\,|x-1|+k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

$$x^2-2x+6 = A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 & \to & 5=C \\ x=0 & \to & 6=A-B+C \\ x=2 & \to & 6=A+B+C \end{array}\right\}\begin{array}{l} \to A=1 \\ \to B=0 \\ \to C=5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^3}\right)dx = ln\,|x-1|-\frac{5}{2(x-1)^2}+k$$

4 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx$

a) $x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x-2)(x+2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$$

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)}=\frac{Ax(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$x^3+22x^2-12x+8=Ax(x-2)(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{llll}
x=0 & \to\ 8=-4B & \to\ B=-2 & \\
x=2 & \to\ 80=16C & \to\ C=5 & \\
x=-2 & \to\ 112=-16D & \to\ D=-7 & \\
x=1 & \to\ 19=-3A-3B+3C-D & \to\ -3A=-9 & \to\ A=3
\end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x-2}-\frac{7}{x+2}\right)dx=$$

$$=3\,ln\,|x|+\frac{2}{x}+5\,ln\,|x-2|-7\,ln\,|x+2|+k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}=\frac{x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx=\int\frac{1}{x+2}\,dx=ln\,|x+2|+k$$

Página 342

5 a) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+3}$ b) $\displaystyle\int\frac{dx}{9x^2+3}$ c) $\displaystyle\int\frac{dx}{6x^2+3}$ d) $\displaystyle\int\frac{dx}{7x^2+11}$

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{3}\,arc\ tg\ x+k$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{9x^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{3x^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(\sqrt{3}\,x)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\ tg\ \sqrt{3}\,x+k=\frac{1}{3\sqrt{3}}\,arc\ tg\ \sqrt{3}\,x+k$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{6x^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{2x^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(\sqrt{2}\,x)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\ tg\ \sqrt{2}\,x+k=\frac{1}{3\sqrt{2}}\,arc\ tg\ \sqrt{2}\,x+k$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{7x^2+11}=\frac{1}{11}\int\frac{dx}{\frac{7}{11}x^2+1}=\frac{1}{11}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{7}{11}}\,x\right)^2+1}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{11}}}\,arc\ tg\sqrt{\frac{7}{11}}\,x+k=$

$$=\frac{1}{\sqrt{77}}\,arc\ tg\sqrt{\frac{7}{11}}\,x+k$$

6 a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+8}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+26}$

a) Como el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no tiene raíces reales,

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = arc\ tg\ (x-2) + k$$

b) Al igual que en el apartado anterior, el polinomio $x^2 - 4x + 10$ no tiene raíces reales,

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+10} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+6} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+6} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k = \frac{\sqrt{6}}{6}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

c) Como el polinomio $x^2 + 3x + 8$ no tiene raíces,

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+8} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+8} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}} = \frac{1}{\frac{23}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{23}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{23}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{23}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{23}}}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right) + k = \frac{2\sqrt{23}}{23}\ arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{23}}\right) + k$$

d) Una vez comprobado que el polinomio $x^2 - 6x + 13$ no tiene raíces,

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+26} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2\cdot 3x+9+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\ arc\ tg\left(\frac{x-3}{2}\right) + k = \frac{1}{4}\ arc\ tg\left(\frac{x-3}{2}\right) + k$$

Página 343

7 a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-2)}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2-4x+10) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+\frac{1}{2}\cdot 4-11}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}\,dx - 9\int \frac{1}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}I_1 - 9I_2$

$$I_1 = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}\,dx = ln\ (x^2-4x+10) + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+6}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+6}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k = \frac{\sqrt{6}}{6}\ arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+10) - \frac{3\sqrt{6}}{2}\,arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

c) $$\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}\,dx = \int \frac{\frac{7}{2}(2x-4)+\frac{7}{2}\cdot 4-11}{x^2-4x+10}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+10}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+10}\,dx =$$

$$= \frac{7}{2}\ln(x^2-4x+10) + \frac{\sqrt{6}}{2}\,arc\ tg\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right) + k$$

(Las dos últimas integrales están resueltas en los apartados anteriores).

d) $$\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{5}{2}\cdot 3+12}{x^2+3x+10}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+10}\,dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+10} = \frac{5}{2}I_1 + \frac{9}{2}I_2$$

$$I_1 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+10}\,dx = \ln(x^2+3x+10) + k$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+10} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}} = \frac{1}{\frac{31}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{31}}{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{31}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{31}{4}}\,\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{31}}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{31}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+10) + \frac{9}{\sqrt{31}}\,arc\ tg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{31}}\right) + k$$

Página 344

8 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx$.

Comenzamos efectuando la división:

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x} = x + \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}$$

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx = \int\left(x + \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx$$

Descomponemos el cociente en fracciones simples:

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

$$\frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+3} \rightarrow A=1,\ M=-1,\ N=1$$

$$\frac{3x+3}{x^3+2x^2+3x} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+2x+3}$$

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+2x+3}\,dx = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x}\,dx = ln\,|x| + k$$

$$I_3 = \int \frac{-x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{2}(2x+2) - \frac{-1}{2}\cdot 2 + 1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

Calculamos esta segunda integral:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

De donde $I_3 = \frac{-1}{2}\,ln\,(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\,arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$

Finalmente, obtenemos el resultado:

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx = \frac{x^2}{2} + ln\,|x| - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\,arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 345

1. Integrales inmediatas de funciones compuestas

Hazlo tú. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{sen\ 3x + cos\ 3x}{sen\ 3x - cos\ 3x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1-cos^2 x}{sen\ 2x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

a) Observamos que $D[sen\ 3x - cos\ 3x] = 3(cos\ 3x + sen\ 3x)$. Por tanto:

$$\int \frac{sen\ 3x + cos\ 3x}{sen\ 3x - cos\ 3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(cos\ 3x + sen\ 3x)}{sen\ 3x - cos\ 3x}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|sen\ 3x - cos\ 3x| + k$$

b) $$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{3}{2}\int (x^2-2)^{-1/2}\,2x\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{(x^2-2)^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + k = 3\sqrt{x^2-2} + k$$

c) $$\int \frac{1-cos^2 x}{sen\ 2x}\,dx = \int \frac{sen^2 x}{2sen\ x\ cos\ x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-sen\ x}{cos\ x}\,dx = -\frac{1}{2}\,ln\,|cos\ x| + k$$

d) $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - arc\ tg\ x + k$$

Página 346

2. Método de sustitución

Hazlo tú. Aplicar el método de sustitución para resolver estas integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln\ x}}$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) Hacemos el cambio $1 - ln\ x = t^2 \;\to\; -\frac{1}{x}\,dx = 2t\,dt \;\to\; \frac{dx}{x} = -2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln\ x}} = \int \frac{-2t\,dt}{\sqrt{t^2}} = \int (-2)\,dt = -2t + k = -2\sqrt{1-ln\ x} + k$$

b) Usando el cambio $x = t^2 \;\to\; dx = 2t\,dt$, obtenemos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{1+\sqrt{t^2}}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^3}{1+t}\,dt = 2\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln\,|t+1|\right) + k = 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - ln\,|\sqrt{x}+1|\right) + k$$

3. Integración por partes

Hazlo tú.

a) $\displaystyle\int arc\ sen\ \frac{x}{2}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\ln x\, dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = arc\ sen\ \dfrac{x}{2} \ \to\ du = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\, dx \\[2ex] dv = dx \ \to\ v = x \end{cases}$$

$$I = x\cdot arc\ sen\ \frac{x}{2} - \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}\, dx = x\cdot arc\ sen\ \frac{x}{2} + \int\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)}\left(-\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= x\cdot arc\ sen\ \frac{x}{2} + \frac{\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)^{-(1/2)+1}}{-\dfrac{1}{2}+1} + k = x\cdot arc\ sen\ \frac{x}{2} + 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + k = x\cdot arc\ sen\ \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2} + k$$

b) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \ln x \ \to\ du = \dfrac{1}{x}\, dx \\[2ex] dv = \dfrac{1}{x^2}dx \ \to\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + k$$

Página 347

4. Integración por partes

Hazlo tú. Calcular:

a) $\displaystyle I = \int 2x^2 \cos 2x\, dx$ b) $\displaystyle I = \int e^{-x}\cos 2x\, dx$

a) Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = 2x^2 \ \to\ du = 4x\, dx \\[1ex] dv = \cos 2x\, dx \ \to\ v = \dfrac{sen\ 2x}{2} \end{cases}$$

$$I = 2x^2\cdot\frac{sen\ 2x}{2} - \int \frac{sen\ 2x}{2}\cdot 4x\, dx = x^2\, sen\ 2x - 2\int x\cdot sen\ 2x\, dx = x^2\cdot sen\ 2x - 2I_1$$

$$I_1 = \int x\cdot sen\ 2x\, dx$$

Aplicamos de nuevo la integración por partes:

$$\begin{cases} u = x \ \to\ du = dx \\[1ex] dv = sen\ 2x\, dx \ \to\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -x\frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx = -x\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = -x\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\, sen\ 2x + k$$

Finalmente:

$$I = x^2\cdot sen\ 2x - 2I_1 = x^2\cdot sen\ 2x + x\cdot\cos 2x - \frac{1}{2}\, sen\ 2x + k$$

b) $I = \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx = -\frac{1}{5} e^{-x} (cos\ 2x - 2sen\ 2x)$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \ \rightarrow \ du = -e^{-x}\, dx \\ dv = cos\ 2x\ dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{sen\ 2x}{2} \end{cases}$$

$$I = e^{-x} \frac{sen\ 2x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x}\, sen\ 2x\ dx = e^{-x} \frac{sen\ 2x}{2} + \frac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int e^{-x}\, sen\ 2x\ dx$$

Integramos de nuevo por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \ \rightarrow \ du = -e^{-x}\, dx \\ dv = sen\ 2x\ dx \ \rightarrow \ v = -\dfrac{-cos\ 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{-x} \cdot \frac{cos\ 2x}{2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx$$

Sustituimos I_1 en I y se obtiene:

$$\int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx = e^{-x} \cdot \frac{sen\ 2x}{2} - e^{-x} \cdot \frac{cos\ 2x}{4} - \frac{1}{4} \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx$$

Pasamos el último término al primer miembro y despejamos:

$$\frac{5}{4} \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx = e^{-x} \cdot \frac{sen\ 2x}{2} - e^{-x} \cdot \frac{cos\ 2x}{4} \ \rightarrow \ \int e^{-x} \cdot cos\ 2x\ dx = \frac{2}{5} e^{-x} \cdot sen\ 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \cdot cos\ 2x + k$$

5. Integración de funciones racionales

Hazlo tú.

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{3x^2 + 4}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2 (x+1)^2}\, dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \ \rightarrow \ A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{3}{4},\ C = \frac{1}{2},\ D = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x+2}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\, ln\,(x-1) - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{2}\, ln\,(x+1) - \frac{1}{4(x+1)} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{3x^2+4}\, dx = \frac{2}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\, arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + k = \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right) + k$

Página 348

6. Integrales racionales con raíces reales y complejas

Hazlo tú.

Calcula $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$.

$$\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \;\rightarrow\; A=1,\; M=-1,\; N=-1$$

$$I = \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = ln\,|x-1| - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} + 1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\,I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Sustituimos en I_1:

$$I_1 = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

Sustituimos en I:

$$I = ln\,|x-1| - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

7. Integrales de diversos tipos

Hazlo tú.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int [\cos(2x) + sen\,x\cos x]\,dx$

a) Llamamos $u = \sqrt{x} \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \;\rightarrow\; 2u\,du = dx$

$$I = \int \frac{u}{1+u}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{1+u}\,du = 2\int\left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du =$$

$$= 2\left(\frac{u^2}{2} - u + ln\,|u+1|\right) + k = 2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + ln\,(\sqrt{x}+1)\right) + k$$

b) Llamamos $u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx$

$$I = \int \frac{du}{(u^2-1)(u+1)} = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^2}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{u+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(u+1)^2}$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u+1)^2}\,du = \frac{1}{4}\,ln\,|u-1| - \frac{1}{4}\,ln\,|u+1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{u+1} + k =$$

$$= \frac{1}{4}\,ln\,|e^x - 1| - \frac{1}{4}\,ln\,(e^x+1) + \frac{1}{2(e^x+1)} + k$$

c) $\int (cos\ 2x + sen\ x \cdot cos\ x)\,dx = \int cos\ 2x\,dx + \int sen\ x \cdot cos\ x\,dx = \frac{sen\ 2x}{2} + \frac{sen^2\ x}{2} + k$

En la segunda integral se ha tenido en cuenta que $D[sen\ x] = cos\ x$.

