Autoevaluación

Página 384

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{ln\, x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(cotg\, x - \dfrac{1}{x} \right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{ln\,(cos\, x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{ln\, x} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ln\, x - x + 1}{(x-1)\, ln\, x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1/x) - 1}{ln\, x + \dfrac{x-1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1/x^2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(cotg\, x - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{cos\, x}{sen\, x} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\, cos\, x - sen\, x}{x\, sen\, x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x\, sen\, x}{sen\, x + x\, cos\, x} \overset{\text{H}}{=}$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen\, x - x\, cos\, x}{2cos\, x - x\, sen\, x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\, x}{ln\,(cos\, x)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\, x}{-tg\, x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{-\dfrac{1}{cos^2\, x}} = 0$

d) Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\, ln\, (x + e^{2x}) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{ln\,(x + e^{2x})}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 + 2e^{2x}}{x + e^{2x}}}{1} = 3$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x} = e^3$

2 a) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x + b & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

halla los parámetros a y b para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Represéntala.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Por tanto, para que sea derivable en $\mathbb{R}$, solo es necesario comprobar su derivabilidad (y continuidad) en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + 2x + b) = -1 + 2 + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 - 1) = a - 1 \end{cases} \to 1 + b = a - 1 \text{ garantiza la continuidad ya que } \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \to f'(1^-) = -1 \\ 2a & \text{si } x > 0 \to f'(1^+) = 2a \end{cases} \to a = -\frac{1}{2};\ b = -\frac{5}{2}$$

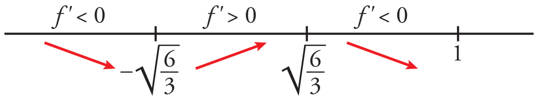
La función es $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x - \dfrac{5}{2} & \text{si } x \le 0 \\ \left(-\dfrac{1}{2} \right) x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) La primera parte es un polinomio de tercer grado que tiene una rama infinita cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 2x - \frac{5}{2} \right) = +\infty$$

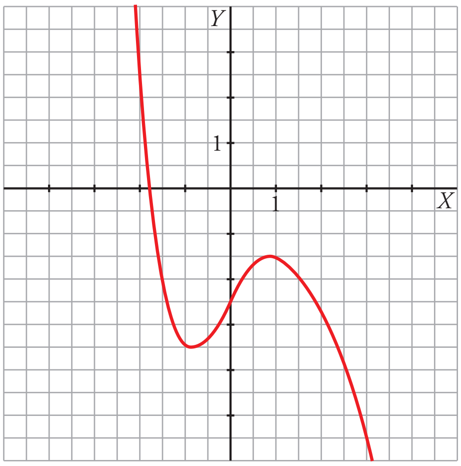
Puntos singulares:

$-3x^2 + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \ x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



En $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un mínimo relativo y en $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un máximo relativo.

La segunda parte es un polinomio de segundo grado, con coeficiente principal negativo.



3 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{si } x \le 0 \\ a + x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcula $f'(x)$ donde sea posible.

c) Halla $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} (x^2 e^x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} (a + x \ln x) = a \end{cases}$

Tenemos que $a = 0$, ya que: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Cuando $a = 0$ se cumple que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua en $x = 0$. La continuidad en los demás números reales está asegurada por la definición de las dos ramas que la forman.

b) $f'(x) = \begin{cases} e^x (2x + x^2) & \text{si } x < 0 \\ \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f'(0^+)$, luego no es derivable en $x = 0$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^x\,dx$

$G(x) = \displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \ \rightarrow \ du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \ \rightarrow \ v = e^x \end{cases}$$

$$G(x) = x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2 e^x - 2I$$

Volvemos a integrar por partes para calcular I:

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = e^x\,dx \;\rightarrow\; v = e^x \end{cases}$$

$$I = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

$$G(x) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = G(0) - G(-1) = 2 - \frac{5}{e}$$

4 a) Estudia el crecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

b) Demuestra que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localiza un intervalo de longitud 1 que la contenga.

c) Represéntala.

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$

Calculamos los puntos singulares:

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 + 6x + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución

Como $f'(x) > 0$ para cada x, la función es creciente en $\mathbb{R}$.

b) Consideremos la función en el intervalo $[-1, 0]$:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo anterior.

$$f(-1) = -2,\; f(0) = 1$$

Por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$. Esta es la solución real de la ecuación. Además, es la única posible debido a que la función es creciente en $\mathbb{R}$.

c) La función corta al eje vertical en el punto $(0, 1)$.

