Resuelve

Página 413

El aparato de Galton

a) Imita el recorrido de un perdigón lanzando una moneda 7 veces y haciendo la asignación CARA → derecha, CRUZ → izquierda. Por ejemplo, si obtienes:

Ⓒ Ⓒ Ⓒ ⊕ Ⓒ ⊕ Ⓒ

¿cuál sería el itinerario correspondiente? Dibújalo.

Repite la experiencia y obtén otros recorridos distintos.

b) Intenta encontrar una ley que asocie el número de caras de la serie, cualquiera que sea el orden en que salen al lanzar la moneda, con el casillero en el que cae el perdigón.

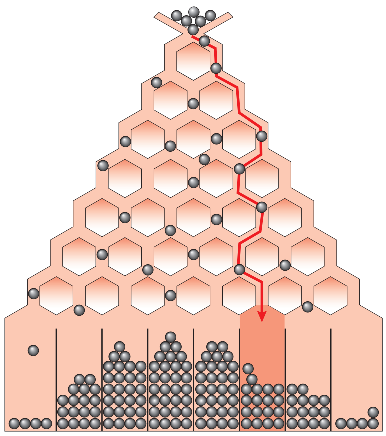
c) ¿Se podría repetir la experiencia tirando 7 monedas simultáneamente y anotando solo el número de caras obtenido?

Intenta ahora explicar por qué hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas.

a) Caería en el sexto intervalo empezando por la izquierda. Si la secuencia tuviera distinto orden ocurriría lo mismo porque lo importante es el número total de desplazamientos que se hacen hacia la izquierda y hacia la derecha. Por ejemplo, la secuencia C, C, +, +, C, +, C coloca el perdigón en el quinto intervalo empezando por la izquierda. Si no sale ninguna cara, el perdigón cae en la primera casilla.

b) El número del intervalo es igual al número de caras más uno.

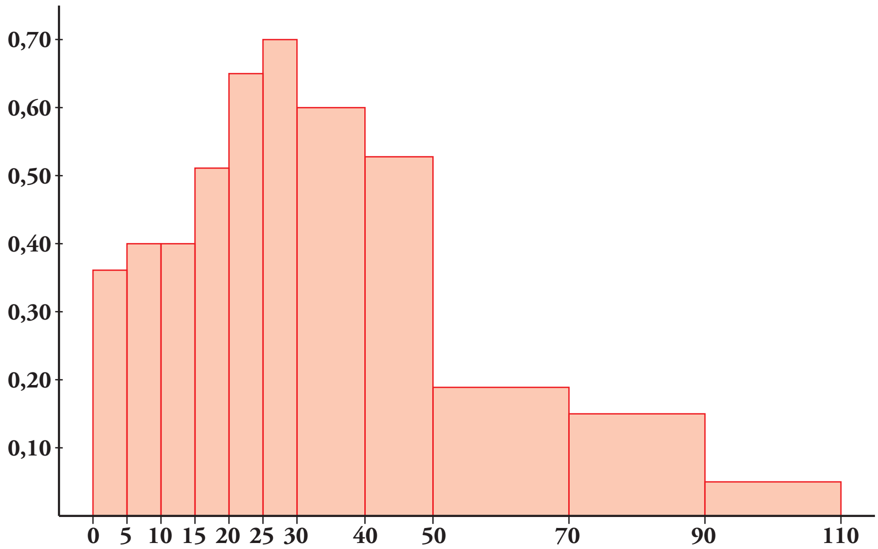
c) Sí, por lo comentado en la respuesta anterior. Hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas porque el número de formas de reordenar las secuencias es mucho mayor. Por ejemplo, a la casilla de la izquierda se puede llegar de una sola forma: +, +, +, +, +, +, +, y a la segunda, de 7 formas diferentes, que son C, +, +, +, +, +, + y sus reordenaciones. A la casilla de la derecha solo se puede llegar con la secuencia C, C, C, C, C, C, C.



1 Distribuciones estadísticas

Página 414

Hazlo tú. Halla las alturas de los demás rectángulos en el diagrama anterior.



2.° rectángulo:

Base = 10 – 5 = 5

Área = 2

Altura = 2 : 5 = 0,4

3.^er^ rectángulo:

Base = 15 – 10 = 5

Área = 2

Altura = 2 : 5 = 0,4

4.° rectángulo:

Base = 20 – 15 = 5

Área = 2,6

Altura = 2,6 : 5 = 0,52

5.° rectángulo:

Base = 25 – 20

Área = 3,2

Altura = 3,2 : 5 = 0,64

6.° rectángulo:

Base = 30 – 25 = 5

Área = 3,5

Altura = 3,5 : 5 = 0,7

8.° rectángulo:

Base = 50 – 40 = 10

Área = 5,3

Altura = 5,3 : 10 = 0,53

10.° rectángulo:

Base = 90 – 70 = 20

Área = 3

Altura = 3 : 20 = 0,15

11.° rectángulo:

Base = 110 – 90 = 20

Área = 1

Altura = 1 : 20 = 0,05

Página 415

1 **Calcula $\bar{x}$ y σ en esta distribución: tiempo que emplean en ir de su casa al colegio un grupo de alumnos. (Recuerda: al intervalo (0, 5] le corresponde su marca de clase 2,5; …).**

TIEMPO (min)	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]	(20, 25]	(25, 30]
N.° DE ALUMNOS	2	11	13	6	3	1

	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
(0, 5]	2,5	2	5	12,5
(5, 10]	7,5	11	82,5	618,75
(10, 15]	12,5	13	162,5	2 031,25
(15, 20]	17,5	6	105	1 837,5
(20, 25]	22,5	3	67,5	1 518,75
(25, 30]	27,5	1	27,5	756,25
		36	450	6 775

$$\bar{x} = \frac{450}{36} = 12{,}5 \text{ min}$$

$$\sigma^2 = \frac{6\,775}{36} - 12{,}5^2 = 31{,}944$$

$$\sigma = \sqrt{31{,}944} = 5{,}65 \text{ min}$$

2 Distribuciones de probabilidad de variable discreta

Página 416

1 ¿Verdadero o falso?

Ninguna de las siguientes distribuciones de probabilidad está definida correctamente:

a)

x_i	a	b	c
p_i	0,3	0,4	0,2

Porque $\sum p_i \neq 1$.

b)

x_i	a	b	c	d
p_i	0,3	0,4	0,5	–0,2

Porque una de las probabilidades es negativa.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

Página 417

2 Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente a la puntuación obtenida en el lanzamiento de un dado.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{16}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1	6
	1	$\frac{21}{6}$	$\frac{91}{6}$

$$\mu = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{91}{6} - 3,5^2} = 1,71$$

3 Si se tiran dos monedas, podemos obtener 0, 1 o 2 caras. Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
	1	1	$\frac{6}{4}$

$$\mu = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6}{4} - 1^2} = 0,71$$

4 **En una bolsa tenemos un cierto número de bolas numeradas:**

9 bolas con un *uno*, 5 con un *dos* y 6 con un *tres*

Sacamos una bola al azar y vemos qué número tiene.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	1
3	$\frac{6}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{54}{20}$
	1	$\frac{37}{20}$	$\frac{83}{20}$

$$\mu = \frac{37}{20} = 1,85$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{83}{20} - 1,85^2} = 0,85$$

3 La distribución binomial

Página 419

1 En una distribución binomial $B(10; 0{,}4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$ y el valor de μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}00605$

$$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$$

$$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}2007$$

$P[x = 10] = 0{,}4^{10} = 0{,}000105$

$\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 1{,}55$

2 Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

La distribución que cuenta el número de caras obtenidas es una $B(7; 0{,}5)$ porque el experimento equivale a repetir 7 veces el lanzamiento de una moneda y la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

$$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}2734$$

$$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}1641$$

$$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5 = 0{,}0547$$

$\mu = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}32$

3 ¿Verdadero o falso?

"El resultado de uno de los equipos en un partido de fútbol puede ser GANA o NO GANA. Por tanto, es una experiencia dicotómica."

Verdadero. La experiencia sí es dicotómica, puesto que la clave está en prestar atención a un suceso (ganar) o a su contrario (empatar o perder) independientemente de que alguno de ellos tenga varias posibilidades.