8. Primitiva que cumple una condición

Hazlo tú. Halla $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

$f'(x) = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + k_1$

$f'(0) = 2 \rightarrow k_1 = 2$

$f(x) = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2\right) dx = \frac{x^3}{2} + 2x + k_2$

$f(0) = 1 \rightarrow k_2 = 1$

$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$

Ejercicios y problemas guiados

Página 349

1. Curva de la que se conocen las pendientes de las rectas tangentes

Hallar la curva en la que las pendientes de las rectas tangentes en cualquier punto vienen dadas por la función $f(x) = xe^{2x}$. Se sabe también que la curva pasa por el punto $A(0, 2)$.

Si llamamos $F(x)$ a la función buscada, esta cumple dos condiciones:

$$F'(x) = x \cdot e^{2x}$$

$F(0) = 2$ para que pase por el punto A.

Por tanto,

$$F(x) = \int x \cdot e^{2x}\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x \to du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \to v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}\, e^{2x} + k$$

$$F(0) = 2 \to -\frac{1}{4} + k = 2 \to k = \frac{9}{4}$$

Así, $F(x) = \dfrac{1}{2}\, x \cdot e^{2x} - \dfrac{1}{4}\, e^{2x} + \dfrac{9}{4}$.

2. Función derivable

Hallar una función $f(x)$ derivable en $\mathbb{R}$, que pase por el punto $P(-1, 3)$ y cuya derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculamos las primitivas de los dos tramos:

$f_1(x) = \displaystyle\int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + k_1$ $\qquad$ $f_2(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k_2$, ya que $x > 1$.

Como pasa por el punto P:

$$f_1(-1) = 3 \to 2 + k_1 = 3 \to k_1 = 1$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, debe ser continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en $x = 1$.

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x + k_2) = k_2 \end{cases} \to k_2 = 1$$

Con el valor de k_2 obtenido se cumplen todas las condiciones y la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Integración de un valor absoluto

Dada la función $f(x) = \frac{x}{2} - 2$, ***calcular*** $\int |f(x)|\, dx$.

Definimos la función por intervalos:

$$\frac{x}{2} - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$$

$$|f(x)| = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x}{2} - 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Integramos cada tramo:

$$\int \left(-\frac{x}{2} + 2\right) dx = -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1$$

$$\int \left(\frac{x}{2} - 2\right) dx = \frac{x^2}{4} - 2x + k_2$$

$$F(x) = \int |f(x)|\, dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k_1 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + k_2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en $x = 4$:

$$F(4) = \frac{4^2}{4} - 2 \cdot 4 + k_2 = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \to 4} F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} \left(-\frac{x^2}{4} + 2x + k_1\right) = 4 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \left(\frac{x^2}{4} - 2x + k_2\right) = -4 + k_2 \end{cases} \rightarrow\; 4 + k_1 = -4 + k_2 \;\rightarrow\; k_2 = 8 + k_1$$

Es decir:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} + 2x + k & \text{si } x < 4 \\ \frac{x^2}{4} - 2x + 8 + k & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

4. Gráficas de primitivas

Hallar una primitiva $F(x)$ ***de la función*** $f(x) = 2x - 4$ ***tal que su gráfica corte al eje*** X ***en un único punto.***

$F(x) = \int (2x - 4)\, dx = x^2 - 4x + k$

Para que $F(x)$ corte al eje X en un único punto, la expresión de $F(x)$ debe ser un cuadrado perfecto. Por tanto:

$$F(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

y el único punto de corte con el eje X es el punto $(2, 0)$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 350

Para practicar

Integrales casi inmediatas

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x+7}{2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\,dx$

d) $\displaystyle\int (x - sen\ x)\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x+7}{2}\,dx = \int\left(2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}\right)dx = \frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{4}+\frac{7}{2}x+k$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x\,dx}{x^{1/3}} = \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|2x+7|+k$

d) $\displaystyle\int (x - sen\ x)\,dx = \frac{x^2}{2}+cos\ x+k$

2 **Resuelve estas integrales:**

a) $\displaystyle\int (x^2+1)^2\,dx$

b) $\displaystyle\int (x-5)^3\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{3x+5}\,dx$

d) $\displaystyle\int (cos\ x+e^x)\,dx$

a) $\displaystyle\int (x^2+1)^2\,dx = \int (x^4+2x^2+1)\,dx = \frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+k$

b) $\displaystyle\int (x-5)^3\,dx = \frac{(x-5)^4}{4}+k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+5)^{1/2}\,3\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3}+k$

d) $\displaystyle\int (cos\ x+e^x)\,dx = \int cos\ x\,dx+\int e^x\,dx = sen\ x+e^x+k$

3 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{cos^2\ x}\,dx$

c) $\displaystyle\int sen\,(x-4)\,dx$

d) $\displaystyle\int (e^{2x}+3e^{-x})\,dx$

a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int x^{2/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+k = \frac{3}{5\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x^5}+k$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{cos^2\ x}\,dx = 7\,tg\ x+k$

c) $\displaystyle\int sen\,(x-4)\,dx = -cos\,(x-4)+k$

d) $\displaystyle\int (e^{2x}+3e^{-x})\,dx = \int e^{2x}\,dx+\int 3e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,2\,dx-3\int e^{-x}(-1)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}-3e^{-x}+k$

4 **Halla las siguientes integrales:**

a) $\int \left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right) dx$ b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx$ e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx$ f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx$

a) $\int \left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right) dx = 2\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-2} dx = 2\ ln|x| - \frac{2}{x} + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2} dx = -8 arc\ tg\ x + k$

e) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} ln(1+x^2) + k$

f) $\int \frac{x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{2-x^3} dx = -\frac{1}{3} ln|2-x^3| + k$

5 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int \frac{dx}{3x-4}$ b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$ c) $\int \sqrt{3x-4}\, dx$ d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}}\, dx$

a) $\int \frac{dx}{3x-4} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x-4} = \frac{1}{3} ln|3x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2} = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-2}\, 3\, dx = -\frac{1}{3(3x-4)} + k$

c) $\int \sqrt{3x-4}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{1/2}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x-4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3} + k$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-3/5}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x-4)^{2/5}}{\frac{2}{5}} + k = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(3x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4} dx$ b) $\int e^{-2x+9} dx$ c) $\int e^{5x} dx$ d) $\int (3^x - x^3)\, dx$

a) $\int e^{x-4} dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9} dx = \frac{-1}{2} e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\, dx = \frac{3^x}{ln\, 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2}$ b) $\int \frac{5dx}{100x^2+1}$ c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$ d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ f) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ g) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$ h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2} = \int \frac{2\,dx}{1+(5x)^2} = \frac{2}{5}\, arc\ tg\ 5x + k$

b) $\int \frac{5\,dx}{100x^2+1} = \int \frac{5\,dx}{(10x)^2+1} = \frac{5}{10}\, arc\ tg\ 10x + k = \frac{1}{2}\, arc\ tg\ 10x + k$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2} = \int \frac{4\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3}\, arc\ tg\ x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\, arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + k$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\, arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k = \frac{1}{6}\, arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k$

f) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\, arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k = \frac{1}{3}\, arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$

g) $\int \frac{dx}{2+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\, arc\ tg\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{4}\, arc\ tg\ (\sqrt{2}\,x) + k$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = arc\ tg\ (e^x) + k$

8 **Expresa el cociente de la forma** $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ **y resuelve:**

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx$ b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$ d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$ f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx = \int\left(x+3+\frac{9}{x-3}\right)dx = \int x\,dx + \int 3\,dx + \int \frac{9}{x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9ln\,|x-3| + k$

b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx = \int\left(x-6+\frac{10}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ ln\,|x+1| + k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx = \int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \int x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3ln\,|x+2| + k$

d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx = \int\left(2x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx = \int 2x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{8}{x+2}\,dx = x^2 - 2x + 8ln\,|x+2| + k$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}ln\,|x^2-1| + k$

f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx = \int\left(x^2-x-1-\frac{3}{x-2}\right)dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx - \int dx - \frac{3}{x-2}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3ln\,|x-2| + k$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx$ **d)** $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-(\ln x)^2}}$

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x) + k$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1/2\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{10}{\sqrt{1-(10x)^2}}\,dx = \frac{1}{10}\,arc\ sen\,10x + k$

d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-(\ln x)^2}} = arc\ sen\ \ln x + k$, ya que $D[\ln x] = \frac{1}{x}$.

10 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int sen\,x\,cos\,x\,dx$ **b)** $\int \frac{sen\,x\,dx}{cos^5 x}$ **c)** $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **d)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\int sen\,x \cdot cos\,x\,dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

b) $\int \frac{sen\,x\,dx}{cos^5 x} = -\int (-sen\,x) \cdot cos^{-5} x\,dx = \frac{-\,cos^{-4} x}{-4} + k = \frac{1}{4cos^4 x} + k$

c) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2}\,dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+5} + k$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$ **b)** $\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **c)** $\int \sqrt{(1+cos\,x)^3}\,sen\,x\,dx$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ **e)** $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx$ **f)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

a) $\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-2x)^{1/2}\,(2x-2)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\ sen\,x\,dx = \frac{arc\ sen^2 x}{2} + k$

c) $\int \sqrt{(1+cos\,x)^3}\,sen\,x\,dx = -\int (1+cos\,x)^{3/2}\,(-sen\,x)\,dx = -\frac{(1+cos\,x)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{-2\sqrt{(1+cos\,x)^5}}{5} + k$

d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx = \int (1+\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + k$

e) $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int (2-x^3)^{-2}\,3x^2\,dx = -\frac{2}{3(x^3-2)} + k$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int (1+e^x)^{-1/2}\,e^x\,dx = \frac{(1+e^x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{e^x+1} + k$

Integración por partes

12 **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$ **b)** $\int x^2 \ln x\, dx$

c) $\int 3x \cos x\, dx$ **d)** $\int \ln (2x-1)\, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$ **f)** $\int \arccos x\, dx$

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \ \to \ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

b) $\int x^2 \ln x\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \ \to \ du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^2\, dx \ \to \ v = \frac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

c) $\int 3x \cos x\, dx = 3 \int x \cos x\, dx$

$$\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx \\ dv = \cos x\, dx \ \to \ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$3 \int x \cos x\, dx = 3 \left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx \right] = 3\,[x \operatorname{sen} x + \cos x] + k = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + k$$

d) $\int \ln (2x-1)\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \ \to \ du = \frac{2}{2x-1} \\ dv = dx \ \to \ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln (2x-1)\, dx = x \ln (2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\, dx = x \ln (2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x \ln (2x-1) - x - \frac{1}{2} \ln (2x-1) + k$$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx \ \to \ v = -e^{-x}\, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\, dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int \arccos x\, dx$

$$\begin{cases} u = \arccos x \ \to \ du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ dv = dx \ \to \ v = x \end{cases}$$

$$\int \arccos x\, dx = x \cdot \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + k$$

13 **Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:**

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$ **b)** $\int x^2 e^{2x} dx$ **c)** $\int e^x \cos x \, dx$ **d)** $\int (x+1)^2 e^x dx$