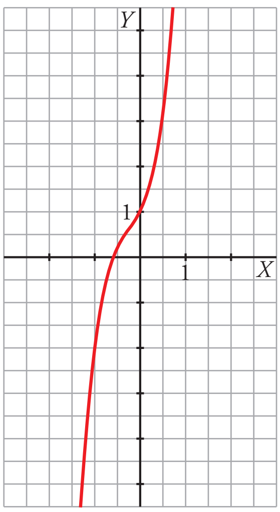
$$f''(x) = 6 + 24x$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 24x = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{4}$$

En $x = -\frac{1}{4}$ hay un punto de inflexión porque pasa de convexa a cóncava.

$$x = -\frac{1}{4},\; y = 1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, su gráfica es:



5 **Estudia las asíntotas y los máximos y mínimos de la función de ecuación** $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$**. Representa su gráfica.**

- Asíntotas:

  No tiene asíntota vertical.

  Horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = 0 \ \to \ y = 0 \ \text{ es asíntota horizontal cuando } \ x \to +\infty.$$

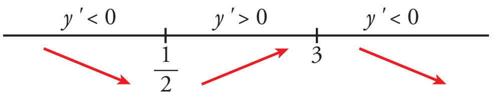
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

  No tiene asíntota oblicua: $m = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{e^x} = 0$

- Máximos y mínimos:

$$y' = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}; \ y' = 0 \ \to \ -2x^2 + 7x - 3 = 0 \begin{cases} x = 3, \ f(3) = \dfrac{9}{e^3} \\ x = \dfrac{1}{2}, \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{e^{1/2}} \end{cases}$$

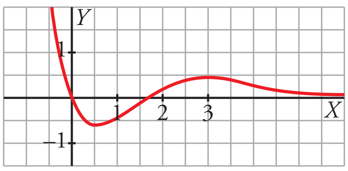
  Estudiamos el signo de y':



  Máximo $\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right) \approx (3; 0{,}45)$

  Mínimo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{e^{1/2}}\right) \approx (0{,}5; -0{,}6)$

- Representación:



6 **Considera la función** $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$**.**

a) Determina sus asíntotas y estudia la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Calcula sus extremos relativos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - x} & \text{si } \ x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{si } \ x > 1 \end{cases}$

  El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{|x - 1|} = +\infty \ \text{ ya que es un cociente de números positivos.}$$

  La recta $x = 1$ es la asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales no tiene.

- Asíntotas oblicuas:

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ La recta $y = x + 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

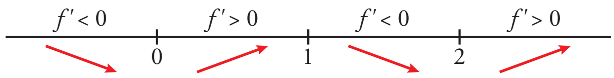
$f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{x-1} > 0$ $\rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ La recta $y = -x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$f(x) + x + 1 = -\dfrac{1}{x-1} > 0$ $\rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2} & \text{si } x < 1 \\[2mm] \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

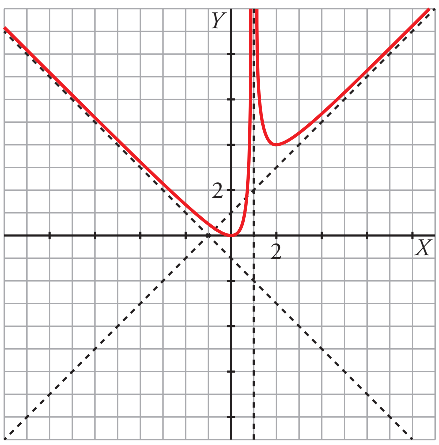
$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2 \text{ (no es un punto en el dominio de esta rama)} \\ x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (tampoco está en el dominio)},\ x = 2 \end{cases}$



$x = 0,\ y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 2,\ y = 4 \rightarrow (2, 4)$ es un mínimo relativo.

c)



7 **Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \neq a$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua de pendiente –4. Representa la función para los valores de a y b obtenidos.**

f pasa por $(2, 3) \rightarrow f(2) = 3 \rightarrow \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3$

La pendiente de la asíntota oblicua es:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4$$

$$\frac{16 + b}{4 - 2} = 3 \rightarrow b = -10$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10}{4 - x} = -4x - 16 - \dfrac{54}{x - 4}$

Cortes con los ejes:

Eje X: $f(x) = 0 \rightarrow 4x^2 - 10 = 0 \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{10}}{2},\ x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Eje Y: $f(0) = -\dfrac{5}{2}$

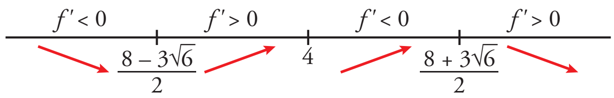
La recta $x = 4$ es la asíntota vertical de la función.

