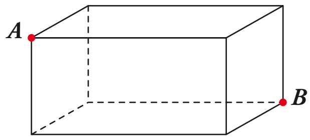
Resuelve

Página 173

Cálculo de distancias

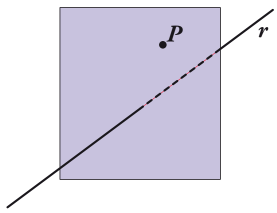
1. Recordando cómo se obtiene la diagonal de un ortoedro en función de sus dimensiones, halla la distancia entre los puntos $A(4, -2, -7)$ y $B(7, 2, 5)$.



$dist(A, B) = \sqrt{(7-4)^2 + (2-(-2))^2 + (5-(-7))^2} = 13$ u

2. Halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r, obteniendo previamente la ecuación de un plano que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$



- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r:

  $0 \cdot (x-8) - 1 \cdot (y-6) + 2 \cdot (z-12) = 0$; es decir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punto, Q, de cofrte de r y π:

  $-(1-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 18 = 0$

  $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$

  $5\lambda - 5 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$

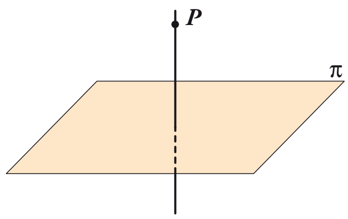
  El punto es $Q(2, 0, 9)$

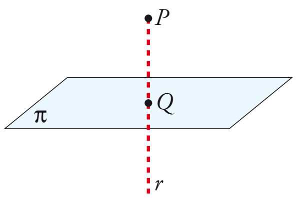
- Calculamos la distancia:

  $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$ u

3. Para hallar la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π, obtén previamente las ecuaciones de una recta que pasa por P y es perpendicular a π.

$$\pi: 5y + 12z - 1 = 0$$





— Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

— Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π.

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q.

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q, de intersección de r y π:

  $5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$

  $175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$

  $169\lambda + 1\,014 = 0 \rightarrow \lambda = -6$

  El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

  $dist\,(P, \pi) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5\,184} = \sqrt{6\,084} = 78$ u

1 Direcciones de rectas y planos

Página 174

1 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (1, 0, 7) y es perpendicular al plano:

$$\mathbf{5x - 3z + 4 = 0}$$

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

2 Halla la ecuación implícita del plano que pasa por (1, –3, 5) y es perpendicular a la recta:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+7}{-6} = \frac{z}{1}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: (5, –6, 1). Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 1) - 6(y + 3) + 1(z - 5) = 0 \rightarrow 5x - 6y + z - 28 = 0$$

3 Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por (1, 0, –3).

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, (5, –1, 0). Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es:

$$5(x - 1) - y + 0(z + 3) = 0 \rightarrow 5x - y - 5 = 0$$

4 Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por (5, –7, –2).

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a r, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: (5, 2, –6).

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x - 5) + 2(y + 7) - 6(z + 2) = 0 \rightarrow 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 175

5 Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s:

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por (5, –1, 8) y es paralelo a (1, 0, 2) y a (3, –1, 4). Un vector normal al plano es:

$$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x - 5) + 2(y + 1) - 1(z - 8) = 0; \text{ es decir: } 2x + 2y - z = 0$$

6 **Determina las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a la recta** $r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **que pasa por** $P(0, -1, -3)$**.**

Un vector dirección de la recta es:

$$(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

2 Medida de ángulos entre rectas y planos

Página 177

1 Halla el ángulo entre las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

El vector dirección de r es $\vec{d_r} = (-5, 3, 0) = \vec{u}$.