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2\,sen\,x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx = -x^2 \cos x + 2\underbrace{\int x\cos x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\,dx \rightarrow v_1 = sen\,x \end{cases}$$

$$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2\,sen\,x\,dx = -x^2\cos x + 2x\,sen\,x + 2\cos x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{2x}dx \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \underbrace{\int x e^{2x}dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}dx \rightarrow v_1 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + k$$

c) $\int e^x \cos x\,dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x \end{cases}$$

$$I = e^x\,sen\,x - \underbrace{\int e^x\,sen\,x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x dx \\ dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x\,e^x + \int e^x\cos x\,dx$$

$$I = e^x\,sen\,x - (-\cos x\,e^x + I)$$

$$2I = e^x\,sen\,x + e^x\cos x$$

$$I = \frac{e^x\,sen\,x + e^x\cos x}{2} + k$$

d) $\int (x+1)^2 e^x\, dx$

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \to du = 2(x+1)\,dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x+1)^2 e^x\, dx = (x+1)^2 e^x - 2 \underbrace{\int (x+1) e^x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x+1) \to du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\,dx \to v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x = (x+1-1)e^x = x\,e^x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)^2 e^x\,dx = (x+1)^2 e^x - 2x\,e^x + k = (x^2+2x+1-2x)\,e^x + k = (x^2+1)\,e^x + k$$

Página 351

Integrales racionales

14 **Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \quad A = -1/5, \quad B = 1/5$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{-1/5}{x+3}\,dx + \int \frac{1/5}{x-2}\,dx = -\frac{1}{5}\,ln|x+3| + \frac{1}{5}\,ln|x-2| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 & x^2-4 \\ \underline{-3x^3 + 12x} & 3x \\ \quad\quad 12x & \end{array} \qquad \frac{3x^3}{x^2-4} = 3x + \frac{12x}{x^2-4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2-4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 6ln|x^2-4| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)} = \int \frac{dx}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+5)(x-5)(x-4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x-4} \to A = \frac{1}{90},\ B = \frac{1}{10},\ C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{90}\int \frac{1}{x+5}\,dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-4}\,dx = \frac{1}{90}\,ln|x+5| + \frac{1}{10}\,ln|x-5| - \frac{1}{9}\,ln|x-4| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = x + ln\,|x| - 2ln\,|x+1| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \ \to\ A = -\frac{4}{3},\ B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx = -\frac{4}{3}\,ln\,|x+2| + \frac{4}{3}\,ln\,|x-1| + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = 1 - \frac{4x+3}{x^2+4x+3} = 1 - \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}\right) \ \to\ A = \frac{9}{2},\ B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int \left[1 - \left(\frac{9/2}{x+3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)\right] dx = x - \frac{9}{2}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| + k$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(2 + \frac{x-1}{x^2-3x+2}\right) dx = \int 2\,dx + \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = 2x + I_1$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)}\,dx = ln\,|x-2|$$

Por tanto, $I = 2x + ln\,(x-2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \int \frac{-16}{(x+3)(x-5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-16}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \ \to\ A = 2,\ B = -2$$

$$I = 2\int \frac{1}{x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{x-5}\,dx = 2ln\,|x+3| - 2ln\,|x-5| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

$2x-4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \to & -2=4B & \to B=-1/2 \\ x=-3 & \to & -10=16C & \to C=-5/8 \\ x=0 & \to & -4=-3A+3B+C & \to A=5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \frac{1}{2x-2} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x=2 & \to & 7=7A & \to A=1 \\ x=-5 & \to & -7=-7B & \to B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx = ln|x-2| + ln|x+5| + k = ln|(x-2)(x+5)| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \to & 1=16A & \to A=1/16 \\ x=-3 & \to & 1=-4C & \to C=-1/4 \\ x=0 & \to & 1=9A-3B-C & \to B=-1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln|x-1| - \frac{1}{16}\,ln|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k = \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$3x-2 = A(x+2) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x=2 & \to \ 4=4A & \to \ A=1 \\ x=-2 & \to \ -4=-4B & \to \ B=2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = ln\,|x-2| + 2ln\,|x+2| + k = ln\,[|x-2|\,(x+2)^2] + k$$

Integrales por sustitución

16 **Aplica el método de sustitución para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int x\,\sqrt[3]{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x=t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2-t} = \int \frac{2\,dt}{t-1} = 2ln\,|t-1| + k = 2ln\,|\sqrt{x}-1| + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x+2=t^3 \to dx = 3t^2\,dt \quad (x=t^3-2)$

$$\int x\,\sqrt[3]{x+2}\,dx = \int (t^3-2)\,t\cdot 3t^2\,dt = 3\int (t^6-2t^3)\,dt = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{2} + k = \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}{2} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x=t^6 \to dx = 6t^5\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{t^3}{t^2-1}6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{t^2-1}\,dt = 6\int\left(t^6+t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

Calculamos, usando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1| + k$$

Ya que $\displaystyle\frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$.

Terminamos el cálculo de la integral:

$$I = 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1|\right) + k =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3ln\,|\sqrt[6]{x}+1| + 3ln\,|\sqrt[6]{x}-1| + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $2-x=t^2 \to -dx = 2t\,dt \to dx = -2t\,dt \quad (x=2-t^2)$

$$\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2t\,dt}{[3-(2-t^2)]\,t} = \int \frac{-2d\ dt}{t^2+1} = -2arc\ tg\ t + k = -2arc\ tg\ \sqrt{2-x} + k$$

Para resolver

17 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int x^4\,e^{x^5}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx$ c) $\displaystyle\int x\cdot 2^{-x}\,dx$ d) $\displaystyle\int x^3\,sen\,x\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{-3x}{2-6x^2}\,dx$ g) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,cos\,x\,dx$ h) $\displaystyle\int x^5\,e^{-x^3}\,dx$

a) $\displaystyle\int x^4\,e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\int 5x^4\,e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\,e^{x^5} + k$

b) $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,sen\,x^2\,dx = \frac{-1}{2}\,cos\,x^2 + k$

c) $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = 2^{-x}\, dx \;\to\; v = \dfrac{-2^{-x}}{ln\, 2} \end{cases}$$

$$\int x\, 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 3^{-x}}{ln\, 2} + \int \frac{2^{-x}}{ln\, 2}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} + \frac{1}{ln\, 2}\int 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} - \frac{2^{-x}}{(ln\, 2)^2} + k$$

d) $\int x^3\, sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\to\; du = 3x^2\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3\underbrace{\int x^2\, cos\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \;\to\; du_1 = 2x\, dx \\ dv_1 = cos\, x\, dx \;\to\; v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2\, sen\, x - 2\underbrace{\int x\, sen\, x\, dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \;\to\; du_2 = dx \\ dv_2 = sen\, x\, dx \;\to\; v_2 = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_2 = -x\, cos\, x + \int cos\, x\, dx = -x\, cos\, x + sen\, x$$

Así: $I_1 = x^2\, sen\, x + 2x\, cos\, x - 2sen\, x$

Por tanto:

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3x^2\, sen\, x + 6x\, cos\, x - 6sen\, x + k$$

e) $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{5/2}\, dx = \dfrac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \dfrac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k$

f) $\int \dfrac{-3x}{2-6x^2}\, dx = \dfrac{1}{4}\int \dfrac{-12x}{2-6x^2}\, dx = \dfrac{1}{4}\, ln\, |2-6x^2| + k$

g) Esta es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes dos veces:

$$I = \int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\to\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = cos\, x\, dx \;\to\; v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^{2x+1}\, sen\, x - 2\int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx = e^{2x+1}\, sen\, x - 2I_1$$

$$I_1 = \int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx$$

Integramos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\to\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\to\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{2x+1}\, cos\, x + 2\int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Sustituyendo en I:

$$\int e^{2x+1} \cos x \, dx = e^{2x+1} \operatorname{sen} x - 2\left(-e^{2x+1} \cos x + 2\int e^{2x+1} \cos x \, dx\right) =$$

$$= e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x - 4\int e^{2x+1} \cos x \, dx$$

Pasamos la integral al primer miembro y despejamos:

$$\int e^{2x+1} \cos x \, dx = \frac{e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x}{5} + k = \frac{e^{2x+1}}{5} (\operatorname{sen} x + 2\cos x) + k$$

h) $\int x^5 e^{-x^3} dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3} dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \ \rightarrow \ du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k = \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

18 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-1} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-9} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2x^2+8} dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + 2 \operatorname{arc\,tg} x + k$

(1) Hacemos $\displaystyle\int \frac{(x+2)\, dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A, B, C y D dando a x los valores $1, -1, 0$ y 2:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 & \rightarrow 1 = 4B \rightarrow B = 1/4 \\ x = -1 & \rightarrow 1 = 4D \rightarrow D = 1/4 \\ x = 0 & \rightarrow 1 = -A + B + C + D \rightarrow 1/2 = -A + C \\ x = 2 & \rightarrow 1 = 9A + 9B + 3C + D \rightarrow -3/2 = 9A + 3C \rightarrow -1/2 = 3A + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)} dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1/4}{(x+1)} dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right] + k = \frac{-1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}\right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \;\rightarrow\; A = -\frac{1}{3},\; B = \frac{5}{3}$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{2x-1} = -\frac{1}{3}\,ln\,(x+1) + \frac{5}{6}\,ln\,(2x-1) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-9}\,dx = \int \frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-3} \;\rightarrow\; A = \frac{5}{12},\; B = \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{5}{12}\int \frac{dx}{2x+3} + \frac{1}{12}\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{5}{24}\,ln\,(2x+3) + \frac{1}{24}\,ln\,(2x-3) + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2+7x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \rightarrow & 8 = 4A & \rightarrow\; A = 2 \\ x=-1 & \rightarrow & -6 = -2C & \rightarrow\; C = 3 \\ x=0 & \rightarrow & -1 = A - B - C & \rightarrow\; B = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 2ln\,|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2x^2+8}\,dx$

Como el denominador no tiene raíces:

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+8}\,dx - \int \frac{dx}{2x^2+8} = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\;tg\,\frac{x}{2} + k = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{4}\,arc\;tg\,\frac{x}{2} + k$$

19 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \ln(x-3)\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

h) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{\ln^2|x|}{2}+k$

b) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx = \ln|x+\cos x|+k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \ln|\ln|x||+k$

d) $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx = \ln|e^x+x|+k$

e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}(-\operatorname{sen}\sqrt{x})\,dx = -2\cos(\sqrt{x})+k$

f) $\displaystyle\int \ln(x-3)\,dx$

$$\begin{cases} u=\ln(x-3) \rightarrow du=\dfrac{1}{x-3}\,dx \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{cases}$$

$$\int \ln(x-3)\,dx = x\ln|x-3| - \int \frac{x}{x-3}\,dx = x\ln|x-3| - \int 1+\frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= x\ln|x-3| - x - 3\ln|x-3| + k = (x-3)\ln|x-3| - x + k$$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} u=\ln\sqrt{x} \rightarrow du=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2x}\,dx \\ v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \rightarrow dv=2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}(\ln\sqrt{x}-1)+k$$

h) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

$$\begin{cases} u=\ln(x^2+1) \rightarrow du=\dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{cases}$$

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - \int\left(2-\frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + k$$

20 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4\ x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$ f) $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,dx$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right)dx = cos\left(\frac{1}{x}\right)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx = \int\left(2-\frac{4}{x+2}\right)dx = \int 2\,dx - 4\int\frac{dx}{x+2} = 2x - 4\,ln\,|x+2| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx = \int\frac{1}{1+x^2}\,arc\ tg\ x\,dx = \frac{arc\ tg^2\ x}{2}+k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4\ x}\,dx = -\int(-sen\ x)\,(cos\ x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\ x)^{-3}}{-3}+k = \frac{1}{3cos^3\ x}+k$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$

$$\begin{cases} u=(ln\ x)^2 \to du = 2\,(ln\ x)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx = x\,(ln\ x)^2 - 2\int ln\ x\,dx = x\,ln^2\,|x| - 2x\,ln\,|x| + 2x + k$

f) $\displaystyle\int e^x\,cos\,e^x\,dx = sen\,e^x + k$

g) $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}\,dx = \int\frac{-1}{(x+1)\,(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A\,(x-1)+B\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \to -1=-2A \to A=1/2 \\ x=1 \to -1=2B \to B=-1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1/2}{x+1}+\frac{-1/2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| - \frac{1}{2}\,ln\,|x-1| + k = ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+k$$

h) $\displaystyle\int\frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx = \int\frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx = \int\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}-3x+4\,ln\,|x+1|+k$