La asíntota oblicua es la recta $y = -4x - 16$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(-2x^2 + 16x - 5)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 16x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2},\ x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$$

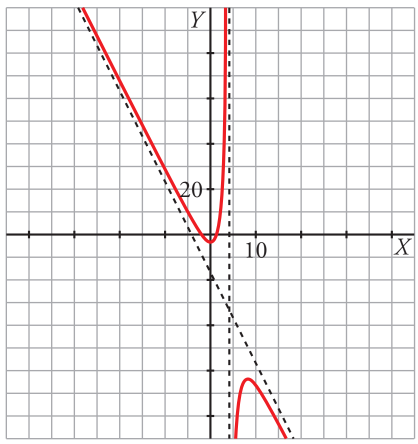


En $x = \dfrac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$ hay un mínimo relativo.

En $x = \dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{2}$ hay un máximo relativo.

$$x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2},\ y = \frac{4\left(\dfrac{8 - 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \dfrac{8 - 3\sqrt{6}}{2}} = 12\sqrt{6} - 32$$

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2},\ y = \frac{4\left(\dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{2}} = -12\sqrt{6} - 32$$



8 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los valores de a, b, c y d sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que el punto (1, 0) es un punto de inflexión y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es –3. Represéntala.**

$f(x)$ tiene un extremo local en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

El punto (1, 0) es un punto de inflexión $\rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es –3 $\rightarrow f'(1) = -3$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$f(1) = 0 \rightarrow a + b + d = 0$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0$

$f'(1) = -3 \rightarrow 3a + 2b = -3$

$$\left.\begin{array}{l} 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = -3$$

$1 - 3 + d = 0 \rightarrow d = 2$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Para representar la función solo necesitamos los cortes con los ejes y los puntos singulares.

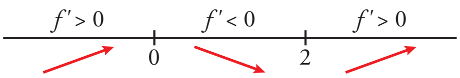
Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = 1 + \sqrt{3},\ x = 1 - \sqrt{3},\ x = 1$

Con el eje Y: $f(0) = 2$

Puntos singulares:

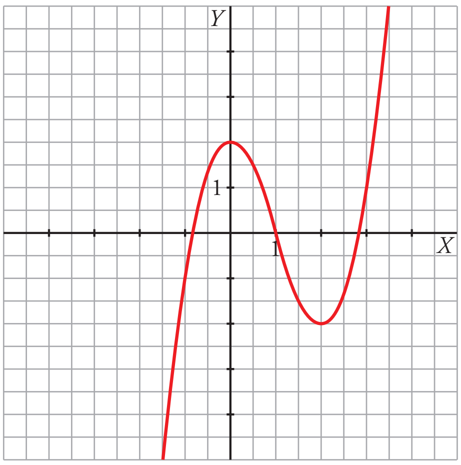
$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$



El punto (0, 2) es un máximo relativo.

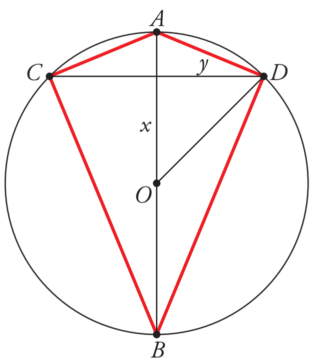
El punto (2, –2) es un mínimo relativo.



9 **En una circunferencia de centro** O **y radio 10 cm, se traza un diámetro** AB **y una cuerda** CD **perpendicular a ese diámetro.**

¿A qué distancia del centro O **debe estar esa cuerda para que la diferencia entre las áreas de los triángulos** ADC **y** BCD **sea máxima?**

Consideremos el dibujo:



$y = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo superior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)$

El área del triángulo inferior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)$

La diferencia de las áreas es:

$$f(x) = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x) - \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x) = 2x\sqrt{100 - x^2} \quad \text{con } 0 < x < 10$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; -2x^2 + 100 = 0 \;\to\; x = 5\sqrt{2}$$

Se puede ver fácilmente, estudiando el signo de la derivada primera, que en el valor obtenido hay un máximo relativo.

La distancia del origen a la que debe estar la cuerda es de $5\sqrt{2}$ cm.

10 Calcula a y b para que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x - 1} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

en el intervalo [0, 5]. ¿En qué punto se cumplirá el teorema?

- f debe ser continua en $x = 2$. Por ello:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} -2 + \sqrt{x-1} = -2 + 1 = -1 \end{array}\right\}\; 2a + 4b = -1$$

- f debe ser derivable en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & 2 < x \le 5 \end{cases} \;\to\; a + 4b = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 4b = -1 \\ a + 4b = 1/2 \end{array}\right\}\; a = -\frac{3}{2},\; b = \frac{1}{2}$$

- $f(0) = 0$; $f(5) = -2 + \sqrt{5-1} = 0$

f cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Este dice que si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Buscamos el punto donde se cumple el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x-1} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} + x & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} + x = 0 \;\to\; x = \frac{3}{2}$$

En $x = \dfrac{3}{2}$, se verifica que $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