4 Distribuciones de probabilidad de variable continua

Página 421

Hazlo tú. Calcula:

a) $P[2 \le x \le 5]$

b) $P[2 \le x \le 2{,}5]$

a) $P[2 \le x \le 5] = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) $P[2 \le x \le 2{,}5] = (2{,}5-2) \cdot \frac{1}{4} = 0{,}125$

1 **Calcula k para que $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [3,8] \\ 0, & x \notin [3,8] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[4 < x < 6]$

b) $P[2 < x \le 5]$

c) $P[x = 6]$

d) $P[5 < x \le 10]$

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 8] = 5 \cdot k = 1 \;\rightarrow\; k = \frac{1}{5}$

a) $P[4 < x < 6] = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P[2 < x \le 5] = P[2 < x \le 3] + P[3 < x \le 5] = 0 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

c) $P[x = 6] = 0$

d) $P[5 < x \le 10] = P[5 < x \le 8] = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

2 **Calcula m para que $f(x) = \begin{cases} mx, & x \in [3,7] \\ 0, & x \notin [3,7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[3 < x < 5]$

b) $P[5 \le x < 7]$

c) $P[4 \le x \le 6]$

d) $P[6 \le x < 11]$

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 7] = \frac{3m + 7m}{2} \cdot 4 = 20m = 1 \;\rightarrow\; m = \frac{1}{20}$

a) $P[3 < x < 5] = \dfrac{\frac{3}{20} + \frac{5}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{2}{5}$

b) $P[5 \le x < 7] = \dfrac{\frac{5}{20} + \frac{7}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{3}{5}$

c) $P[4 \le x \le 6] = \dfrac{\frac{4}{20} + \frac{6}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

d) $P[6 \le x < 11] = P[6 \le x \le 7] = \dfrac{\frac{6}{20} + \frac{7}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{13}{20}$

5 La distribución normal

Página 424

1 Halla las siguientes probabilidades:

a) $P[z \le 0{,}84]$ **b)** $P[z < 1{,}5]$ **c)** $P[z < 2]$ **d)** $P[z < 1{,}87]$

e) $P[z < 2{,}35]$ **f)** $P[z \le 0]$ **g)** $P[z < 4]$ **h)** $P[z = 1]$

a) $P[z \le 0{,}84] = 0{,}7996$

b) $P[z < 1{,}5] = 0{,}9332$

c) $P[z < 2] = 0{,}9772$

d) $P[z < 1{,}87] = 0{,}9693$

e) $P[z < 2{,}35] = 0{,}9906$

f) $P[z \le 0] = 0{,}5$

g) $P[z < 4] = 1$

h) $P[z = 1] = 0$

2 Di el valor de k en cada caso:

a) $P[z \le k] = 0{,}7019$ **b)** $P[z < k] = 0{,}8997$

c) $P[z \le k] = 0{,}5040$ **d)** $P[z < k] = 0{,}7054$

a) $k = 0{,}53$

b) $k = 1{,}28$

c) $k = 0{,}01$

d) $k = 0{,}54$

3 Di el valor aproximado de k en cada caso:

a) $P[z < k] = 0{,}9533$ **b)** $P[z \le k] = 0{,}62$

a) $k = 1{,}68$

b) $k = 0{,}31$

Página 425

4 Halla:

a) $P[z > 1{,}3]$

b) $P[z < -1{,}3]$

c) $P[z > -1{,}3]$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z \le 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = P[z > 1{,}3] = 1 - P[z \le 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[z > -1{,}3] = P[z < 1{,}3] = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 + 0{,}9032 - 1 = 0{,}8782$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 + 0{,}9750 - 1 = 0{,}95$

5 **Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:**

a) $P[-1 \le z \le 1]$ **b)** $P[-2 \le z \le 2]$ **c)** $P[-3 \le z \le 3]$

d) $P[-4 \le z \le 4]$ **e)** $P[0 \le z \le 1]$ **f)** $P[0 \le z \le 4]$

a) $P[-1 \le z \le 1] = 2 \cdot P[0 \le z \le 1] = 2 \cdot (0,8413 - 0,5) = 0,6826$

b) $P[-2 \le z \le 2] = 2 \cdot P[0 \le z \le 2] = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$

c) $P[-3 \le z \le 3] = 2 \cdot P[0 \le z \le 3] = 2 \cdot 0,4987 = 0,9974$

d) $P[-4 \le z \le 4] = 2 \cdot P[0 \le z \le 4] = 2 \cdot 0,5 = 1,0$

e) $P[0 \le z \le 1] = 0,8413 - 0,5 = 0,3413$

f) $P[0 \le z \le 4] = 1 - 0,5 = 0,5$

Página 426

6 **En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 173]$ **b)** $P[x \ge 180,5]$

c) $P[174 \le x \le 180,5]$ **d)** $P[161 \le x \le 180,5]$

e) $P[161 \le x \le 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

a) $P[x \le 173] = P\left[z \le \dfrac{173-173}{6}\right] = P[z \le 0] = 0,5$

b) $P[x \ge 180,5] = P\left[z \ge \dfrac{180,5-173}{6}\right] = P[z \ge 1,25] = 1 - P[z < 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

c) $P[174 \le x \le 180,5] = P\left[\dfrac{174-173}{6} \le z \le \dfrac{180,5-173}{6}\right] = P[0,17 \le z \le 1,25] =$

$= 0,8944 - 0,5675 = 0,3269$

d) $P[161 \le x \le 180,5] = P\left[\dfrac{161-173}{6} \le z \le \dfrac{180,5-173}{6}\right] = P[-2 \le z \le 1,25] =$

$= 0,8944 + 0,9772 - 1 = 0,8716$

e) $P[161 \le x \le 170] = P\left[\dfrac{161-173}{6} \le z \le \dfrac{170-173}{6}\right] = P[-2 \le z \le -0,5] =$

$= P[0,5 \le z \le 2] = 0,9772 - 0,6915 = 0,2857$

f) $P[x = 174] = 0$

g) $P[x > 191] = P\left[z > \dfrac{191-173}{6}\right] = P[z > 3] = 1 - P[z \le 3] = 1 - 0,9987 = 0,0013$

h) $P[x < 155] = P\left[z < \dfrac{155-173}{6}\right] = P[z < -3] = P[z > 3] = 1 - P[z \le 3] = 1 - 0,9987 = 0,0013$

6 La distribución binomial se aproxima a la normal

Página 428

1 Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante su correspondiente aproximación a la normal. En todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua.

a) x es $B(100; 0{,}1)$. Calcula $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ y $P[5 < x < 15]$.

b) x es $B(1\,000; 0{,}02)$. Calcula $P[x > 30]$ y $P[x < 80]$.

c) x es $B(50; 0{,}9)$. Calcula $P[x > 45]$ y $P[x \le 30]$.

a) $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 10$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

$x = B(100; 0{,}1) \approx x' = N(10; 3)$

$P[x = 10] = 0$

$$P[x < 2] = P[x' < 1{,}5] = P\left[z < \frac{1{,}5 - 10}{3}\right] = P[z < -2{,}83] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z < 2{,}83] = 0{,}0023$$

$$P[5 < x < 15] = P[5{,}5 < x' < 14{,}5] = P\left[\frac{5{,}5 - 10}{3} < z < \frac{14{,}5 - 10}{3}\right] = P[-1{,}5 < z < 1{,}5] =$$

$$= 0{,}9332 \cdot 2 - 1 = 0{,}8664$$

b) $n \cdot p = 1\,000 \cdot 0{,}02 = 20$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 20$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}98} = 4{,}43$

$x = B(1\,000; 0{,}02) \approx x' = N(20; 4{,}43)$

$$P[x > 30] = P[x' > 30{,}5] = P\left[z > \frac{30{,}5 - 20}{4{,}43}\right] = P[z > 2{,}37] = 1 - P[z < 2{,}37] = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$$

$$P[x < 80] = P[x' < 79{,}5] = P\left[z < \frac{79{,}5 - 20}{4{,}43}\right] = P[z < 13{,}43] = 1$$

c) $n \cdot q = 50 \cdot 0{,}1 = 5$

Es mayor que 3, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 45$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}12$

$x = B(50; 0{,}9) \approx x' = N(45; 2{,}12)$

$$P[x > 45] = P[x' > 44{,}5] = P\left[z > \frac{44{,}5 - 45}{2{,}12}\right] = P[z > -0{,}24] = P[z < 0{,}24] = 0{,}5948$$

$$P[x \le 30] = P[x' \le 30{,}5] = P\left[z \le \frac{30{,}5 - 45}{2{,}12}\right] = P[z \le -6{,}84] = P[z \ge 6{,}84] = 1 - P[z \le 6{,}84] = 0$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 429

1. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú. **Lanzamos dos dados y nos quedamos con la mayor de las puntuaciones: 3 y 5 → 5; 4 y 4 → 4. Calcula μ y σ de esta distribución de probabilidad.**

Si, por ejemplo, la mayor puntuación es 4, las parejas con las que se consigue son (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4) y (4, 4). Por tanto la probabilidad de obtener 4 es $\frac{7}{36}$. Razonando análogamente con los demás casos obtenemos:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{45}{36}$
4	$\frac{7}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{112}{36}$
5	$\frac{9}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{225}{36}$
6	$\frac{11}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{396}{36}$
	1	$\frac{161}{36}$	$\frac{791}{36}$

$$\mu = \frac{161}{36} = 4,47$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{791}{36} - 4,47^2} = 1,41$$

2. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú. **En un dado irregular las probabilidades de sus caras son:**

$$\boldsymbol{P[1] = P[2] = P[3] = 0,1 \quad \text{y} \quad P[4] = P[5] = 0,2}$$

Averigua $P[6]$ y el valor de los parámetros μ y σ.

$P[E] = 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + P[6] = 1 \rightarrow P[6] = 1 - 0,7 = 0,3$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,4
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
5	0,2	1	5
6	0,3	1,8	10,8
	1	4,2	20,4

$$\mu = 4,2$$

$$\sigma = \sqrt{20,4 - 4,2^2} = 1,66$$

Página 430

3. Distribución binomial

Hazlo tú. Halla la probabilidad de que haya exactamente 2 parejas que conciban. Calcula también la probabilidad de que todas las parejas tengan éxito en el tratamiento y la de que alguna pareja no lo tenga.

$P[x = 2] = \binom{10}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8 = 0{,}233$

$P[x = 10] = 0{,}3^{10} = 0{,}000006$

El suceso "alguna pareja no tenga éxito" es el contrario de que "todas las parejas tengan éxito".

$P[\text{ALGUNA PAREJA NO TENGA ÉXITO}] = 1 - P[x = 10] = 1 - 0{,}000006 = 0{,}999994$

4. Distribución binomial

Hazlo tú. ¿Qué probabilidad tiene Ana de igualar o mejorar la marca de Raquel?