El vector dirección de s es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\vec{d_r} = (1, -2, 3) \times (2, -1, 0) = (3, 6, 3) \,//\, (1, 2, 1) = \vec{v}$$

Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|(-5, 3, 0) \cdot (1, 2, 1)|}{\sqrt{25+9+0}\,\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{34}\,\sqrt{6}} = 0{,}070014 \;\rightarrow\; \alpha = 85°\ 59'\ 7''$$

2 Calcula el ángulo que forma la recta $r: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ con el plano $\pi: x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$\vec{d}\,(7, -1, 3) \,//\, r$

$\vec{n}\,(1, 3, -1) \perp \pi$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

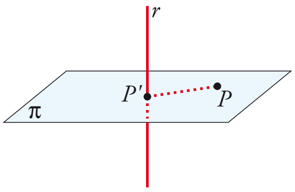
$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \;\rightarrow\; \alpha = 2°\ 14'\ 59''$

3 Distancias entre puntos, rectas y planos

Página 179

1 Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$.
Hazlo por cada uno de los tres métodos que has aprendido.

— Solución, obteniendo previamente el punto P':



• Plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$

• Intersección, P', de π y r:

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$
$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$
$$27\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

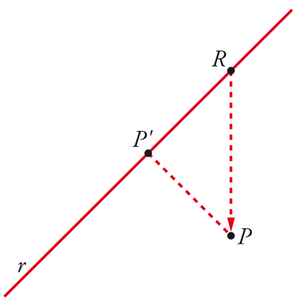
El punto es $P'(5, 1, 1)$

• Distancia entre P y r:

$$dist\,(P, r) = dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ u}$$

— Segundo método:

$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.



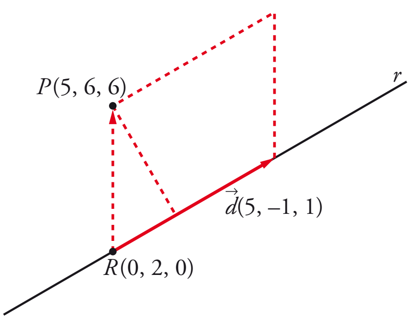
El vector $\overrightarrow{RP}\,(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0; \text{ es decir:}$$
$$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$$
$$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$$
$$-27\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

El resto, es igual que con el método anterior.

— Solución directa a partir del producto vectorial:



$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,|}{|\vec{d}\,|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\,| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}\,| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\,(P, r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ u}$$

Página 180

2 Halla la distancia de P a π por el método de la recta perpendicular y aplicando la fórmula.

$$P(11, 7, 9) \qquad \pi: 3x + 4z + 6 = 0$$

La recta perpendicular a π que pasa por P tiene por ecuación:

$$r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = 7 \\ z = 9 + 4\lambda \end{cases}$$

$P' = r \cap \pi \rightarrow 3(11 + 3\lambda) + 4(9 + 4\lambda) + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -3$

$P'(2, 7, -3)$

$dist\,(P, P') = dist\,(P, \pi) = \sqrt{81 + 0 + 144} = 15$

Sustituyendo en la fórmula:

$$dist\,(P, \pi) = \frac{|33 + 36 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{75}{5} = 15 \text{ u}$$

3 Halla las distancias a $\pi: 5x - 11y + 2z - 7 = 0$ de los puntos $P(5, -3, 8)$ y $Q\left(7, 3, \frac{5}{2}\right)$ aplicando la fórmula.

$$dist\,(P, \pi) = \frac{|25 + 33 + 16 - 7|}{\sqrt{25 + 121 + 4}} = \frac{67}{30}\sqrt{6} \text{ u}$$

$$dist\,(Q, \pi) = \frac{|35 - 33 + 5 - 7|}{\sqrt{25 + 121 + 4}} = 0 \text{ u} \rightarrow Q \in \pi$$

Página 181

4 Calcula la distancia entre la recta r y el plano π siguientes:

$$r: (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 1 - \lambda) \qquad \pi: x + 3y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}(-3, 1, -1) \,//\, r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi \end{array}\right\} \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \rightarrow r \,//\, \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\,(r, \pi) = dist\,[(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21 \text{ u}$$