21 **Resuelve por sustitución:**

a) $\displaystyle\int\frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int\sqrt{3x-2}\,dx$

a) Hacemos $e^x = t^2 \to e^x\,dx = 2t\,dt$

$$\int\frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx = \int\frac{2t}{1-t}\,dt = \int\left(-2-\frac{2}{t-1}\right)dt = -2t - 2ln\,(t-1) + k = -2\sqrt{e^x} - 2ln\,(\sqrt{e^x}-1)+k$$

b) Hacemos $3x-2 = t^2 \to 3\,dx = 2t\,dt \to dx = \dfrac{2}{3}\,t\,dt$

$$\int\sqrt{3x-2}\,dx = \int t\cdot\frac{2}{3}\,t\,dt = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{9}+k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9}+k$$

22 Resuelve:

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 4\,arc\ sen\ x + k = -\sqrt{1-x^2} + 4arc\ sen\ x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x-3) + k$

23 Calcula estas integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \to A = 5,\ B = 10,\ C = 5$$

$$I = 5\int \frac{dx}{x-1} + 10\int (x-1)^{-2}\,dx + 5\int (x-1)^{-3}\,dx = 5ln\,|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx = \int\left(1 + \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\right)dx = \int dx + \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx$

Calculamos la segunda integral teniendo en cuenta que el denominador no tiene raíces.

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2-6}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx - 6\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = ln\,(x^2-2x+5) - 6I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k = \frac{1}{2}\,arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$$

Sustituimos en I_1:

$$I_1 = ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$$

Sustituimos en I:

$$I = x + ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\,\frac{x-1}{2} + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(x-1-\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\right)dx = \int (x-1)\,dx - \int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Calculamos la segunda integral descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3x^2+4x+6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \to A = -3,\ B = -\frac{7}{3},\ C = \frac{7}{3}$$

$$\int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = -3\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-1} = -3\,ln\,x - \frac{7}{3}\,ln\,(x+2) + \frac{7}{3}\,ln\,(x-1) + k$$

Sustituimos en I:

$I = \frac{x^2}{2} - x + 3\ ln\ x + \frac{7}{3}\ ln\ (x+2) - \frac{7}{3}\ ln\ (x-1) + k$

d) $\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)}\ dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+9} \rightarrow A = 2,\ M = 0,\ N = 12$

$I = 2\int \frac{dx}{x-2} + 12\int \frac{dx}{x^2+9}$

$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k$

Sustituimos en I:

$I = 2ln\ (x-2) + 4\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + k$

24 Resuelve estas integrales utilizando un cambio de variable:

a) $\int x\sqrt{x+1}\ dx$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ dx$

e) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\ dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\ dx$

a) $\int x\sqrt{x+1}\ dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t\ dt$

$\int x\sqrt{x+1}\ dx = \int (t^2 - 1)\ t \cdot 2t\ dt = \int (2t^4 - 2t^2)\ dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \rightarrow dx = 4t^3\ dt$

$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\ dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\ dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\ dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\ ln\ |t^3 - 1| + k = \frac{4}{3}\ ln\ |\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t\ dt$

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx = \int \frac{(t^2-1)}{t} \cdot 2t\ dt = \int (2t^2 - 2)\ dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t\ dt$

$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ dx = \int \frac{2t\ dt}{(t^2-1)\ t} = \int \frac{2\ dt}{(t+1)(t-1)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$

$2 = A(t-1) + B(t+1)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} t=-1 & \to & 2=-2A & \to & A=-1 \\ t=1 & \to & 2=2B & \to & B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = -ln\,|t+1| + ln\,|t-1| + k = ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2\,dt}{t+1} = 2\,ln\,|t+1| + k = 2\,ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t \cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = 2t - 2\,arc\,tg\,t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + k$$

25 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\,x)}{cos^2\,x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - ln\,(1+e^x) + k$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 3 \int \frac{1/3}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2} + 3\,arc\,sen\left(\frac{x}{3}\right) + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \to x = ln\,t \to dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\,dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3)+B(t-3)+Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t=0 & \to & 1=-3B & \to & B=-1/3 \\ t=3 & \to & 1=9C & \to & C=1/9 \\ t=1 & \to & 1=-2A-2B+C & \to & A=-1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3} \right) dt = \frac{-1}{9}\,ln\,|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\,ln\,|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9}\,ln\,e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k = -\frac{1}{9}\,x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\,x)}{cos^2 x}\,dx = -cos\,(tg\,x) + k$, ya que $D[tg\,x] = \dfrac{1}{cos^2 x}$.

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \to x = ln\,t \to dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= t - 2\,arc\,tg\,t + k = e^x - 2\,arc\,tg\,(e^x) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\,ln\,|1+t| + k = 2\sqrt{x} - 2\,ln\,(1+\sqrt{x}) + k$$

Página 352

26 Para resolver la integral $\int cos^3 x\,dx$, hacemos:

$$\boldsymbol{cos^3 x = cos\,x\,cos^2 x = cos\,x\,(1-sen^2 x) = cos\,x - cos\,x\,sen^2 x}$$

Resuélvela y calcula después $\int sen^3 x\,dx$.

$$\int cos^3 x\,dx = \int (cos\,x - cos\,x\cdot sen^2 x)\,dx = \int cos\,x\,dx - \int sen^2 x\cdot cos\,x\,dx = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + k$$

Para la segunda parte del problema calculamos:

$$sen^3 x = sen\,x\cdot sen^2 x = sen\,x\,(1-cos^2 x) = sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x$$

$$\int sen^3 x\,dx = \int (sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x)\,dx = \int sen\,x\,dx + \int cos^2 x\,(-sen\,x)\,dx = -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3} + k$$

27 Calcula las siguientes integrales utilizando las relaciones trigonométricas:

a) $\displaystyle\int (sen^2 x + 2\,cos\,2x)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{(1-2\,cos^2 x)\,cos\,x}{cos\,2x}$

c) $\displaystyle\int (sen^2 x\cdot sen\,2x)\,dx$ **d)** $\displaystyle\int (cos^2 x - cos\,2x)\,dx$

** **Ayuda: Ten en cuenta que $1 + cos\,2x = 2cos^2 x$ y que $1 - cos\,2x = 2sen^2 x$.***

a) Teniendo en cuenta que $sen^2 x + 2cos\,2x = \dfrac{1-cos\,2x}{2} + 2cos\,2x = \dfrac{3}{2}\,cos\,2x + \dfrac{1}{2}$, obtenemos:

$$\int (sen^2 x + 2cos\,2x)\,dx = \int \left(\frac{3}{2}\,cos\,2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{3}{4}\,sen\,2x + \frac{x}{2} + k$$

b) $\int \frac{(1-2cos^2 x)\, cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = \int \frac{(1-2cos^2 x)\, cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = \int \frac{-cos\, 2x \cdot cos\, x}{cos\, 2x}\, dx = -\int cos\, x\, dx = -sen\, x + k$

c) Teniendo en cuenta que $sen^2 x \cdot sen\, 2x = \frac{1-cos\, 2x}{2}\, sen\, 2x = \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen\, 2x \cdot cos\, 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int sen^2 x \cdot sen\, 2x\, dx = \int \left(\frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen\, 2x \cdot cos\, 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int sen\, 2x \cdot 2\, dx - \frac{1}{4} \int sen\, 2x \cdot cos\, 2x \cdot 2\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\, cos\, 2x - \frac{1}{4}\, \frac{sen^2\, 2x}{2} + k = -\frac{1}{4}\, cos\, 2x - \frac{1}{8}\, sen^2\, 2x + k$$

d) Teniendo en cuenta que $cos^2 x - cos\, 2x = \frac{1+cos\, 2x}{2} - cos\, 2x = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int (cos^2 x - cos\, 2x)\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos\, 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\, 2x}{4} + k$$

28 **Calcula** $\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx$

a) Por descomposición en fracciones simples.

b) Mediante un cambio de variable.

a) $I = \int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx = \int \left(x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \int (x-2)\, dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\, dx$

Descomponemos la segunda integral en fracciones simples:

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \;\to\; A = 3,\; B = -1$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\, dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

b) Llamamos $u = x + 1 \;\to\; du = dx \quad (x = u - 1)$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{(u-1)^3}{u^2}\, du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2}\, du = \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du =$$

$$= \frac{u^2}{2} - 3u + 3\, ln\, u + \frac{1}{u} + k = \frac{(x+1)^2}{2} - 3(x+1) + 3\, ln\, |x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

29 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

b) $\int \frac{(x+5)\, dx}{x^2 + 2x + 3}$

c) $\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\, dx$

d) $\int \frac{2x-1}{x^3 + x}\, dx$

e) $\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9}\, dx$

f) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}$

a) El denominador no tiene raíces.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = arc\, tg\, (x+2) + k$$

b) El denominador no tiene raíces.

$$I = \int \frac{(x+5)\, dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2} \cdot 2 + 5}{x^2 + 2x + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3}\, dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\, dx = \frac{1}{2}\, I_1 + 4 I_2$$

$$I_1 = ln\,(x^2 + 2x + 3) + k$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

c) $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 3} \;\to\; A = \frac{1}{3},\; M = -\frac{1}{3},\; N = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x| - \frac{1}{3}\,I_1$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2}\cdot 2 - 1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\,dx =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

(∗) La segunda integral está resuelta en el apartado anterior.

Por tanto:

$$I = \frac{1}{3}\,ln\,x - \frac{1}{6}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) $I = \displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \;\to\; A = -\frac{1}{2},\; M = 1,\; N = 2$$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\,2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + 2\,arc\,tg\,x + k$$

e) $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9}\,dx = \int \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+9}\right)dx = \int dx + \int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$$

Ya que:

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{3}}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$$

Sustituyendo en I:

$$I = x + \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$$

f) $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \to A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ M = -\frac{1}{2},\ N = 0$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\,ln\,(x^2+1) + k$$

30 **Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ que pasa por el punto (0, 3).**

$$F(x) = \int \frac{3x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + k$$

Como pasa por (0, 3) se cumple que $F(0) = 3$.

$$-\frac{3}{2} + k = 3 \to k = \frac{9}{2}$$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + \frac{9}{2}$.

31 **Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + k$$

$$F(1) = -1 + k = 2 \to k = 3$$

Por tanto: $F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

32 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$$F(x) = \int (4x-6)\,dx = 2x^2 - 6x + k$$

$$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \to k = 8$$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

33 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = 6x,\ f'(0) = 1 \text{ y } f(2) = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array}\right\} \to k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

34 **Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2\,sen\,x$ cuyo valor para $x = 0$ sea 1.**

$$F(x) = \int x^2\,sen\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \to v = -cos\,x \end{array}\right.$$

$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2\int x \cdot cos\ x\ dx = -x^2 \cdot cos\ x + 2I$

Integramos I por partes:

$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow \ du = dx \\ dv = cos\ x\ dx \ \rightarrow \ v = sen\ x \end{cases}$$

$I = x \cdot sen\ x - \int sen\ x\ dx = x \cdot sen\ x + cos\ x$

Sustituimos en F:

$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x + k$

Ahora se debe cumplir que $F(0) = 1 \ \rightarrow \ 2 + k = 1 \ \rightarrow \ k = -1$.

La primitiva es $F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x - 1$.