La probabilidad de que Ana iguale o mejore la marca de Raquel es:

$P[x \geq 13] = P[x = 13] + P[x = 14] + P[x = 15]$

$P[x = 13] = \binom{15}{13} \cdot 0{,}72^{13} \cdot 0{,}28^2 = 0{,}1150$

Por tanto $P[x \geq 13] = 0{,}1150 + 0{,}0426 + 0{,}0072 = 0{,}1648$

5. Función de densidad

Hazlo tú. Halla el valor de k para que $f(x) = 0{,}4 + kx$, si $x \in [0, 4]$ y 0 en el resto, sea función de densidad. Calcula $P[x \geq 3]$, $P[x \leq 1]$ y $P[1 \leq x \leq 3]$.

La función dada, en el intervalo [0, 4], es un segmento de extremos:

$f(0) = 0{,}4 \rightarrow (0; 0{,}4)$

$f(4) = 0{,}4 + 4k \rightarrow (4; 0{,}4 + 4k)$

El área limitada por esta función y el eje horizontal es $\frac{0{,}4 + 0{,}4 + 4k}{2} \cdot 4 = 1{,}6 + 8k$ ya que fuera del intervalo [0, 4] vale 0.

Ahora $1{,}6 + 8k = 1 \rightarrow k = -0{,}075$

Por tanto, si $x \in [0, 4] \rightarrow f(x) = 0{,}4 - 0{,}075x$

$P[x \geq 3] = P[3 \leq x \leq 4] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 3 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 0{,}1375$

$P[x \leq 1] = P[0 \leq x \leq 1] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 0 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 1}{2} \cdot 1 = 0{,}3625$

$P[1 \leq x \leq 3] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 1 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 0{,}5$

Página 431

6. Manejo de la tabla de la $N(0, 1)$

Hazlo tú. Calcula $P[-0{,}83 < z < 0{,}83]$.

$P[-0{,}83 < z < 0{,}83] = P[z < 0{,}83] + P[z < 0{,}83] - 1 = 2 \cdot 0{,}7969 - 1 = 0{,}5934$

7. Distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Hazlo tú. En esta misma distribución, halla la proporción de árboles cuyas alturas están comprendidas entre 10 m y 11 m.

$$P[10 \le x \le 11] = P\left[\frac{10-9}{1{,}5} \le z \le \frac{11-9}{1{,}5}\right] = P[0{,}67 \le z \le 1{,}33] = P[z \le 1{,}33] - P[z < 0{,}67] = 0{,}1596$$

Página 432

9. Aproximación de la binomial a la normal

Hazlo tú. a) En el primer apartado hemos tomado diciembre como 1/12 del año. Halla la misma probabilidad tomando diciembre como 31 días de los 365 días del año.

b) ¿Qué probabilidad hay de que al menos 5 alumnos hayan nacido un domingo?

a) Se trata de una distribución binomial $B(30; 31/365) = B(30; 0{,}085)$.

$P[x \ge 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}915^{30} = 0{,}9304$

b) En este caso tenemos una distribución binomial $B(30; 1/7) = B(30; 0{,}143)$.

Como $n \cdot p = 30 \cdot 0{,}143 = 4{,}3 > 3$ podemos aproximar usando la normal de parámetros:

$\mu = 4{,}3$

$\sigma = \sqrt{30 \cdot 0{,}143 \cdot 0{,}857} = 1{,}92$

$x = B(30; 0{,}143) \approx x' = N(4{,}3; 1{,}92)$

$$P[x \ge 5] = P[x' \ge 4{,}5] = P\left[z \ge \frac{4{,}5 - 4{,}3}{1{,}92}\right] = P[z \ge 0{,}10] = 1 - P[z < 0{,}10] = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 433

1. Distribuciones de probabilidad

Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 o 2).

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcular la media y la desviación típica.

Como se extraen las dos cartas a la vez:

$$P[0 \text{ ases}] = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$$

$$P[2 \text{ ases}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

$$P[1 \text{ as}] = 1 - \frac{21}{26} - \frac{1}{130} = \frac{12}{65}$$

Con estos datos construimos la tabla:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{21}{26}$	0	0
1	$\frac{12}{65}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{12}{65}$
2	$\frac{1}{130}$	$\frac{2}{130}$	$\frac{4}{130}$
	1	$\frac{26}{130}$	$\frac{28}{130}$

$$\mu = \frac{26}{130} = 0{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{28}{130} - 0{,}2^2} = 0{,}42$$

2. Tipificación

En una cierta prueba, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, respectivamente. ¿Cuál es la media y cuál la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}8 = \dfrac{88-\mu}{\sigma} \\ -0{,}4 = \dfrac{64-\mu}{\sigma} \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}8\sigma = 88 - \mu - 0{,}4\sigma = 64 - \mu\Big\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu + 0{,}8\sigma = 88 \\ \mu - 0{,}4\sigma = 64 \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 72,\ \sigma = 20$$

3. Binomial

Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

Tenemos una experiencia dicotómica en la que el éxito es acertar la respuesta con probabilidad $p = \frac{1}{4}$.

La experiencia se repite $n = 10$ veces. Por tanto el número de respuestas correctas sigue una distribución $B(10; 1/4)$.

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0,146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2])$

$P[x = 0] = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0,056$

$P[x = 1] = \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 0,188$

$P[x = 2] = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0,282$

$P[x > 2] = 1 - (0,056 + 0,188 + 0,282) = 0,474$

c) $P[x \le 9] = 1 - P[x = 10] = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0,999999046$

4. Binomial

En una familia con 6 hijos, ¿qué es más probable?

- ***Que haya tantas chicas como chicos.***
- ***Que haya más chicas que chicos.***

La distribución del número de chicas es $B(6; 1/2)$

Para que haya tantas chicas como chicos tiene que haber 3 de cada sexo, por tanto nos piden:

$P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

La probabilidad de que haya más chicas que chicos es:

$P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6]$

$P[x = 4] = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$

$P[x = 5] = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$

$P[x = 6] = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

$P[x > 3] = \frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$

Por lo que $P[x > 3] > P[x = 3]$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 434

Para practicar

Distribuciones de probabilidad

1 Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros μ y σ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

La suma de todas las p_i es 1. Por tanto:

$0,1 + 0,3 + P[2] + 0,1 = 1 \rightarrow P[2] = 0,5$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
	1	1,6	3,2

$\mu = 1,6$

$\sigma = \sqrt{3,2 - 1,6^2} = 0,8$

2 En una urna hay diez bolas con los números 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 10. Sacamos una bola y anotamos el resultado. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$
5	$\frac{2}{10}$	1	5
6	$\frac{1}{10}$	1	10
	1	$\frac{37}{10}$	$\frac{199}{10}$

$\mu = \frac{37}{10} = 3,7$

$\sigma = \sqrt{\frac{199}{10} - \left(\frac{37}{10}\right)^2} = 2,49$

3 **Una caja contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

a) Al no haber reemplazamiento, las diferentes probabilidades son:

$P[0 \text{ rojas}] = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$

$P[2 \text{ rojas}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$

$P[1 \text{ roja}] = 1 - \frac{7}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$

x_i	p_i
0	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$
	1

b) Cuando hay reemplazamiento, la bola se devuelve a la urna y se obtienen las mismas probabilidades en las dos extracciones.

$P[0 \text{ rojas}] = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$

$P[2 \text{ rojas}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$

$P[1 \text{ roja}] = 1 - \frac{49}{100} - \frac{9}{100} = \frac{21}{50}$

x_i	p_i
0	$\frac{49}{100}$
1	$\frac{21}{50}$
2	$\frac{9}{100}$
	1

NOTA: En este caso tenemos una experiencia dicotómica en la que el éxito es extraer una bola roja con probabilidad $p = \frac{3}{10}$ y se realizan $n = 2$ repeticiones del exprimento. Por tanto, el número de bolas rojas extraídas sigue una distribución $B\left(2, \frac{3}{10}\right)$.

Distribución binomial

4 **Reconoce en cada uno de los siguientes casos una distribución binomial y di los valores de n, p, q, μ y σ.**

- **Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?**
- **En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.**
- **Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.**
- **El 1 % de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.**

- Es una binomial $B\left(50, \frac{1}{3}\right)$.

  $n = 50;\ p = \frac{1}{3};\ q = \frac{2}{3};\ \mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67;\ \sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$

- Si $x = B\left(30, \frac{1}{3}\right)$, la distribución del número de preguntas acertadas es $20 + x$ ya que el alumno conoce las respuestas de 20 preguntas.

  $n = 30;\ p = \frac{1}{3};\ q = \frac{2}{3};\ \mu = 20 + 30 \cdot \frac{1}{3} = 30;\ \sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$

- Es una binomial $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$.

  $n = 400;\ p = \frac{1}{2};\ q = \frac{1}{2};\ \mu = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200;\ \sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$

- Se trata de una binomial $B\left(1000, \frac{1}{100}\right)$.

  $n = 1\,000;\ p = \frac{1}{100};\ q = \frac{99}{100};\ \mu = 1\,000 \cdot \frac{1}{100} = 10;\ \sigma = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}} = 3{,}15$

5 En una distribución binomial $B(9;\ 0{,}2)$, calcula:

a) $P[x < 3]$ **b)** $P[x \ge 7]$ **c)** $P[x \ne 0]$ **d)** $P[x \le 9]$

a) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]$

$P[x = 0] = 0{,}8^9 = 0{,}1342$

$P[x = 1] = \binom{9}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}302$

$P[x = 2] = \binom{9}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}302$

$P[x < 3] = 0{,}1342 + 0{,}302 + 0{,}302 = 0{,}7382$

b) $P[x \ge 7] = P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9]$

$P[x = 7] = \binom{9}{7} \cdot 0{,}2^7 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0003$

$P[x = 8] = \binom{9}{8} \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8 = 0{,}00002$

$P[x = 9] = 0{,}2^9 = 0{,}0000005$

$P[x \ge 7] = 0{,}0003 + 0{,}00002 + 0{,}0000005 = 0{,}0003205$

c) $P[x \ne 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}1342 = 0{,}8658$

d) $P[x \le 9] = 1$

Función de densidad

6 Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes:

a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x$ **con** $x \in [0, 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

Veamos si cada una cumple las condiciones.

a) $f(x)$ es no negativa en el intervalo $[0, 2]$.