11 **Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + 1$:**

a) Prueba que existe algún $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) ¿Podemos asegurar que existe un $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$?

c) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa 2.

a) Calculamos primero la derivada de $g(x) = x^x$ tomando logaritmos.

$$\ln g(x) = x \ln x \;\to\; \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \;\to\; g'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 2^x \ln 2$$

La función $f'(x)$ es continua cuando $x > 0$. En particular, lo es en el intervalo $[1, 2]$.

$$f'(1) = 1 - 2\ln 2 < 0$$

$$f'(2) = 4 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano a $f'(x)$ deducimos que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) La función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2^3 + 1 = 20$$

Aplicando el teorema de los valores intermedios (de Darboux), la función toma todos los valores comprendidos entre 0 y 20. Luego existe $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$.

c) $x = 2,\ f(2) = 1,\ f'(2) = 4 \to$ La recta tangente es $y = 1 + 4(x - 2)$.

12 **Justifica si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1 + x|x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ y, en caso afirmativo, calcula los puntos donde se cumple el teorema.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = 0 \end{cases} \to f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

Por todo lo anterior, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 1]$.

Luego existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} -2x = 1 \to x = -\dfrac{1}{2} \\ 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{Son los valores donde se cumple el teorema.}$$

13 **Calcula el valor de $a > 0$ para que el valor del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -a$.**

La pendiente de la recta tangente en $x = -a$ es:

$$f'(x) = -2x \to f'(a) = 2a$$

La parábola corta al eje de abscisas en $x = -a$ y en $x = a$.

Por la simetría respecto del eje Y, el área es:

$$A = 2\int_0^a (-x^2 + a^2)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x\right]_0^a = 2 \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

Como la pendiente y el área son iguales:

$$2a = \frac{4}{3}a^3 \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \ \text{(no es un punto que cumpla } a > 0) \\ a = 0 \ \text{(tampoco es un punto válido)} \end{cases}$$

Luego $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2 x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^2 x}{sen\, x}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2 x}\, dx = ln\,(1 + sen^2 x) + k$, porque $D[1 + sen^2 x] = 2sen\, x\, cos\, x$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$$= -\sqrt{1-x^2} + 3arc\ sen\ x + k$$

c) $\displaystyle I = \int \frac{cos^2 x}{sen\, x}\, dx = \int \frac{cos^2 x}{sen^2 x}\, sen\, x\, dx$

Hacemos el cambio de variable $u = cos\, x \rightarrow du = -sen\, x\, dx \rightarrow -du = sen\, x\, dx$

$$I = -\int \frac{u^2}{1-u^2}\, du = \int \left(1 - \frac{1}{1-u^2}\right) du = \int du - \int \frac{1}{1-u^2}\, du = u - I_1$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\, ln\,|1+u| - \frac{1}{2}\,|1-u| + k$$

Sustituimos en I:

$$I = u - I_1 = u - \frac{1}{2}\, ln\,|1+u| + \frac{1}{2}\,|1-u| + k = cos\, x - \frac{1}{2}\, ln\,(1 + cos\, x) + \frac{1}{2}\, ln\,(1 - cos\, x) + k$$

15 Sea f la función definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} \quad \textbf{para } x \neq 0 \textbf{ y } x \neq 1$$

y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(2, ln\, 2)$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto P.

b) Determina la función $F(x)$.

a) Como $F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$

$F'(2) = f(2) = \dfrac{5}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = ln\ 2 + \dfrac{5}{4}(x-2)$

b) $F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \rightarrow A = -1,\ B = -1,\ C = 2$$

Por tanto,

$$F(x) = \int\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -ln\,|x| + \frac{1}{x} + 2ln\,|x-1| + k$$

$$F(2) = ln\,2 \rightarrow -ln\,2 + \frac{1}{2} + k = ln\,2 \rightarrow k = 2ln\,2 - \frac{1}{2}$$

La función es: $F(x) = -ln\,x + \frac{1}{x} + 2ln\,(x-1) + 2ln\,2 - \frac{1}{2}$

16 Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.

Hallamos las abscisas de los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$$

Calculamos la función diferencia $h(x) = x^3 - 3x - x = x^3 - 4x$

$$G(x) = \int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$G(-2) = -4,\ G(0) = 0,\ G(2) = -4$$

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = G(0) - G(-2) = 4$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = G(2) - G(0) = -4$$

Área = 4 + 4 = 8 u^2

17 Halla el área del recinto limitado por los ejes X e Y y la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Calculamos los puntos de corte con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

El problema consiste en calcular el área comprendida entre el eje X y la función desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$G(x) = \int \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$G(x) = \int\left(x - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\ tg\ x$$

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\ tg\ x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,2 - \frac{\pi}{4}$$

Área = $\frac{ln\,2 - 1}{2} + \frac{\pi}{4}$ u^2