35 Determina la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = x\ ln\ x,\ f'(1) = 0 \ \text{ y } \ f(e) = \frac{e}{4}$$

$f'(x) = \int f''(x)\ dx \ \rightarrow \ f'(x) = \int x\ ln\ x\ dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\ x \ \rightarrow \ du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \ \rightarrow \ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$f'(x) = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + k$

$f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

$f(x) = \int f'(x)\ dx \ \rightarrow \ f(x) = \int\left[\frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right]dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right)dx}_{I} + \frac{1}{4}x$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) \ \rightarrow \ du = \frac{1}{x}\ dx \\ dv = \frac{x^2}{2}\ dx \ \rightarrow \ v = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

$I = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\ dx = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x + k \\ f(e) = \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \ \rightarrow \ k = -\frac{e^3}{36} \end{array}\right\}$$

$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$

36 **Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que:**

$$f'(x) = x\,e^{-x^2} \text{ y } f(0) = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \int x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \rightarrow k = 1$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 1$

37 **De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante.**

Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$y = \int \frac{a}{1+x}\,dx \rightarrow f(x) = a\,ln\,(1+x) + k \quad (x > -1)$

$f(0) = 1 \rightarrow a\,ln\,(1+0) + k = 1 \rightarrow k = 1$

$f(1) = -1 \rightarrow a\,ln\,2 + k = -1 \rightarrow a\,ln\,2 = -1 - 1 \rightarrow a = \frac{-2}{ln\,2}$

Por tanto, $f(x) = \frac{-2}{ln\,2}\,ln\,(1+x) + 1, \quad x > -1.$

38 **Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.**

$\int ln\,(1+x^2)\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\,(1+x^2) \rightarrow du = \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$\int ln\,(1+x^2)\,dx = x\,ln\,(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\,ln\,(1+x^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$

$= x\,ln\,(1+x^2) - 2(x - arc\,tg\,x) + k$

$F(x) = x\,ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\,tg\,x + k$

Debe pasar por $(0, 0) \rightarrow F(0) = 0$

$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 0$

Así, $F(x) = x\,ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\,tg\,x.$

39 **Calcula el valor del parámetro a para que una primitiva de la función:**

$$\int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx$$

pase por $(\pi, -1)$.

$I = \int (ax^2 + x\cos x + 1)\,dx = \int (ax^2 + 1)\,dx + \int x\cos x\,dx = \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x\cos x\,dx}_{I_1}$

Calculamos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \rightarrow v = sen\,x \end{cases}$$

$I_1 = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x + \cos x + k$

$F(x) = \dfrac{ax^3}{3} + x + x \ sen \ x + cos \ x$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$F(\pi) = -1 \ \to \ \dfrac{a\pi^3}{3} + \pi + \cancel{\pi \cdot sen} \ \pi + cos \ \pi = -1$

$\dfrac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \ \to \ \dfrac{a\pi^3}{3} = -\pi \ \to \ a = \dfrac{-3\pi}{\pi^3} = \dfrac{-3}{\pi^2}$

Así, $F(x) = \dfrac{-3}{\pi^2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + x + x \ sen \ x + cos \ x = -\dfrac{x^3}{\pi^2} + x + x \ sen \ x + cos \ x$

40 **Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c) \ dx$ en función de los parámetros a, b y c.**

$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c) \ dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 + bx + c \ \to \ du = (2x + b) \ dx \\ dv = e^{ax} \ dx \ \to \ v = \dfrac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

Así:

$$I = \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a} \underbrace{\int e^{ax}(2x + b) \ dx}_{I_1}$$

Volvemos a integrar por partes:

$$\begin{cases} u = 2x + b \ \to \ du = 2dx \\ dv = e^{ax} \ dx \ \to \ v = \dfrac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a} I_1 = \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a} e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a}\int e^{ax} \, 2 \ dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2} e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3} e^{ax} + k$$

41 **Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y tal que:**

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

• Si $x \neq 0$:

$$f(x) = \int f'(x) \ dx \ \begin{cases} \int (x^2 - 2x) \ dx & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \int (e^x - 1) \ dx & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

• Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$f(1) = -1 \ \to \ e - 1 + c = -1 \ \to \ c = -e$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} \ k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

42 **De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \ne 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ \ln x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \;\rightarrow\; k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} \; c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(2) = \ln 2$; $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = \ln 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

43 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 3x^2 - 6x$ tal que $F(x)$ tenga un mínimo en el punto (2, 0).**

Determina los demás puntos singulares de $F(x)$.

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2 + k$$

La función pasa por el punto (2, 0) por ser un mínimo.

$F(2) = 0 \;\rightarrow\; -4 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 4$

Así: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Calculamos los demás puntos singulares:

$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 6x$

$F'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

$F''(x) = 6x - 6$

$F''(0) < 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; y = 4 \;\rightarrow$ El punto (0, 4) es un máximo relativo.

$F''(2) > 0 \;\rightarrow$ Efectivamente, el punto (2, 0) es un mínimo relativo.

44 **Halla la función $f(x)$ de la que conocemos $f''(x) = e^x$, $f'(1) = 0$ y $f(0) = 1$.**

$$f''(x) = e^x \;\rightarrow\; f'(x) = \int x^x\, dx = e^x + c_1$$

$$f'(1) = 0 = e^1 + c_1 \;\rightarrow\; c_1 = -e$$

$$f'(x) = e^x - e \;\rightarrow\; f(x) = \int (e^x - e)\, dx = e^x - xe + c_2$$

$$f(0) = 1 = e^0 - 0e + c_2 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

$$f(x) = e^x - xe$$

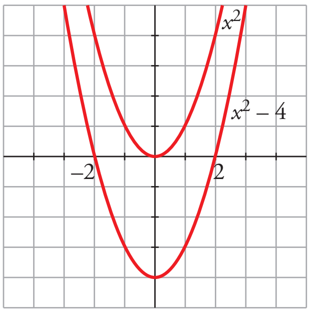
45 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \le 0$ en el intervalo [–2, 2].**

$F(x) = \int 2x\, dx = x + k$

$x^2 + k \le 0$ en $[-2, 2]$

Debe ser $k \le -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en $[-2, 2]$.

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



46 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = \cos\frac{x}{2},\ f'(2\pi) = 0 \text{ y } f(0) = 1$$

$$f'(x) = \int f''(x)\, dx = \int \cos\frac{x}{2}\, dx = 2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + k$$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} + k;\ \text{como } f'(2\pi) = 0 \to 2\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{2} + k = 0 \to k = 0$$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\, dx = 2 \cdot 2\int \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}\, dx = 4\left(-\cos\frac{x}{2}\right) + k'$$

$$f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + k';\ \text{como } f(0) = 1 \to f(0) = -4\cos 0 + k' = 1 \to -4 + k' = 1 \to k' = 5$$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4\cos\frac{x}{2} + 5$

47 **a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+4}$$

b) Determina cuál es la curva de esta familia que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

Por tanto, $m = F'(x) = \frac{x-2}{2x+4}$.

Buscamos $F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4}\, dx$.

$$F(x) = \int \frac{x-2}{2x+4}\, dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x+4}\right) dx = \frac{1}{2}x - 2\int \frac{2}{2x+4}\, dx = \frac{x}{2} - 2\ln|2x+4| + k$$

b) Debe ser:

$$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \to \frac{-5/2}{2} - 2\ln\left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 4\right| + k = \frac{3}{4} \to \frac{-5}{4} - 2\ln 1 + k = \frac{3}{4} \to$$

$$\to k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \to F(x) = \frac{x}{2} - 2\ln|2x+4| + 2$$

Página 353

48 **Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación:**

$$\mathbf{3x + 3y - 1 = 0}$$

$f'(x) = \int f''(x)\, dx \to f'(x) = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + k$

$f(x) = \int f'(x)\, dx \to \int \left(\dfrac{x^2}{2} + k\right) dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + kx + k'$

f pasa por $P(1, 1) \to f(1) = 1 \to \dfrac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$f'(1) = -1 \to \dfrac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k':

$k = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$; $k' = 1 - \dfrac{1}{6} - k = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{3}$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{3}$

49 **Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función siguiente:**

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$F(x) = \int \dfrac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \ln(e^x + 1) + k$

$F(0) = 2 \to \ln 2 + k = 2 \to k = 2 - \ln 2$

Por tanto:

$F(x) = \ln(e^x + 1) + 2 - \ln 2$

50 **Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$.**

Como la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$, se cumple que:

$f'(x) = 3x + 1$

$f(x) = \int (3x + 1)\, dx = \dfrac{3x^2}{2} + x + k$

Por otra parte:

$f(1) = 1 \to \dfrac{3}{2} + 1 + k = 1 \to k = -\dfrac{3}{2}$

Por tanto:

$f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$

51 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \qquad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

halla la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}\, dx$ que cumple la igualdad $H(1) = 1$.

$H(x) = \int \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\, dx = \int \left(2x + 1 + \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\right) dx = \int (2x + 1)\, dx + \int \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\, dx =$

$= x^2 + x + \ln|6x^2 - 7x + 2| + k$

$H(1) = 1 \to 2 + k = 1 \to k = -1$

Por tanto:

$H(x) = x^2 + x + \ln|6x^2 - 7x + 2| - 1$

52 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2\,x\,cos^2\,x}\,dx$.

* ***Utiliza la igualdad*** $sen^2\,x + cos^2\,x = 1$.

$$\int \frac{1}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x}\,dx = \int \frac{sen^2\,x + cos^2\,x}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x}\,dx = \int \frac{sen^2\,x}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x}\,dx + \int \frac{cos^2\,x}{sen^2\,x \cdot cos^2\,x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{cos^2\,x}\,dx + \int \frac{1}{sen^2\,x}\,dx = tg\,x - cotg\,x + k$$

53 **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{81-25x^2}\,dx$

* ***a) Haz*** $t = 3x^3$. ***b) Haz*** $x = \dfrac{9}{5}sen\,t$.

a) Hacemos $t = 3x^3 \to dt = 9x^2\,dx \to \dfrac{1}{9}\,dt = x^2\,dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{9}\,arc\,sen\,t + k = \frac{1}{9}\,arc\,sen\,3x^3 + k$$

b) Hacemos $x = \dfrac{9}{5}\,sen\,t \to dx = \dfrac{9}{5}\,cos\,t\,dt \quad \left(t = arc\,sen\,\dfrac{5x}{9}\right)$

$$\int \sqrt{81-25x^2}\,dx = \int \sqrt{81-25\left(\frac{9}{5}\,sen\,t\right)^2}\,\frac{9}{5}\,cos\,t\,dt = \int \sqrt{81-81\,sen^2\,t}\,\frac{9}{5}\,cos\,t\,dt =$$

$$= \frac{81}{5}\int \sqrt{1-sen^2 t}\,cos\,t\,dt = \frac{81}{5}\int cos^2\,t\,dt = \frac{81}{5}\int \frac{1+cos\,2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{81}{10}\,t + \frac{81}{20}\,sen\,2t + k = \frac{81}{10}\,arc\,sen\,\frac{5x}{9} + \frac{81}{20}\,sen\left(2\,arc\,sen\,\frac{5x}{9}\right) + k$$

54 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int |1-x|\,dx$

b) $\displaystyle\int (3+|x|)\,dx$

c) $\displaystyle\int |2x-1|\,dx$

d) $\displaystyle\int \left|\frac{2x}{3}-4\right|\,dx$

e) $\displaystyle\int |x-2|\,x\,dx$

f) $\displaystyle\int e^{|x|}\,dx$

a) $\displaystyle\int |1-x|\,dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x<1 \\ -1+x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1-x|\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x<1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} + k \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + c \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + c \to c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1-x|\,dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x<1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|)\, dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} \; c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

c) $\int |2x - 1|\, dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} + c \end{array}\right\} \; \dfrac{1}{4} + k = -\dfrac{1}{4} + c \;\to\; c = \dfrac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + k & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left| \dfrac{2x}{3} - 4 \right| dx$