El área bajo la curva es $\frac{0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 2}{2} \cdot 2 = 2$

Por tanto, no lo es por no cumplir la 2.ª condición de las funciones de densidad.

b) $f(x)$ toma valores negativos en el intervalo $[0, 2]$. Por ejemplo, $f(1) = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$.

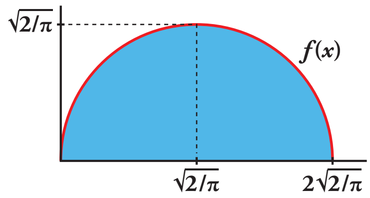
Luego no puede ser una función de densidad.

c) $f(x)$ es no negativa en el intervalo [0, 2].

El área bajo la curva es $\dfrac{1+1-0,5\cdot 2}{2}\cdot 2 = 1$.

Esta función sí cumple las dos condiciones y, en consecuencia, sí es una función de densidad.

7 **Comprueba que la función $f(x)$, representada a la derecha, es de densidad. Calcula $P[x > \sqrt{2/\pi}]$.**



Observamos que la función es no negativa.

El área bajo la curva es el área de un semicírculo de radio $\sqrt{2/\pi}$.

Luego es: $\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\sqrt{2/\pi}^{\,2} = 1$

La probabilidad pedida es el área de la mitad de este semicírculo. Por tanto: $P\left[x > \sqrt{2/\pi}\right] = \dfrac{1}{2}$

Manejo de la tabla *N*(0, 1)

8 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b) $P[z \le 2]$** **c) $P[z \ge 2]$**

d) $P[z \le -2]$ **e) $P[z \ge -2]$** **f) $P[-2 \le z \le 2]$**

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \le 2] = 0,9772$

c) $P[z \ge 2] = 1 - P[z < 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$

d) $P[z \le -2] = P[z \ge 2] = 0,0228$

e) $P[z \ge -2] = P[z \le 2] = 0,9772$

f) $P[-2 \le z \le 2] = 2\cdot(0,9772 - 0,5) = 0,9544$

9 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \le 1,83]$ **b) $P[z \ge 0,27]$**

c) $P[z \le -0,87]$ **d) $P[z \ge 2,5]$**

a) $P[z \le 1,83] = 0,9664$

b) $P[z \ge 0,27] = 1 - P[z < 0,27] = 1 - 0,6065 = 0,3935$

c) $P[z \le -0,87] = P[z \ge 0,87] = 1 - P[z < 0,87] = 1 - 0,8078 = 0,1922$

d) $P[z \ge 2,5] = 1 - P[z < 2,5] = 1 - 0,9938 = 0,00620$

10 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 1,6]$ **b) $P[-2,71 \le z \le -1,83]$**

c) $P[1,5 \le z \le 2,5]$ **d) $P[-1,87 \le z \le 1,25]$**

a) $P[z = 1,6] = 0$

b) $P[-2,71 \le z \le -1,83] = P[1,83 \le z \le 2,71] = P[z \le 2,71] - P[z \le 1,83] = 0,9966 - 0,9664 = 0,0302$

c) $P[1,5 \le z \le 2,5] = P[z \le 2,5] - P[z \le 1,5] = 0,9938 - 0,9332 = 0,0606$

d) $P[-1,87 \le z \le 1,25] = P[z \le 1,25] - P[z \le -1,87] = P[z \le 1,25] - P[\ \ge 1,87] =$

$= P[z \le 1,25] - (1 - P[z < 1,87]) = 0,8944 + 0,9693 - 1 = 0,8637$

11 Calcula k en cada uno de los siguientes casos:

a) $P[z < k] = 0,8365$ **b) $P[z > k] = 0,8365$**

c) $P[z < k] = 0,1894$ **d) $P[-k < z < k] = 0,95$**

a) $k = 0,98$

b) $P[z > k] = 0,8365 \to P[z < -k] = 0,8365 \to -k = 0,98 \to k = -0,98$

c) $P[z < k] = 0,1894 \to P[z > -k] = 0,1894 \to 1 - P[z \le -k] = 0,1894 \to$

$\to P[z \le -k] = 1 - 0,1894 = 0,8106 \to -k = 0,88 \to k = -0,88$

d) $P[-k < z < k] = 2 \cdot P[z < k] - 1 \to 2 \cdot P[z < k] - 1 = 0,95 \to P[z < k] = 0,975 \to k = 1,96$

Tipificación

12 En un examen tipo test, la media fue 28 puntos y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada en los alumnos que obtuvieron:

a) 38 puntos **b) 14 puntos**

c) 45 puntos **d) 10 puntos**

a) $\dfrac{38-28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14-28}{10} = -1,4$

c) $\dfrac{45-28}{10} = 1,7$ d) $\dfrac{10-28}{10} = -1,8$

13 Si en el examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo? ¿Cuántos puntos corresponden al valor tipificado de –0,2?

a) $\dfrac{x-28}{10} = 0,8 \to x = 36$ fue la puntuación obtenida.

b) $\dfrac{x-28}{10} = -0,2 \to x = 26$ son los puntos que le corresponden.

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

14 En una distribución $N(43, 10)$, calcula cada una de estas probabilidades:

a) $P[x \ge 43]$ **b) $P[x \le 30]$**

c) $P[40 \le x \le 55]$ **d) $P[30 \le x \le 40]$**

a) $P[x \ge 43] = P\left[z \ge \dfrac{43-43}{10}\right] = P[z \ge 0] = 0,5$

b) $P[x \le 30] = P\left[z \le \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \le -1,3] = P[z \ge 1,3] = 1 - P[z < 1,3] = 1 - 0,9032 = 0,0968$

c) $P[40 \le x \le 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \le z \le \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0,3 \le z \le 1,2] = P[z \le 1,2] + P[z \le 0,3] - 1 =$

$= 0,8849 + 0,6179 - 1 = 0,5028$

d) $P[30 \le x \le 40] = P\left[\dfrac{30-43}{10} \le z \le \dfrac{40-43}{10}\right] = P[-1,3 \le z \le -0,3] = P[0,3 \le z \le 1,3] =$

$= P[z \le 1,3] - P[z \le 0,3] = 0,9032 - 0,6179 = 0,2853$

15 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \le 136]$

b) $P[120 \le x \le 155]$

c) $P[x \ge 185]$

d) $P[140 \le x \le 160]$

a) $P[x \le 136] = P\left[z \le \frac{136-151}{15}\right] = P[z \le -1] = P[z \ge 1] = 1 - P[z < 1] = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

b) $P[120 \le x \le 155] = P\left[\frac{120-151}{15} \le z \le \frac{155-151}{15}\right] = P[-2{,}07 \le z \le 0{,}27] =$

$= P[z \le 0{,}27] - P[z \le -2{,}07] = 0{,}6065 + 0{,}9808 - 1 = 0{,}5873$

c) $P[x \ge 185] = P\left[z \ge \frac{185-155}{15}\right] = P[z \ge 2] = 1 - P[z < 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

d) $P[140 \le x \le 160] = P\left[\frac{140-151}{15} \le z \le \frac{160-151}{15}\right] = P[-0{,}73 \le z \le 0{,}6] =$

$= P[z \le 0{,}6] + P[z \le 0{,}73] - 1 = 0{,}7258 + 0{,}7673 - 1 = 0{,}4931$

Binomial → Normal

16 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

El número de cincos obtenidos al lanzar 1 000 veces un dado sigue una distribución $B\left(1000, \frac{1}{6}\right)$.

Como $n \cdot p = 1\,000 \cdot \frac{1}{6} = 166{,}67$ es mayor que 5, podemos aproximar esta binomial mediante una normal de parámetros $\mu = 166{,}67$ y $\sigma = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 11{,}79$.

Por tanto $x = B\left(1000, \frac{1}{6}\right) \approx x' = N(166{,}67;\ 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P\left[z \le \frac{99{,}5-166{,}67}{11{,}79}\right] = P[z \le -5{,}7] = P[z \ge 5{,}7] = 1 - P[z < 5{,}7] \approx 0$

La probabilidad obtenida es casi nula y podemos afirmar que es prácticamente imposible que eso ocurra.

17 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) **sea mayor que 200.**

b) **esté entre 180 y 220.**

El número de caras obtenidas al lanzar 400 veces una moneda sigue una distribución $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$.

Como $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$ es mayor que 5, podemos aproximar esta binomial mediante una normal de parámetros $\mu = 200$ y $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$.

Por tanto $x = B\left(400, \frac{1}{2}\right) \approx x' = N(200, 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P\left[z \ge \frac{200{,}5-200}{10}\right] = P[z \ge 0{,}05] = 1 - P[z < 0{,}05] =$

$= 1 - 0{,}5199 = 0{,}4801$

b) $P[180 < x < 220] = P[180{,}5 \le x' < 219{,}5] = P\left[\frac{180{,}5-200}{10} < z < \frac{219{,}5-200}{10}\right] =$

$= P[-1{,}95 \le z \le 1] = 2 \cdot P[z \le 1{,}95] - 1 = 2 \cdot 0{,}9744 - 1 = 0{,}9488$

Página 435

Para resolver

18 **La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por esta tabla:**

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	a	b	c	0,2

Sabemos que $P[x \le 2] = 0,7$ y que $P[x \ge 2] = 0,75$.

Halla los valores de a, b y c y calcula μ y σ.

$P[x \le 2] = 0,1 + a + b = 0,7$; $P[x \ge 2] = b + c + 0,2 = 0,75$

Además $0,1 + a + b + c + 0,2 = 1$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0,6 \\ b+c=0,55 \\ a+b+c=0,7 \end{array}\right\} \to a = 0,15,\ b = 0,45,\ c = 0,1$$

Finalmente:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,9	1,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
	1	2,15	6,05

$\mu = 2,15$

$\sigma = \sqrt{6,05 - 2,15^2} = 1,19$

19 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2, …, 10, 11 y 12 con probabilidades distintas. Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.**

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{1}{28}$	0	0
1	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
2	$\frac{2}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{8}{28}$
3	$\frac{2}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{18}{28}$
4	$\frac{3}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{48}{28}$
5	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{75}{28}$
6	$\frac{4}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{144}{28}$
7	$\frac{3}{28}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{147}{28}$
8	$\frac{3}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{192}{28}$
9	$\frac{2}{28}$	$\frac{18}{28}$	$\frac{162}{28}$
10	$\frac{2}{28}$	$\frac{20}{28}$	$\frac{200}{28}$
11	$\frac{1}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{121}{28}$
12	$\frac{1}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{144}{28}$
	1	6	45

$\mu = \frac{168}{28} = 6$

$\sigma = \sqrt{45 - 6^2} = 3$

20 **Un alumno ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en el examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno. Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente. Halla μ y σ.**

Calculamos primero las distintas probabilidades:

$P[\text{ESTUDIAR } 2] = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0{,}15$

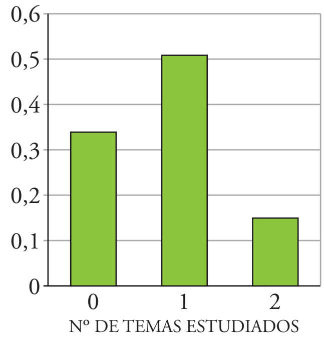
$P[\text{ESTUDIAR } 0] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{30} = \frac{17}{50} = 0{,}34$

$P[\text{ESTUDIAR } 1] = 1 - 0{,}15 - 0{,}34 = 0{,}51$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,34	0	0
1	0,51	0,51	0,51
2	0,15	0,3	0,6
	1	0,81	1,51

$\mu = 0{,}81$

$\sigma = \sqrt{1{,}51 - 0{,}81^2} = 0{,}92$



21 **Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos cinco veces y anotamos el número de cruces. Haz una tabla con la distribución de probabilidad, represéntala gráficamente y calcula su media y su desviación típica.**

Se trata de una experiencia dicotómica en la que el éxito es obtener cruz con probabilidad $p = 0{,}4$. El número de cruces obtenidas sigue una distribución $B(5; 0{,}4)$.

$P[x = 0] = 0{,}6^5 = 0{,}08$

$P[x = 1] = \binom{5}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}26$ $\qquad P[x = 2] = \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}34$

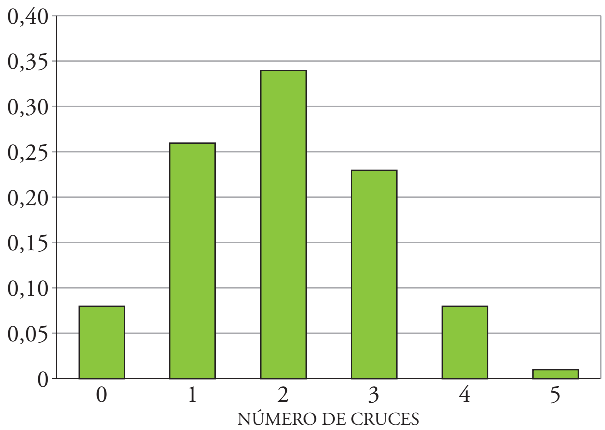
$P[x = 3] = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}23$ $\qquad P[x = 4] = \binom{5}{4} \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 = 0{,}08$

$P[x = 5] = 0{,}4^5 = 0{,}01$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,08	0	0
1	0,26	0,26	0,26
2	0,34	0,68	1,36
3	0,23	0,69	2,07
4	0,08	0,32	1,28
5	0,01	0,05	0,25
	1	2	5,22

$\mu = 2$

$\sigma = \sqrt{5{,}22 - 2^2} = 1{,}1$



NOTA: Observa que los parámetros así obtenidos coinciden con los calculados a partir de la fórmula de la media y de la desviación típica de una distribución binomial.

22 **La probabilidad de que una flecha lanzada por un arquero dé en la diana es 0,4. Si se lanzan 6 flechas, halla la probabilidad de que:**

a) solo una dé en la diana.

b) al menos una dé en la diana.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que el éxito es dar en la diana con probabilidad $p = 0{,}4$. El número de aciertos sigue una distribución $x = B(6;\ 0{,}4)$.

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}19$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}6^6 = 0{,}95$

23 **En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2 % son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos.**

Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

El número de tornillos defectuosos de cada caja sigue una distribución $x = B\left(50, \frac{2}{100}\right)$

a) $P[x = 0] = 0{,}98^{50} = 0{,}36$

b) $P[x = 1] = \binom{50}{1} \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}37$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - P[x = 0] - P[x = 1] - P[x = 2]$

$P[x = 2] = \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48} = 0{,}19$

$P[x > 2] = 1 - 0{,}36 - 0{,}37 - 0{,}19 = 0{,}08$

24 **Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en 8 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra el tratamiento a 5 enfermos, calcula la probabilidad:**

a) De que los cinco pacientes mejoren.

b) De que, al menos, tres no experimenten mejoría.

Se trata de una distribución binomial con probabilidad de éxito $\frac{8}{10} \to B(5;\ 0{,}8)$.

a) $P[x = 5] = 0{,}8^5 = 0{,}3277$

b) $P[x \leq 2] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]$

$P[x = 0] = 0{,}2^5 = 0{,}00032$

$P[x = 1] = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064$

$P[x = 2] = \binom{5}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$

$P[x \leq 2] = 0{,}05792$

25 **Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: que cada uno gane dos partidas de cuatro o tres partidas de seis? (Los empates no se consideran.)**

Se pide comparar el número de éxitos en binomiales con valores de n distintos, en la primera $n = 4$ y en la segunda $n = 6$.

$$B(4;\ 0{,}5) \ \to\ P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}375$$

$$B(6;\ 0{,}5) \ \to\ P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125$$

Es decir, cuantas más partidas se jueguen, más difícil resulta que ganen el mismo número de veces.

26 **Para controlar la calidad de un producto envasado, se eligen al azar, de una caja que contiene 50 envases, tres de ellos. Sabemos que, por término medio, en cada caja hay 5 cuya calidad es deficiente.**

a) Halla la probabilidad de que, de los tres, no haya ninguno, uno o dos deficientes.

b) Si el primero resulta deficiente, ¿cuál es la probabilidad de que, de los tres, haya uno o dos deficientes?

a) En un envase la probabilidad de que un producto elegido al azar sea deficiente es $\dfrac{5}{50}$.

$$P[\text{NINGUNO ES DEFICIENTE}] = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} = 0{,}724$$

El producto deficiente puede ser elegido en primer, segundo o tercer lugar. Luego:

$$P[\text{UNO ES DEFICIENTE}] = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{44}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} = 0{,}253$$

Para que haya dos deficientes, uno no debe serlo y puede ser elegido en primer, segundo o tercer lugar. Luego:

$$P[\text{DOS SON DEFICIENTES}] = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} = 0{,}023$$

b) $$P[\text{UNO ES DEFICIENTE/PRIMERO DEFICIENTE}] = \frac{P[\text{UNO ES DEFICIENTE Y PRIMERO DEFICIENTE}]}{P[\text{PRIMERO DEFICIENTE}]} =$$

$$= \frac{\dfrac{5}{50} \cdot \dfrac{45}{49} \cdot \dfrac{44}{48}}{\dfrac{5}{50}} = 0{,}84$$

$$P[\text{DOS SON DEFICIENTES/PRIMERO DEFICIENTE}] = \frac{P[\text{DOS SON DEFICIENTES Y PRIMERO DEFICIENTE}]}{P[\text{PRIMERO DEFICIENTE}]} =$$

$$= \frac{\dfrac{5}{50} \cdot \dfrac{45}{49} \cdot \dfrac{4}{48} + \dfrac{5}{50} \cdot \dfrac{4}{49} \cdot \dfrac{45}{48}}{\dfrac{5}{50}} = 0{,}15$$

27 **Halla el valor de k para que la siguiente función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2k(x-1) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Halla estas probabilidades: $P[1 \le x \le 3]$, $P[x \le 3]$, $P[0 \le x \le 7]$

Calculamos el área bajo la curva:

Intervalo $[0, 2] \to$ área $= \dfrac{2 \cdot 2k}{2} = 2k$ ya que el segmento definido por $f(x)$ forma un triángulo con el eje horizontal.