Expresamos $f(x)$ por intervalos.

$$\frac{2x}{3} - 4 = 0 \;\to\; x = 6$$

$$\left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{2x}{3} - 4 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int \left(-\frac{2x}{3} + 4 \right) dx = -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1$$

$$\int \left(\frac{2x}{3} - 4 \right) dx = \frac{x^2}{3} - 4x + k_2$$

$$F(x) = \int\left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + 4x + k_1 & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{x^2}{3} - 4x + k_2 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 6$.

$$F(6) = \frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + k_2 = -12 + k_2$$

$$\lim_{x \to 6} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} \left(-\dfrac{x^2}{3} + 4x + k_1\right) = 12 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} \left(\dfrac{x^2}{3} - 4x + k_2\right) = -12 + k_2 \end{cases} \to 12 + k_1 = -12 + k_2 \to k_2 = 24 + k_1$$

Por tanto:

$$\int\left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + 4x + k & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{x^2}{3} - 4x + 24 + k & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$$

e) $\int |x - 2|\, x\, dx$

$$|x - 2|x = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int (-x^2 + 2x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1$$

$$\int (x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k_2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = \frac{2^3}{3} - 4 + k_2 = -\frac{4}{3} + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k_1\right) = \dfrac{4}{3} + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + k_2\right) = -\dfrac{4}{3} + k_2 \end{cases} \to \frac{4}{3} + k_1 = -\frac{4}{3} + k_2 \to k_2 = \frac{8}{3} + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^3}{3} - x^2 + \dfrac{8}{3} + k & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

f) $\int e^{|x|}\, dx$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ e^{x} + k_2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$F(0) = 1 + k_2$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = -1 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (e^{x} + k_2) = 1 + k_2 \end{cases} \to -1 + k_1 = 1 + k_2 \to k_2 = -2 + k_1$$

Por tanto:

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ e^{x} - 2 + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

55 **Determina una función $f(x)$ que verifique la ecuación siguiente:**

$$x^3 f'(x) + x^2 + 2x = 3$$

$$x^3 \cdot f'(x) + x^2 + 2x = 3 \to x^3 \cdot f'(x) = 3 - x^2 - 2x \to f'(x) = \frac{3 - x^2 - 2x}{x^3} \to f'(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \int\left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = 3\int\frac{dx}{x^3} - 2\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{dx}{x} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x} - \ln x + k$$

56 **De una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto $(-1, 0)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) $f(x) = \int f'(x)\, dx = \begin{cases} e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ -x + k_2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Como la función es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$f(0) = k_2$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = 1 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-x + k_2) = k_2 \end{cases} \to 1 + k_1 = k_2$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 + k & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Como pasa por el punto $(-1, 0) \to f(-1) = 0 \to e + k = 0 \to k = -e$

La expresión de la función buscada es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 - e & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = -e$, $f'(1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -e - (x - 1)$.

57 **Determina una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que la derivada segunda es constante e igual a 3 y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, es $5x - y - 3 = 0$.**

$$f''(x) = 3 \to f'(x) = \int 3\, dx = 3x + k_1$$

Recta tangente en $x = 1$:

$$y = 5x - 3 \to \begin{cases} f'(1) = 5 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$f'(1) = 5 \rightarrow 3 + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 2$

Luego:

$$f'(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \int (3x + 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + k_2$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

La función es:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

58 **Calcula una primitiva de la función $f(x) = 1/x$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $[1, e]$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Queremos que $ln\,|x| + k \le 0$ cuando $x \in [1, e]$.

Como $F(x)$ es creciente en dicho intervalo por ser su primera derivada positiva, basta que:

$$ln\, e + k \le 0 \rightarrow k \le -1$$

Por tanto, cualquier valor de k que satisfaga la condición anterior da lugar a una primitiva que resuelve el problema. Por ejemplo, $F(x) = ln\,|x| - 1$.

59 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ **d)** $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x+1}\, dx$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 2)$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{t}\, 2t\, dt = \int (2t^2 + 2)\, dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + 2\sqrt{x+2} + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)\,t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\; arc\; tg\; t + k = 2\; arc\; tg\; \sqrt{x} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5\, dt$

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x^2})\, dx = \int \sqrt{t^6}\,(1 + \sqrt[3]{(t^6)^2})\, 6t^5\, dt = \int t^3\,(1 + t^4)\, 6t^5\, dt =$$

$$= 6\int (t^8 + t^{12})\, dt = \frac{2t^9}{3} + \frac{6t^{13}}{13} + k = \frac{2\sqrt[6]{x^9}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{23}}}{13} + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 1)$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (t^2-1)^2\, t \cdot 2t\, dt = 2\int t^2\,(t^2-1)^2\, dt = 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt =$$

$$= \frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^7}}{7} - \frac{4\sqrt{(x+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

60 **a) Para resolver la siguiente integral, multiplica numerador y denominador por $\cos x$ y haz después un cambio de variable:**

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

b) Utiliza el procedimiento anterior para resolver las integrales siguientes:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \qquad \int \frac{dx}{\text{sen } x}$$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \text{sen}^2 x}$

Hacemos $u = \text{sen } x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \text{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1-u^2}\, du \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + k =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + \text{sen } x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \text{sen } x| + k$$

(∗) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \text{sen}^2 x)^2}$

Hacemos $u = \text{sen } x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \text{sen}^2 x)^2} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \int \frac{du}{(1+u)^2 (1-u)^2} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1+u)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1+u| - \frac{1}{4(1+u)} - \frac{1}{4} \ln|1-u| + \frac{1}{4(1-u)} + k =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1 + \text{sen } x| - \frac{1}{4(1 + \text{sen } x)} - \frac{1}{4} \ln|1 - \text{sen } x| + \frac{1}{4(1 - \text{sen } x)} + k$$

(∗) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

$\displaystyle I = \int \frac{dx}{\text{sen } x} = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{\text{sen}^2 x} = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{1 - \cos^2 x}$

Hacemos $u = \cos x \to du = -\text{sen } x\, dx \to -du = \text{sen } x\, dx$

$$I = \int \frac{\text{sen } x\, dx}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{du}{1-u^2} \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} \ln|1+u| + \frac{1}{2} \ln|1-u| + k = -\frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos x) + k$$

(∗) Esta integral está resuelta en el primer apartado.

61 **Sean a y b dos números reales cualesquiera. Calcula la siguiente integral indefinida. Ten en cuenta los casos $a = 0$ o $b = 0$.**

$$\int \frac{\cos x}{(a + b\text{sen } x)^2}\, dx$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ el problema no tiene sentido. Por tanto, al menos uno de ellos debe ser no nulo.

Si $b = 0 \to a \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{a^2}\, dx = \frac{\text{sen } x}{a^2} + k$$

Si $b \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{(a + b\, \text{sen } x)^2}\, dx = \frac{1}{b}\int \frac{b\cos x}{(a + b\, \text{sen } x)^2}\, dx = -\frac{1}{b}\, \frac{1}{a + b\, \text{sen } x} + k = -\frac{1}{b(a + b\, \text{sen } x)} + k$$

ya que $D[a + b\, \text{sen } x] = b \cos x$.

62 **Dada $f(x) = sen\ x - sen^3\ x$, halla:**

a) Su integral indefinida.

b) La primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

a) $\int (sen\ x - sen^3\ x)\ dx = \int (1 - sen^2\ x)\ sen\ x\ dx = \int cos^2\ x \cdot sen\ x\ dx = -\int cos^2\ x\ (-sen\ x)\ dx = -\frac{cos^3\ x}{3} + k$

b) Sea $F(x) = -\frac{cos^3\ x}{3} + k$ la primitiva buscada.

Pasa por: $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) \to F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \to -\frac{cos^3\ \frac{\pi}{3}}{3} + k = 1 \to k = \frac{25}{24}$

Luego: $F(x) = -\frac{cos^2\ x}{3} + \frac{25}{24}$

63 **Calcula $f(x)$ sabiendo que su derivada $f'(x) = 3 - 2sen\ x$ corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi$.**

$f(x) = \int (3 - 2sen\ x)\ dx = 3x + 2cos\ x + k$

Corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi \to$ pasa por (π, π).

$f(\pi) = \pi \to 3\pi + 2cos\ \pi + k = \pi \to k = 2 - 2\pi$

La función es: $f(x) = 3x + 2cos\ x + 2 - 2\pi$

64 **Calcula la siguiente primitiva, en la que suponemos que $a \neq 1$:**

$$\int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a}$$

El polinomio $P(x) = x^2 - (a + 1)x + a$ tiene raíces $x = 1$ y $x = a$, ya que $P(1) = P(a) = 0$. Vamos a distinguir dos casos:

- $a \neq 1 \to$ Las raíces reales son distintas:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-a)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x-a)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-a} \to 1 = A(x-a) + B(x-1)$$

$$x = 1 \to 1 = A(1-a) \to A = \frac{1}{1-a}$$

$$x = a \to 1 = B(a-1) \to B = \frac{1}{a-1}$$

$$I = \frac{1}{1-a}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{a-1}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{1-a}\ ln|x-1| + \frac{1}{a-1}\ ln|x-a| + k$$

- $a = 1 \to$ Tiene una raíz doble:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + k$$

65 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos que $f''(x) = -sen\ x$ y que la recta $x + y - 2 - \pi = 0$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = \pi$.**

$y = -x + 2 + \pi$ es la recta tangente en $x = \pi \to \begin{cases} f'(\pi) = -1 \\ f(\pi) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int (-sen\ x)\ dx = cos\ x + k_1$

$f'(\pi) = -1 \to cos\ \pi + k_1 = -1 \to k_1 = 0$

Luego: $f'(x) = cos\ x$

$$f(x) = \int cos\ x\ dx = sen\ x + k_2$$

$$f(\pi) = 2 \ \to\ sen\ \pi + k_2 = 2 \ \to\ k_2 = 2$$

Por tanto: $f(x) = sen\ x + 2$

66 **Calcula** $\int 3x|x-2|\,dx$**.**

$$3x|x-2| = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos.

$$\int (-3x^2 + 6x)\,dx = -x^3 + 3x^2 + k_1 \qquad \int (3x^2 - 6x)\,dx = x^3 - 3x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + k_2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^3 + 3x^2 + k_1) = 4 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - 3x^2 + k_2) = -4 + k_2 \end{cases} \to\ 4 + k_1 = -4 + k_2 \ \to\ k_2 = 8 + k_1$$

Por tanto:

$$\int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + 8 + k & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

67 **De una función continua $f(x)$ sabemos que tiene un mínimo en $(-1, -2)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión analítica de $f(x)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) Integrando por tramos obtenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k_1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la función es continua en $\mathbb{R}$, lo es en $x = 1$.

$$f(1) = 3 + k_1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x + k_1) = 3 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x + k_2) = 4 + k_2 \end{cases} \to\ 3 + k_1 = 4 + k_2 \ \to\ k_2 = -1 + k_1$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 1 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como tiene un mínimo en $(-1, -2)$, pasa por ese punto.

$$f(-1) = -2 \ \to\ -1 + \text{k} = -2 \ \to\ k = -1$$

La expresión final de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4 \ \to\$ La recta tangente es: $y = 2 + 4(x - 1)$

Página 354

Cuestiones teóricas

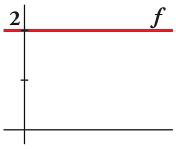
68 **Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.**

$F(x)$ primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

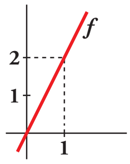
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) + C$ es primitiva de $f(x)$.