Intervalo $[2, 4] \to$ área $= \dfrac{2k + 6k}{2} \cdot 2 = 8k$

El área total es $10k$ y debe ser igual a 1, luego $k = \dfrac{1}{10}$.

$$P[1 \le x \le 3] = P[1 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{10}}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{2}{10} + \frac{4}{10}}{2} \cdot 1 = \frac{9}{20}$$

$$P[x \le 3] = P[0 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{2 \cdot \frac{2}{10}}{2} + \frac{\frac{2}{10} + \frac{4}{10}}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$P[0 \le x \le 7] = 1$

28 **Calcula el valor de a para que la siguiente función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1 \le x \le a \\ 1/2 & \text{si } a < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula, además, las siguientes probabilidades: $P[1 \le x \le 2]$, $P[x \le 3]$, $P[x > 2]$

Calculamos el área bajo la curva y la igualamos a 1:

$$\frac{1}{4} \cdot (a-1) + \frac{1}{2} \cdot (4-a) = \frac{7-a}{4} \to \frac{7-a}{4} = 1 \to a = 3$$

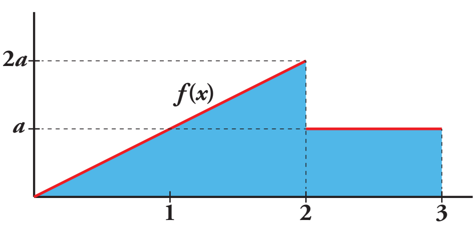
$$P[1 \le x \le 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$P[x \le 3] = P[1 \le x \le 3] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$P[x > 2] = P[2 < x \le 3] + P[3 < x \le 4] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

29 **Calcula el valor de a para que la siguiente gráfica sea una representación de una función de densidad:**

Escribe su expresión analítica.



Para que sea una función de densidad el área total debe ser igual a 1.

Área $= \dfrac{2 \cdot 2a}{2} + 1 \cdot a = 3a \to 3a = 1 \to a = \dfrac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} 2/3\,x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

30 **En una población de estudiantes se ha comprobado que la calificación obtenida en Inglés sigue una distribución normal de media 5, si se ha seguido el método A, y una normal de media 6, si se ha seguido el método B.**

Se sabe que el 4 % de los alumnos que han seguido el método A obtienen una calificación inferior a 3,5 y que el 2 % de los alumnos que han seguido el método B superan el 8.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5?

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes del método B obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6?

Con los datos del problema tenemos que calcular, en primer lugar, las desviaciones típicas de las normales.

Para el método A la calificación sigue una normal $x_1 = N(5, \sigma_1)$.

$$P[x_1 \le 3{,}5] = 0{,}04 \;\to\; P\left[z \le \frac{3{,}5-5}{\sigma_1}\right] = 0{,}04 \;\to\; P\left[z \ge -\frac{3{,}5-5}{\sigma_1}\right] = 0{,}04 \;\to$$

$$\to\; P\left[z \le \frac{1{,}5}{\sigma_1}\right] = 1 - 0{,}4 = 0{,}96 \;\to\; \frac{1{,}5}{\sigma_1} = 1{,}75 \;\to\; \sigma_1 = 0{,}86$$

Para el método B la calificación sigue una normal $x_2 = N(6, \sigma_2)$.

$$P[x_2 \ge 8] = 0{,}02 \;\to\; P\left[z \ge \frac{8-6}{\sigma_2}\right] = 0{,}02 \;\to\; P\left[z \le \frac{8-6}{\sigma_2}\right] = 1 - 0{,}02 = 0{,}98 \;\to$$

$$\to\; \frac{2}{\sigma_2} = 2{,}05 \;\to\; \sigma_2 = 0{,}98$$

a) $P[x_1 \le 6{,}5] = P\left[z \le \frac{6{,}5-5}{0{,}86}\right] = P[z \le 1{,}74] = 0{,}9591 \;\to$ Prácticamente el 96 % de los estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5.

b) $P[4 \le x_2 \le 6] = P\left[\frac{4-6}{0{,}98} \le z \le \frac{6-6}{0{,}98}\right] = P[-2{,}04 \le z \le 0] = P[0 \le z \le 2{,}04] =$

$= P[z \le 2{,}04] - 0{,}4793 \;\to$ Casi el 48 % de los estudiantes que siguen el método B obtendrán una calificación comprendida entre 4 y 6.

Página 436

31 **Para iluminar el recinto de un estadio deportivo se quieren instalar focos. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 1 500 h y desviación típica de 200 h.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se compran 2 000 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan al menos 1 000 horas?

Llamemos $x = N(1\,500, 200)$ a la curva normal.

a) $P[x \ge 1\,000] = P\left[z \ge \frac{1000-1500}{200}\right] = P[z \ge -2{,}5] = P[z \le 2{,}5] = 0{,}9938$

b) La probabilidad anterior muestra que el 99,38 % de los focos debería lucir, al menos, 1 000 h. Por tanto:

$0{,}9938 \cdot 2\,000 = 1\,987{,}6 \;\to\;$ 1 987 focos deberían lucir como mínimo 1 000 h.

32 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 8 kg. Halla la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) más de 71 kg. **b) entre 73 y 79 kg.** **c) menos de 80 kg.** **d) más de 85 kg.**

Llamemos $x = N(75, 8)$ a la curva normal.

a) $P[x > 71] = P\left[z > \frac{71-75}{8}\right] = P[z > -0,5] = P[z < 0,5] = 0,6915$

b) $P[73 < x < 79] = P\left[\frac{73-75}{8} < z < \frac{79-75}{8}\right] = P[-0,25 < z < 0,5] =$

$= P[z < 0,5] + P[z < 0,25] - 1 = 0,2902$

c) $P[x < 80] = P\left[z < \frac{80-75}{8}\right] = P[z < 0,63] = 0,7357$

d) $P[x > 85] = P\left[z > \frac{85-75}{8}\right] = P[z > 1,25] = 1 - P[z \le 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

33 **La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?**

Llamemos $x = N(10, 2)$ a la curva normal.

$P[x < 13] = P\left[z < \frac{13-10}{2}\right] = P[z < 1,5] = 0,9332 \rightarrow$ El 93,32 % no cumpliría la garantía al durar menos de 13 años.

34 **El 20 % de los alumnos con mejor nota de una escuela pueden acceder a estudios superiores. Sabemos que las notas medias finales en esa escuela se distribuyen normalmente con media 5,8 y desviación típica 2. ¿Cuál es la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores?**

Llamemos $x = N(5,8; 2)$ a la curva normal.

La nota mínima será aquella por encima de la cual se encuentra el 20 % de los alumnos, es decir, será el valor x_0 tal que:

$P[x > x_0] = \frac{20}{100} \rightarrow 1 - P[x \le x_0] = 0,2 \rightarrow P[x \le x_0] = 0,8$

El valor tipificado que verifica la relación anterior es 0,84. Luego, $\frac{x_0 - 5,8}{2} = 0,84 \rightarrow x_0 = 7,48$ es la nota mínima para acceder a estudios superiores.

35 **Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen según una $N(65, 18)$.**

Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigne uno de los siguientes comentarios:

- **Duro de oído.**
- **Poco sensible a la música.**
- **Normal.**
- **Sensible a la música.**
- **Extraordinariamente dotado para la música.**

de modo que haya en cada uno de los grupos, respectivamente, un 10 %, un 35 %, un 30 %, un 20 % y un 5 % del total de individuos observados.

a) ¿En qué puntuaciones pondrías los límites entre los distintos grupos?

b) ¿Qué comentario se le haría a una persona que obtuviera una puntuación de 80? ¿Y a otra que obtuviera una puntuación de 40?

a) Calculamos las puntuaciones máximas de cada grupo:

Duro de oído:

$$P[x < x_0] = \frac{10}{100} \rightarrow P[x > -x_0] = 0{,}1 \rightarrow P[x \le -x_0] = 0{,}9 - \frac{x_0 - 65}{18} = 1{,}28 \rightarrow x_0 = 42$$

Poco sensible a la música:

$$P[x < x_1] = \frac{45}{100} \rightarrow P[x > -x_1] = 0{,}45 \rightarrow P[x \le -x_1] = 0{,}55 - \frac{x_1 - 65}{18} = 0{,}13 \rightarrow x_1 = 63$$

Normal:

$$P[x < x_2] = \frac{75}{100} = 0{,}75 \rightarrow \frac{x_2 - 65}{18} = 0{,}67 \rightarrow x_2 = 77$$

Sensible a la música:

$$P[x < x_3] = \frac{95}{100} = 0{,}95 \rightarrow \frac{x_3 - 65}{18} = 1{,}64 \rightarrow x_3 = 95$$

Extraordinariamente dotado para la música:

Aquellos con puntuación superior a 95.

b) Una persona con puntuación de 80 sería sensible a la música. Otra con puntuación 40 sería dura de oído.

36 **En un examen psicotécnico, las notas de Brianda y Christian fueron, respectivamente, 84 y 78. Sabemos que esas puntuaciones tipificadas son 1,75 y 1 respectivamente. Calcula la media y la desviación típica de la distribución.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{84 - \mu}{\sigma} = 1{,}75 \\[2ex] \dfrac{78 - \mu}{\sigma} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 70,\ \sigma = 8$$

37 **Las alturas de los alumnos de una clase siguen una $N(\mu, \sigma)$. Sonia, con 172 cm, y Begoña, con 167 cm, tienen unas alturas tipificadas de 1,4 y 0,4, respectivamente.**

a) ¿Cuál es la altura real de Estefanía si su altura tipificada es de –1?

b) ¿Cuál es la tipificación de la altura de Azucena si mide 165 cm?

Calculamos primero los parámetros μ y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{172 - \mu}{\sigma} = 1{,}4 \\[2ex] \dfrac{167 - \mu}{\sigma} = 0{,}4 \end{array}\right\} \rightarrow \mu = 165,\ \sigma = 5$$

a) $\dfrac{x - 165}{5} = -1 \rightarrow x = 160$ cm es la altura real de Estefanía.

b) $\dfrac{165 - 165}{5} = 0$ es la tipificación de la altura de Azucena.

38 **El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.**

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga un diámetro mayor que 50 mm es igual a 0,0062.

b) Si se analizan 820 piezas, ¿cuántas se estima que tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

a) Sea $x = N(45, \sigma)$ la normal que representa al diámetro medio.

$$P[x > 50] = 0{,}0062 \rightarrow P[x \le 50] = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938 \rightarrow P\left[z \le \frac{50 - 45}{\sigma}\right] = 0{,}9938 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2{,}5 \rightarrow \sigma = 2$$

b) $P[39{,}7 < x < 43{,}5] = P\left[\dfrac{39{,}7-45}{2} < z < \dfrac{43{,}5-45}{2}\right] = P[-2{,}65 < z < -0{,}75] =$

$= P[0{,}75 < z < 2{,}65] = P[z < 2{,}65] - P[z < 0{,}75] = 0{,}9960 - 0{,}7734 = 0{,}2226$

$820 \cdot 0{,}2226 = 182{,}532 \rightarrow$ 182 piezas, aproximadamente.

39 **Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega entre 2 min y 8 min tarde.**

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

Sea $x = N(5, \sigma)$ la distribución del retraso. Como el intervalo [2, 8] está centrado en 5, por la simetría de la normal respecto de su media podemos asegurar que el 34,13 % de los autobuses se retrasa entre 5 y 8 minutos.

a) $P[5 \le x \le 8] = 0{,}3413 \rightarrow P[x \le 8] = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413 \rightarrow P\left[z \le \dfrac{8-5}{\sigma}\right] = 0{,}8413 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3}{\sigma} = 1 \rightarrow \sigma = 3$

b) $P[x \le 0] = P\left[z \le \dfrac{0-5}{3}\right] = P[z \le -1{,}67] = P[z \ge 1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

40 **En un hospital, el 54 % de los nacimientos son niñas. Halla la probabilidad de que de 2 500 nacimientos, el número de niños esté entre 1 200 y 1 400, ambos inclusive.**

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser niño es $p = 0{,}46$. El número de niños nacidos sigue una distribución $B(2\,500; 0{,}46)$.

Como $n \cdot p = 2\,500 \cdot 0{,}46 = 1\,150 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 1\,150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{2\,500 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54} = 24{,}9$

$x = B(2\,500; 0{,}46) \approx x' = N(1\,150; 24{,}9)$

$P[1\,200 \le x \le 1\,400] = P[1\,199{,}5 \le x' \le 1\,400{,}5] = P\left[\dfrac{1199{,}5-1150}{24{,}9} \le z \le \dfrac{1400{,}5-1150}{24{,}9}\right] =$

$= P[1{,}99 \le z \le 10{,}06] = P[z \le 10{,}06] - P[z \le 1{,}99] = 1 - 0{,}9767 = 0{,}0233$

41 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta, tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta.**

Para aprobar, hace falta responder bien a 25 preguntas; para sacar un notable, a 35; y para un sobresaliente, a 45.

Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de aprobar? ¿Y la de sacar notable? ¿Y sobresaliente?

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de acertar es $p = \dfrac{1}{3}$. El número de respuestas acertadas sigue una distribución $B\left(50, \dfrac{1}{3}\right)$.

Como $n \cdot p = 50 \cdot \dfrac{1}{3} = 16{,}67 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 16{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = 3{,}33$.

$x = B\left(50, \dfrac{1}{3}\right) \approx x' = N(16{,}67; 3{,}33)$

Aprobar:

$P[25 \le x < 35] = P[24{,}5 \le x' \le 34{,}5] = P\left[\dfrac{24{,}5-16{,}67}{3{,}33} \le z \le \dfrac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[2{,}35 \le z \le 5{,}35] =$

$= 1 - 0{,}9906 = 0{,}0094$

Las probabilidades de sacar un notable o un sobresaliente son prácticamente nulas.

Veámoslo con el notable:

$$P[35 \le x < 45] = P[34{,}5 \le x' \le 44{,}5] = P\left[\frac{34{,}5 - 16{,}67}{3{,}33} \le z \le \frac{44{,}5 - 16{,}67}{3{,}33}\right] = P[5{,}35 \le z \le 8{,}36] =$$

$$= P[z \le 8{,}36] - P[z \le 5{,}35] \approx 1 - 1 = 0$$

42 **En una empresa que fabrica microcircuitos se ha comprobado que el 10 % de estos son defectuosos. Si se compra un paquete de 300 microcircuitos procedentes de la fábrica, determina:**

a) La probabilidad de que se encuentren más de un 9 % de microcircuitos defectuosos.

b) La probabilidad de que el número de microcircuitos defectuosos esté entre 20 y 30.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser defectuoso es $p = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

El número de tornillos defectuosos sigue una distribución $B(300; 0{,}1)$.

Como $n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}12$.

$x = B(300; 0{,}1) \approx x' = N(30; 2{,}12)$.

a) $9\,\% \cdot 300 = 27$

$$P[x > 27] = P[x' \ge 27{,}5] = P\left[z \ge \frac{27{,}5 - 30}{2{,}12}\right] = P[z \ge -1{,}18] = P[z \le 1{,}18] = 0{,}881$$

b) $$P[20 < x < 30] = P[20{,}5 \le x' \le 29{,}5] = P\left[\frac{20{,}5 - 30}{2{,}12} \le z \le \frac{29{,}5 - 30}{2{,}12}\right] = P[-4{,}48 \le z \le -0{,}24] =$$

$$= P[z \le 0{,}24] - P[z \le 4{,}48] = 1 - 0{,}5948 = 0{,}4052$$

43 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo.**

a) Si sacamos tres bolas, halla la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

a) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{10}\right)$.

$$P[x = 1] = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}243$$

b) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$.

Como $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$.

$$x = B\left(100, \frac{1}{10}\right) \approx x' = N(10, 3)$$

$$P[x > 12] = P[x' \ge 12{,}5] = P\left[z \ge \frac{12{,}5 - 10}{3}\right] = P[z \ge 0{,}83] = 1 - P[z < 0{,}83] =$$

$$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

Página 437

Cuestiones teóricas

44 **En una distribución $B(4; 0{,}25)$, comprueba la siguiente igualdad:**

$$P[x=0]+P[x=1]+P[x=2]+P[x=3]+P[x=4]=1$$

$P[x=0] = 0{,}75^4 = 0{,}3164$

$$P[x=1] = \binom{4}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}4219$$

$$P[x=2] = \binom{4}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}2109$$

$$P[x=3] = \binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}469$$

$P[x=4] = 0{,}25^4 = 0{,}0039$

$P[x=0]+P[x=1]+P[x=2]+P[x=3]+P[x=4] = 0{,}3164+0{,}4219+0{,}2109+0{,}0469+0{,}0039 = 1$

45 **En una mano de póquer se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga k figuras (k = 0, 1, 2, 3, 4 o 5). ¿Por qué no es una distribución binomial? (En el póquer, cada palo tiene cuatro figuras: J, Q, K, As.)**

Si en lugar de extraer 5 cartas de una baraja se lanzaran 5 dados de póquer, ¿sería una distribución binomial? Explica por qué.

Las probabilidades en un reparto de cartas no se pueden explicar mediante una distribución binomial porque las extracciones se realizan sin reemplazamiento y los resultados de cada una de ellas condicionan a las siguientes extracciones.

Si se lanzaran dados de póker sí podríamos aplicar la distribución binomial, porque ese experimento sería equivalente a la repetición de un lanzamiento 5 veces y estudiaríamos para cada resultado si es una figura o no.

Para profundizar

46 **Una máquina que expende bebidas está regulada de modo que la cantidad de líquido que echa está distribuida normalmente con una media de 200 *ml* y una desviación típica de 15 *ml*.**

a) ¿Qué porcentaje de los vasos se llenarán con más de 224 *ml*?

b) Si usamos 6 vasos de 224 *ml* de capacidad, ¿cuál es la probabilidad de que se derrame líquido únicamente en uno de los vasos?

a) $x = N(200, 15)$

$$P[x > 224] = P\left[z > \frac{224-200}{15}\right] = P[z > 1{,}6] = 1 - P[z \le 1{,}6] = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

Aproximadamente el 5,5 % de los vasos se llenaría con más de 224 *ml*.

b) El número de vasos que se derraman se ajusta a una distribución $x' = B(6; 0{,}055)$ ya que la probabilidad de que se derrame un vaso al azar es la calculada en el apartado anterior.

$$P[x' = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0{,}055 \cdot 0{,}945^5 = 0{,}2487$$

47 **Juan encesta el 30 % de sus tiros a canasta. Si en los dos últimos partidos lanzó 20 tiros en cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que en cada partido haya encestado más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.**

El número de encestes de cada partido sigue una distribución $B(20;\ 0{,}3)$.

Para calcular la probabilidad de que en un partido enceste más de 7 canastas aproximamos mediante una normal:

$n \cdot p = 20 \cdot 0{,}3 = 6 > 5 \ \rightarrow$ Podemos aproximar mediante una normal de parámetros: $\mu = 6$; $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 2{,}05$

$x = B(20;\ 0{,}3) \approx x' = N(6;\ 2{,}05)$

$$P[x > 7] = P[x' \ge 7{,}5] = P\left[z \ge \frac{7{,}5-6}{2{,}05}\right] = P[z \ge 0{,}73] = 1 - P[z < 0{,}73] = 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$$

Si ahora tenemos en cuenta 40 tiros a canasta, el número de encestes sigue una distribución $B(40;\ 0{,}3)$.