69 **Representa tres primitivas de las siguientes funciones f:**

a)



b)



a) $f(x) = 2 \rightarrow F(x) = 2x + k$

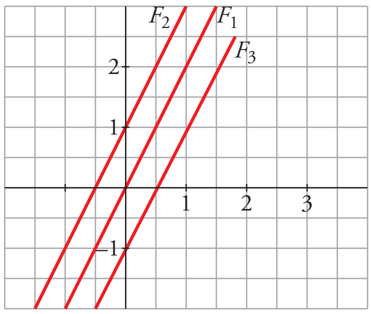
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + k$

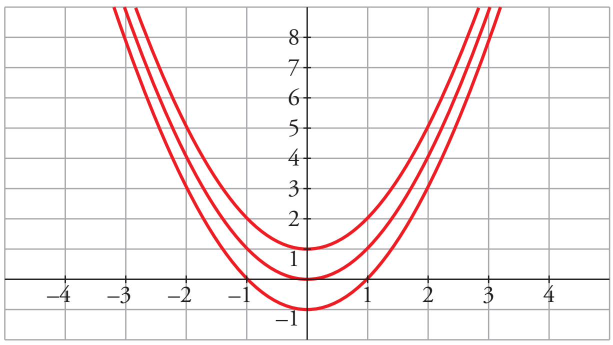
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



70 **En una integral hacemos el cambio $t = tg\,x$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?**

$$t = tg\,x \rightarrow dt = (1 + tg^2\,x)\,dx \rightarrow dt = (1 + t^2)\,dx \rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

71 **Comprueba que $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln|\sec x + tg\,x| + k$.**

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = \ln|\sec x + tg\,x| + k$ es $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Derivamos $f(x) = \ln\left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}}{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{(1 + \operatorname{sen} x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

72 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\, dx = ln\,|tg\,x| + k$.**

Debemos suponer que $x \neq k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ para que tenga sentido la función y se pueda evaluar la tangente.

- Si $tg\,x > 0 \to f'(x) = D[ln\,(tg\,x) + k] = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$
- Si $tg\,x < 0 \to f'(x) = D[ln\,(-tg\,x) + k] = \dfrac{-1 - tg^2\,x}{-tg\,x} = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$

73 **Las integrales $\int \frac{(arc\,tg\,x)^2}{1 + x^2}\,dx$ y $\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx$, ¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$? En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.**

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$.

- $\displaystyle\int \frac{(arc\,tg\,x)^2}{1 + x^2}\,dx = \int (arc\,tg\,x)^2 \cdot \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

  $f(x) = arc\,tg\,x;\ \ n = 2;\ \ f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

- $\displaystyle\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx = \int tg^3\,x(1 + tg^2\,x)\,dx$

  $f(x) = tg\,x;\ \ n = 3;\ \ f'(x) = 1 + tg^2\,x$

74 **Sin utilizar el cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^4} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{-x^4}{1 + x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1 + x^4} - \left(\frac{-x^4}{1 + x^4}\right) = \frac{1 + x^4}{1 + x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

75 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\,dx = ln\,\dfrac{|x - 1|^3}{(x + 2)^2} + k$.**

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = ln\,\frac{|x - 1|^3}{(x + 2)^2} + c$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$F(x) = 3ln\,|x - 1| - 2ln\,(x + 2) + c$

$$F'(x) = \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} = \frac{3(x + 2) - 2(x - 1)}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{x + 8}{x^2 + x - 2}$.

76 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?**

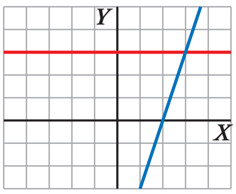
No. Por ejemplo:

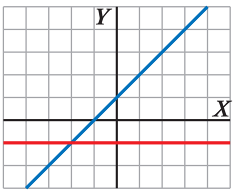
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \;\rightarrow\; F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \;\rightarrow\; G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

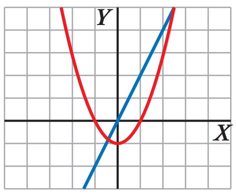
$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

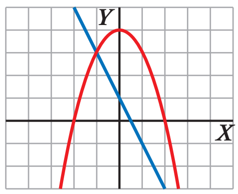
Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

77 **¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?**

a) 

b) 

c) 

d) 

a) Las funciones representadas son:

$$y = 3 \text{ e } y = 3x - 6, \text{ que cumplen: } \int 3\,dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f.

b) Las funciones son:

$$y = -1 \text{ e } y = x + 1 \;\rightarrow\; \int -1\,dx = -x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son:

$$y = x^2 - 1 \text{ e } y = 2x \;\rightarrow\; \int 2x\,dx = x^2 + k$$

Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son:

$$y = -x^2 - 1 + 4 \text{ e } y = -2x + 1 \;\rightarrow\; \int -2x + 1\,dx = -x^2 + x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

78 **Si $\int f(x)\,dx = F(x)$ y $\int g(x)\,dx = G(x)$, halla en función de $F(x)$ y de $G(x)$:**

a) $\int [f(x) - g(x)]\,dx$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\,dx$

c) $\int f(2x - 1)\,dx$

d) $\int [5 - g(x)]\,dx$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right)dx$

f) $\int [3f(5x - 1) - 6g(2 - 3x)]\,dx$

g) $\int G'(x)\,g'(x)\,dx$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\,dx$

a) $\int [f(x) - g(x)]\,dx = F(x) - G(x)$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\,dx = -\frac{1}{2}[5G(x) + 4F(x)]$

c) $\int f(2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\int f(2x - 1)\,2\,dx = \frac{1}{2}F(2x - 1)$

d) $\int [5 - g(x)]\,dx = 5x - G(x)$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx = 2\int g\left(\frac{x-3}{2}\right)\frac{1}{2}\, dx = 2G\left(\frac{x-3}{2}\right)$

f) $\int [3f(5x-1) - 6g(2-3x)]\, dx = 3\int f(5x-1)\, dx - 6\int g(2-3x)\, dx =$

$$= \frac{3}{5}\int f(5x-1)\, 5\, dx + 2\int g(2-3x)(-3)\, dx = \frac{3}{5}F(5x-1) + 2G(2-3x)$$

g) $\int G'(x)\, g'(x)\, dx = \int g(x)\, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^2}{2} + k = \frac{[G'(x)]^2}{2} + k$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\,|f(x)| + k = ln\,|F'(x)| + k$

79 **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) Una función logarítmica puede ser una primitiva de una función racional.

b) $\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

c) Las primitivas de una función racional irreducible cuyo denominador es de primer grado son un polinomio más un logaritmo neperiano.

a) Verdadero. Por ejemplo, la función logarítmica $F(x) = ln\,(x^2 + 1)$ es una primitiva de la función racional $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

b) Falso. Tomemos $f(x) = g(x) = x$.

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx = \int x\, dx \cdot \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^4}{4} + k$$

Ambos resultados son claramente distintos.

c) Verdadero. Será de la forma $\frac{p(x)}{x}$ y podemos reescribirlo como $q(x) + \frac{k}{x}$, que tiene como integral un polinomio más un logaritmo neperiano.

80 **Al aplicar el método de integración por partes para calcular $\int f(x)\, cos\, x\, dx$, donde f es una función derivable, se obtiene:**

$$\int f(x)\, cos\, x\, dx = f(x)\, sen\, x - \int \frac{1}{x}\, sen\, x\, dx$$

Encuentra la expresión analítica de $f(x)$ si sabemos que pasa por el punto (1, 2).

Del enunciado del problema se deduce que el método de integración por partes se ha usando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u = f(x) \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = cos\, x\, dx \;\rightarrow\; v = sen\, x \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Por otra parte:

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; k = 2$$

La función es:

$$f(x) = ln\,|x| + 2$$

81 **Comprueba que las funciones:**

$$F(x) = arc\ tg\ x \quad \text{y} \quad G(x) = -arc\ tg\left(\frac{1}{x}\right)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$.

a) ¿Son iguales las funciones F y G?

b) ¿Se cortan sus gráficas?

Para comprobarlo, calculamos sus derivadas.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$G'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

a) Ambas funciones no son iguales, porque ni siquiera tienen el mismo dominio de definición.

Concretamente, $F(0) = arc\ tg\ 0 = 0$ y $G(0)$ no existe.

b) En el dominio de definición de ambas funciones no pueden cortarse. Como no son iguales y son primitivas de una misma función, difieren en constantes no nulas en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Página 355

Para profundizar

82 **Calcula las siguientes integrales trigonométricas mediante un cambio de variable:**

a) $\int sen^2\ x\ cos^3\ x\ dx$ **b)** $\int sen^3\ x\ cos^2\ dx$

c) $\int cos^5\ x\ dx$ **d)** $\int cos^3\ x\ sen^3\ x\ dx$

a) Hacemos $u = sen\ x \rightarrow du = cos\ x\ dx$

$$\int sen^2\ x \cdot cos^3\ x\ dx = \int sen^2\ x \cdot cos^2\ x \cdot cos\ x\ dx = \int u^2 (1-u^2)\ du =$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + k = \frac{sen^3\ x}{3} - \frac{sen^5\ x}{5} + k$$

b) Hacemos $u = cos\ x \rightarrow du = -sen\ x\ dx$

$$\int sen^3\ x \cdot cos\ x\ dx = -\int sen^2\ x \cdot cos^2\ x(-sen\ x)\ dx = -\int (1-u^2)\ u^2\ du =$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = -\frac{cos^3\ x}{3} + \frac{cos^5\ x}{5} + k$$

c) Hacemos $u = sen\ x \rightarrow du = cos\ x\ dx$

$$\int cos^5\ x\ dx = \int (cos^2\ x)^2\ cos\ x\ dx = \int (1-u^2)^2\ du = \int (1-2u^2+u^4)\ du =$$

$$= u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = sen\ x - \frac{2sen^3\ x}{3} + \frac{sen^5\ x}{5} + k$$

d) $I = \int cos^3\ x \cdot sen^3\ x\ dx = \int cos^2\ x \cdot sen^2\ x \cdot cos\ x \cdot sen\ x\ dx = \int \frac{1+cos\ 2x}{2} \cdot \frac{1-cos\ 2x}{2} \cdot \frac{sen\ 2x}{2}\ dx =$

$= \frac{1}{8}\int (1-cos^2\ 2x)\ sen\ 2x\ dx$

Hacemos $u = cos\ 2x \rightarrow du = -2sen\ 2x\ dx \rightarrow -\frac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$I = -\frac{1}{16}\int (1-u^2)\ du = -\frac{u}{16} + \frac{u^3}{48} + k = -\frac{cos\ 2x}{16} + \frac{cos^3\ 2x}{48} + k$

83 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int sen^2\, x\, cos^2\, x\, dx$

b) $\displaystyle\int sen^6\, x\, dx$

* ***Recuerda:*** $1 + cos\, 2x = 2cos^2\, x$ ***y*** $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$.

a) $$\int sen^2\, x \cdot cos^2\, x\, dx = \int \frac{1 - cos\, 2x}{2} \cdot \frac{1 + cos\, 2x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos^2\, 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int sen^2\, 2x\, dx \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1 - cos\, 4x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 4x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{sen\, 4x}{32} + k$$

(*) Sustituyendo en $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 - cos\, 4x = 2sen^2\, 2x$.

b) $$I = \int sen^6\, x\, dx = \int (sen^2\, x)^3\, dx = \int \left(\frac{1 - cos\, 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 2x)^3\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3cos\, 2x + 3cos^2\, 2x - cos^3\, 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int cos\, 2x\, dx + \frac{3}{8}\int cos^2\, 2x\, dx - \frac{1}{8}\int cos^3\, 2x\, dx$$

Calculamos cada integral por separado:

$$\int cos\, 2x\, dx = \frac{sen\, 2x}{2} + k$$

$$\int cos^2\, 2x\, dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1 + cos\, 4x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8} + k$$

(*) Sustituyendo en $1 + cos\, 2x = 2cos^2\, x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 + cos\, 4x = 2cos^2\, 2x$.

$$I_1 = \int cos^3\, 2x\, dx = \int cos^2\, 2x \cdot cos\, 2x\, dx = \int (1 - sen^2\, 2x)\, cos\, 2x\, dx$$

Hacemos $u = sen\, 2x \rightarrow du = 2cos\, 2x\, dx \rightarrow \dfrac{du}{2} = cos\, 2x\, dx$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + k = \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen^3\, 2x}{6} + k$$

Ya podemos obtener el resultado final:

$$I = \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\, sen\, 2x + \frac{3}{16}\, x + \frac{3}{64}\, sen\, 4x - \frac{1}{16}\, sen\, 2x + \frac{1}{48}\, sen^3\, 2x + k =$$

$$= \frac{5}{16}\, x - \frac{1}{4}\, sen\, 2x + \frac{3}{64}\, sen\, 4x + \frac{1}{48}\, sen^3\, 2x + k$$

84 **Para resolver integrales del tipo** $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx$ **se utiliza el cambio de variable** $x = \dfrac{a}{b}\, sen\, t$.