Para calcular la probabilidad de que en un partido enceste más de 7 canastas aproximamos mediante una normal:

$n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = 12 > 5 \ \rightarrow$ Podemos aproximar mediante una normal de parámetros: $\mu = 12$; $\sigma = \sqrt{40 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 2{,}9$

$x = B(40;\ 0{,}3) \approx x' = N(12;\ 2{,}9)$

$$P[x > 15] = P[x' \ge 15{,}5] = P\left[z \ge \frac{15{,}5-12}{2{,}9}\right] = P[z \ge 1{,}21] = 1 - P[z < 1{,}21] = 1 - 0{,}8869 = 0{,}1131$$

que resulta ser menor que la anterior.

Por tanto, es menos probable acertar más de 15 canastas de 40 tiros que acertar más de 7 canastas de 20 tiros en las condiciones del problema.

48 **En el proceso de fabricación de una pieza intervienen dos máquinas: la máquina A produce un taladro cilíndrico y la máquina B secciona las piezas con un grosor determinado. Ambos procesos son independientes.**

El diámetro del taladro producido por A, en milímetros, es $N(23;\ 0{,}5)$.

El grosor producido por B es $N(11{,}5;\ 0{,}4)$.

a) Calcula qué porcentaje de piezas tienen un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor comprendido entre 10,5 y 12,7 mm.

c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y en b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consigue.

a) Si llamamos $x = N(23;\ 0{,}5)$

$$P[20{,}5 \le x \le 24] = P\left[\frac{20{,}5-23}{0{,}5} \le z \le \frac{24-23}{0{,}5}\right] = P[-5 \le z \le 2] = P[z \le 2] + P[z \le 5] - 1 = 0{,}9772$$

b) Si llamamos $x' = N(11{,}5;\ 0{,}4)$

$$P[10{,}5 \le x' \le 12{,}7] = P\left[\frac{10{,}5-11{,}5}{0{,}4} \le x \le \frac{12{,}7-11{,}5}{0{,}4}\right] = P[-2{,}5 \le x \le 3] =$$

$$= P[z \le 3] + P[z \le 2{,}5] - 1 = 0{,}9925$$

c) Para que una pieza sea válida deben ocurrir ambas condiciones a la vez. Como las máquinas funcionan de forma independiente, la probabilidad de que una pieza sea válida es $p = 0{,}9772 \cdot 0{,}9925 = 0{,}9699$. Luego el procentaje de piezas válidas es, aproximadamente, el 97 %.

49 **En cierto juego con dos dados, gano una partida si saco dos cincos en la primera tirada; un seis y un cinco en la segunda, y al menos un cuatro en la tercera. ¿Qué probabilidad tengo de ganar?**

Primera tirada: $P[\text{DOS CINCOS}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Segunda tirada: $P[\text{UN CINCO Y UN SEIS}] = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Tercera tirada: $P[\text{AL MENOS UN CUATRO}] = 1 - P[\text{NO SACAR NINGÚN CUATRO}] = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$

La probabilidad de que las tres ocurran es $P = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{11}{36} = 0{,}00047$

Autoevaluación

Página 437

1 **La siguiente tabla corresponde a una distribución de probabilidad de variable discreta:**

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	…

a) Complétala en tu cuaderno y calcula μ y σ.

b) ¿Cuál será la probabilidad de que $x > 7$? ¿Y la de que $x < 7$?

a) $0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + P[10] = 1 \rightarrow P[10] = 0,2$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,2	1,4	9,8
8	0,1	0,8	6,4
9	0,1	0,9	8,1
10	0,2	2	20
	1	7,4	57,6

$\mu = 7,4$

$\sigma = \sqrt{57,6 - 7,4^2} = 1,69$

b) $P[x > 7] = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4$

$P[x < 7] = 0,1 + 0,3 = 0,4$

2 **Con un cierto tipo de chinchetas se dan las siguientes probabilidades al dejarlas caer en el suelo:**

***P*[] = 0,3** ***P*[] = 0,7**

Dejamos caer 6 chinchetas. Calcula:

a) *P*[2  y 4 ]

b) *P*[Ninguna ]

c) *P*[Alguna ]

d) *P*[3  y 3 ]

El número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba sigue una distribución $B(6; 0,3)$.

a) $P[x = 2] = \binom{6}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 = 0,324$

b) $P[x = 0] = 0,7^6 = 0,118$

c) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,7^6 = 0,882$

d) $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^3 = 0,185$

3 **Comprueba que** $y = \frac{x}{2} - 1$ **si** $2 \le x \le 4$ **es una función de densidad. Represéntala y calcula estas probabilidades:**

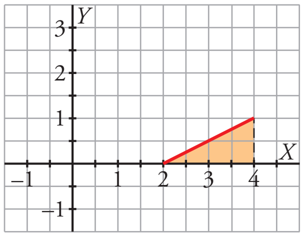
a) $P[x = 3]$

b) $P[x < 3]$

c) $P[x > 3{,}5]$

d) $P[3 \le x \le 3{,}5]$

La gráfica de la función de densidad dada es:



La función es no negativa en el intervalo [2, 4].

El área que hay bajo la función es: $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ porque es el área de un triángulo.

Por tanto, es una función de densidad.

a) $P[x = 3] = 0$

b) $P[x < 3] = P[2 \le x < 3] = \dfrac{1 \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)}{2} = 0{,}25$

c) $P[x > 3{,}5] = P[3{,}5 < x \le 4] = \dfrac{\frac{3{,}5}{2} - 1 + 1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}4375$

d) $P[3 \le x \le 3{,}5] = \dfrac{\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \left(\frac{3{,}5}{2} - 1\right)}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}3125$

Vemos cómo coincide con: $1 - P[x < 3] - P[x > 3{,}5] = 1 - 0{,}25 - 0{,}4375 = 0{,}3125$

4 **Sabemos que una variable** z **es** $N(0, 1)$**.**

a) Calcula las siguientes probabilidades:

$P[1{,}53 < z < 2{,}1]$ $\qquad$ $P[-1{,}53 < z < 2{,}1]$

b) Halla b **y** k **para que se cumpla lo siguiente:**

$P[z < b] = 0{,}4$ $\qquad$ $P[-k < z < k] = 0{,}9$

a) $P[1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < 1{,}53] = 0{,}9821 - 0{,}9370 = 0{,}0451$

$P[-1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] + P[z < 1{,}53] - 1 = 0{,}9821 + 0{,}9370 - 1 = 0{,}9191$

b) $P[z < b] = 0{,}4 \to P[z > -b] = 0{,}4 \to 1 - P[z \le -b] = 0{,}4 \to P[z \le -b] = 0{,}6 \to$

$\to -b = 0{,}25 \to b = -0{,}25$

$P[-k < z < k] = 0{,}9 \to 2 \cdot P[z < k] - 1 = 0{,}9 \to P[z < k] = 0{,}95 \to k = 1{,}64$

5 **El cociente intelectual (C.I.) de un colectivo de bomberos se distribuye normal, de media 108 y desviación típica 3,5. Llamamos x al C.I. de uno de ellos tomado al azar. Calcula:**

a) $P[x < 100]$

b) $P[x > 115]$

c) $P[100 < x < 115]$

a) $P[x < 100] = P\left[z < \frac{100-108}{3,5}\right] = P[z < -2,29] = P[z > 2,29] = 1 - P[z \le 2,29] = 1 - 0,9890 = 0,011$

b) $P[x > 115] = P\left[z > \frac{115-108}{3,5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$

c) $P[100 < x < 115] = 1 - 0,0228 - 0,011 = 0,9662$

6 **El tiempo que tardo en llegar a clase sigue una normal de media 20 minutos. He comprobado que el 94,5 % de los días llego antes de 28 minutos. Si en todo el año voy 177 días a clase, ¿cuántos días puedo estimar que tardaré menos de un cuarto de hora en llegar?**

Llamemos $x = N(20, \sigma)$.

$$P[x < 28] = 0,945 \ \rightarrow\ P\left[z < \frac{28-20}{\sigma}\right] = 0,945 \ \rightarrow\ \frac{8}{\sigma} = 1,6 \ \rightarrow\ \sigma = 5$$

Calculamos la probabilidad de tardar menos de un cuarto de hora:

$$P[x < 15] = P\left[z < \frac{15-20}{5}\right] = P[z < -1] = P[z > 1] = 1 - P[z \le 1] = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

El número esperado de días en los que tardará menos de un cuarto de hora es: $177 \cdot 0,1587 = 28$ días.

7 **El 7 % de las personas padecen un pequeño defecto anatómico de origen genético. En una empresa trabajan 80 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10 con ese defecto?**

El número de personas que padecen el defecto sigue una distribución $B(80; 0,07)$.

Como $n \cdot p = 80 \cdot 0,07 = 5,6 > 5$, aproximamos con una normal de parámetros $\mu = 5,6$ y $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0,07 \cdot 0,93} = 2,28$.

$x = B(80; 0,07) \approx x' = N(5,6; 2,28)$

$$P[x > 10] = P[x' \ge 10,5] = P\left[z \ge \frac{10,5-5,6}{2,28}\right] = P[z \ge 2,15] = 1 - P[z < 2,15] = 1 - 0,9842 = 0,0158$$