Calcula las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{25 - 64x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{2 - x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2}\, dx$

a) Hacemos $x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2cos\, t\, dt$

$$\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx = \int \sqrt{100 - 25\,(2sen\, t)^2}\; 2cos\, t\, dt = \int \sqrt{100 - 100sen^2\, t}\; 2cos\, t\, dt =$$

$$= 20\int \sqrt{1 - sen^2\, t} = 20\int cos^2\, t\, dt = 20\int \frac{1 + cos\, 2t}{2}\, dt = 10t + 5sen\, 2t + k =$$

$$= 10\, arc\, sen\, \frac{x}{2} + 5sen\left(2\, arc\, sen\, \frac{x}{2}\right) + k$$

b) Hacemos $x = \frac{5}{8}\, sen\, t \to dx = \frac{5}{8}\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{25-64x^2}\, dx = \int \sqrt{25-64\left(\frac{5}{8}\, sen\, t\right)^2}\, \frac{5}{8}\cos t\, dt = \sqrt{25-25 sen^{2t}}\, \frac{5}{8}\cos t\, dt =$$

$$= \frac{25}{8}\int \sqrt{1-sen^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{25}{8}\int \cos^2 t\, dt = \frac{25}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{25}{16}t + \frac{25}{32} sen\, 2t + k = \frac{25}{16}\, arc\, sen\, \frac{8x}{5} + \frac{25}{32}\, sen\left(2\, arc\, sen\, \frac{8x}{5}\right) + k$$

c) Hacemos $x = \sqrt{2}\, sen\, t \to dx = \sqrt{2}\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{2-x^2}\, dx = \sqrt{2-(\sqrt{2}\, sen\, t)^2}\, \sqrt{2}\cos t\, dt = \int \sqrt{2-2sen^2 t}\, \sqrt{2}\cos t\, dt =$$

$$= 2\int \sqrt{1-sen^2 t}\, \cos t\, dt = 2\int \cos^2 t\, dt = 2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = t + \frac{1}{2}\, sen\, 2t + k =$$

$$= arc\, sen\, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\, sen\left(2arc\, sen\, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

d) Hacemos $x = \frac{3}{20}\, sen\, t \to dx = \frac{3}{20}\cos t\, dt$

$$\int \sqrt{\frac{9}{16}-25x^2}\, dx = \int \sqrt{\frac{19}{16}-25\left(\frac{3}{20}\, sen\, t\right)^2}\, \frac{3}{20}\cos t\, dt = \int \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\, sen^2 t}\, \frac{3}{20}\cos t\, dt =$$

$$= \frac{9}{80}\int \sqrt{1-sen^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{9}{80}\int \cos^2 t\, dt = \frac{9}{80}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{9}{160}t + \frac{9}{320} sen\, 2t + k =$$

$$= \frac{9}{160}\, arc\, sen\, \frac{20x}{3} + \frac{9}{320}\, sen\left(2arc\, sen\, \frac{20x}{3}\right) + k$$

85 **Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que, además de x e y, figura también y'. Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que la verifique:**

Por ejemplo, resolvamos $x y^2 + y' = 0$:

$$y' = -x\, y^2 \to \frac{dy}{dx} = -x\, y^2 \to dy = -x\, y^2\, dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\, dx \to \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x)\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \to y = \frac{2}{x^2-2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto (0, 2):

$$y = \frac{2}{x^2-2k} \to 2 = \frac{2}{-2k} \to -4k = 2 \to k = \frac{-1}{2}$$

Por tanto, $y = \frac{2}{x^2+1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = x\cdot\frac{4}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

86 **Resuelve estas ecuaciones diferenciales de primer orden:**

a) $yy' - x = 0$ **b)** $y^2 y' - x^2 = 1$ **c)** $y' - xy = 0$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$ **e)** $y' e^y + 1 = e^x$ **f)** $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

* ***En todas ellas, al despejar y' se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.***

a) $yy' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \to y\,dy = x\,dx \to \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \to y^2 = x^2 + 2k \to y = \pm\sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1 + x^2}{y^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{y^2} \to y^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1 + x^2)\,dx \to \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \to y^3 = 3x + x^3 + 3k \to y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - xy = 0$

$$y' = xy \to \frac{dy}{dx} = xy \to \frac{dy}{y} = x\,dx \to \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \to |y| = e^{(x^3/2) + k} \to y = \pm\, e^{(x^2/2) + k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \to |y| = e^{2\sqrt{x} + k} \to y = \pm\, e^{2\sqrt{x} + k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \to \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \to y = ln\,|e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \to \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\,dx \to arc\ tg = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

Autoevaluación

Página 355

Resuelve las integrales siguientes:

1 $\int (\cos x + tg\, x)\, dx$

$$\int (\cos x + tg\, x)\, dx = \int \cos x\, dx + \int \frac{sen\, x}{\cos x}\, dx = sen\, x - \ln|\cos x| + k$$

2 $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\ln|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

3 $\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx$

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/3}\, dx = \frac{1}{4}(2x^2+1)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2+1)^4} + k$$

4 $\int \frac{tg^2\, x}{\cos^2 x}\, dx$

$$\int \frac{tg^2\, x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{tg^3\, x}{3} + k$$

5 $\int 2^{sen\, x} \cos x\, dx$

$$\int 2^{sen\, x} \cos x\, dx = \frac{2^{sen\, x}}{\ln 2} + k, \quad \text{ya que } D[sen\, x] = \cos x.$$

6 $\int \frac{1}{x}\, sen\, (\ln x)\, dx$

$$\int \frac{1}{x}\, sen\, (\ln x)\, dx = -\cos(\ln x) + k$$

7 $\int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$

$$I = \int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2+4x-21 = 0 \begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \to x = A(x+7) + B(x-3) \to A = \frac{3}{10},\ B = \frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3}\, dx + \int \frac{7/10}{x+7}\, dx = \frac{3}{10}\ln|x-3| + \frac{7}{10}\ln|x+7| + k$$

8 $\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx$

$$\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx = -\frac{1}{27}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, dx = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + k = -\frac{1}{9}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + k$$

9 **Resuelve, por el método de sustitución, la integral:**

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \;\to\; x = t^2 \;\to\; dx = 2t\,dt$

$I = \int \frac{1+t^2}{1+t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\,dx \overset{(1)}{=} 2\int\left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1|\right)$

(1) Dividimos $(t^3 + t) : (t + 2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

10 **Aplica la integración por partes para calcular:**

$$\int cos\,(ln\,x)\,dx$$

$I = \int cos\,(ln\,x)\,dx$

$$\begin{cases} cos\,(ln\,x) = 0 \;\to\; -\dfrac{1}{x}\,sen\,(ln\,x)\,dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$I = x\,cos\,(ln\,x) + \underbrace{\int sen\,(ln\,x)\,dx}_{I_1}$

$$\begin{cases} sen\,(ln\,x) = u \;\to\; \dfrac{1}{x}\,cos\,(ln\,x)\,dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$I_1 = x\,sen\,(ln\,x)\;\underbrace{\int cos\,(ln\,x)\,dx}_{I}$

$I = x\cdot cos\,(ln\,x) + x\cdot sen\,(ln\,x) - I \;\to\; I = \dfrac{x\cdot cos\,(ln\,x) + x\cdot sen\,(ln\,x)}{2} + k$

11 **De la función $f(x)$, se sabe que:**

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2},\quad f(2) = 0$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por (0, 1).

a) $f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 3\int (x+1)^{-2}\,dx = \frac{3\,(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$

$f(2) = \frac{-3}{2+1} + k = -1 + k \;\to$ Como $f(2) = 0,\; -1 + k = 0 \;\to\; k = 1$

$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 1 = \frac{x-2}{x+1}$

b) $g(x) = \int \frac{x-2}{x+1}\,dx = \int\left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)dx = x - 3ln\,|x+1| + k$

$g(0) = 0 - 3ln\,|0+1| + k = k \;\to$ Como $g(0) = 1,\; k = 1.$

La primitiva de f que pasa por (0, 1) es $g(x) = x - 3ln\,|x+1| + 1.$

12 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2 2x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+6}\,dx$

a) Hacemos el cambio $u = cos\ 2x \to du = -2sen\ 2x\ dx \to -\dfrac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$$\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\,arc\ tg\ u + k = -\frac{1}{2}\,arc\ tg\ cos\ 2x + k$$

b) Como el denominador no tiene raíces reales:

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+\frac{3}{2}\cdot 4+2}{x^2-4x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+6}\,dx + 8\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx$$

Calculamos la segunda integral:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+6}\,dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\ tg\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\ tg\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} + k$$

El resultado final es:

$$I = \frac{3}{2}\,ln\,(x^2-4x+6) + 4\sqrt{2}\,arc\ tg\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} + k$$

13 **De una función derivable $f(x)$ se sabe que $f(3) = 26$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x+7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla la expresión de $f(x)$.

Integramos por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+k_1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x+k_2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = 2$.

$$f(2) = 14 + k_1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-}(2x^2+3x+k_1) = 14+k_1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x^2+7x+k_2) = 18+k_2 \end{cases} \to 14+k_1 = 18+k_2 \to k_2 = -4+k_1$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+k & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x-4+k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Por otra parte:

$$f(3) = 26 \to 26 + k = 26 \to k = 0$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2+7x-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14 **Calcula $\int |x+2|\,dx$.**

$$|x+2| = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x<-2 \\ x+2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

$$F(x) = \int |x-2|\,dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1 & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + k_2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x=-2$.

$$F(-2) = -2 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \left(-\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1\right) = 2 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_2\right) = -2 + k_2 \end{cases} \to 2 + k_1 = -2 + k_2 \to k_2 = 4 + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x-2|\,dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + 4 + k & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

15 **Halla la curva en la que la pendiente de las rectas tangentes en cualquier punto viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$$

Se sabe también que la curva pasa por el punto $P(\pi, 0)$.

Llamemos $F(x)$ a la curva en cuestión.

Entonces:

$$F(x) = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,dx =$$

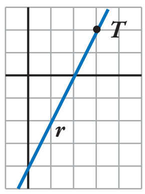
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{tg\, x}{2} + \frac{x}{2} + k$$

Como pasa por P se cumple que: $F(\pi) = 0 \to \dfrac{tg\, \pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k = 0 \to k = -\dfrac{\pi}{2}$

La función es: $F(x) = \dfrac{tg\, x}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}$

16 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos:**

- **$f''(x) = 2$**
- **r es la tangente a f en el punto T.**



La recta tangente en el punto $T(3, 2)$ tiene pendiente $m = 2 \to \begin{cases} f(3) = 2 \\ f'(3) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int 2\,dx = 2x + k_1$

$f'(3) = 2 \to 6 + k_1 = 2 \to k_1 = -4$

$f'(x) = 2x - 4$

$f(x) = \int (2x-4)\,dx = x^2 - 4x + k_2$

$f(3) = 2 \to -3 + k_2 = 2 \to k_2 = 5$

La función es: $f(x) = x^2 - 4x + 5$