5 Calcula la distancia entre estos planos:

$$\pi: y - 5z + 4 = 0 \qquad \pi': 2y - 10z = 0$$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π'. Por tanto:

$$dist\,(\pi, \pi') = dist\,(P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78 \text{ u}$$

Página 183

6 Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

a) $r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$

a) • Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (12, 0, 5) \,//\, r \\ (0, 1, 0) \,//\, s \end{array}\right\} \; (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$$-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0 \;\rightarrow\; -5x + 12z - 31 = 0$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31\,|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13 \text{ u}$$

• Segundo método:

Punto genérico de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origan en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \;\rightarrow\; -169\lambda - 169 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \;\rightarrow\; 4 + \mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ u}$$

• Tercer método:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}\,|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}\,(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}\,(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}\,(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \;\rightarrow\; \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto, $dist\,(r, s) = \dfrac{169}{13} = 13 \text{ u}$

b) • Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l}(5,-1,1)\ //\ r\\(7,-5,-5)\ //\ s\end{array}\right\}\ (5,-1,1)\times(7,-5,-5)=(10,32,-18)\ //\ (5,16,-9)\perp\pi$$

El punto (0, 2, 0) es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$$5(x-0)+16(y-2)-9(z-0)=0\ \rightarrow\ 5x+16y-9z-32=0$$

$$dist\,(r,s)=dist\,(s,\pi)=dist\,[(5,1,1),\pi]=\frac{|25+16-9-32|}{\sqrt{25+256+81}}=0\ \text{u}$$

(Las rectas r y s se cortan).

• Segundo método:

Punto genérico de r: $R(5\lambda, 2-\lambda, \lambda)$

Punto genérico de s: $S(5+7\mu, 1-5\mu, 1-5\mu)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}=(5+7\mu-5\lambda, -1-5\mu+\lambda, 1-5\mu-\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases}\overrightarrow{RS}\cdot(5,-1,1)=0\ \rightarrow\ 25+35\mu-27\lambda=0\ \rightarrow\ \mu=0\\\overrightarrow{RS}\cdot(7,-5,-5)=0\ \rightarrow\ 35+99\mu-35\lambda=0\ \rightarrow\ \lambda=1\end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

$$dist\,(r,s)=dist\,(R,S)=0\ \text{u}$$

• Tercer método:

$$dist\,(r,s)=\frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}}=\frac{|[\overrightarrow{RS},\vec{d},\vec{d'}]|}{|\vec{d}\times\vec{d'}|}$$

$R(0, 2, 0)$ $\quad \vec{d}\,(5, -1, 1)$

$S(5, 1, 1)$ $\quad \vec{d'}\,(7, -5, -5)$

$\overrightarrow{RS}\,(5, -1, 1)$

$$[\overrightarrow{RS},\vec{d},\vec{d'}]=\begin{vmatrix}5&-1&1\\5&-1&1\\7&-5&-5\end{vmatrix}=0\ \text{(las dos primeras filas son iguales).}$$

Por tanto, $dist\,(r,s)=0$ u

4 Medidas de áreas y volúmenes

Página 184

1 Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: *A*(1, 3, 5), *B*(2, 5, 8) y *C*(5, 1, –1).

$\overrightarrow{AB} = (2, 5, 8) - (1, 3, 5) = (1, 2, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 1, -1) - (1, 3, 5) = (4, -2, -6)$

$$\text{Área triángulo} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(1, 2, 3) \times (4, -2, -6)| = \frac{1}{2}|(-6, 18, -10)| = \frac{1}{2}2\sqrt{115} = \sqrt{115}\ \text{u}^2$$

2 Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son *A*(2, 1, 4), *B*(1, 0, 2), *C*(4, 3, 2) y *D*(1, 5, 6).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)\\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2)\\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)\end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5\ \text{u}^3$$

5 Lugares geométricos en el espacio

Página 185

1 Halla el L.G. de los puntos que equidistan de:

a) $A(4, -1, 7)$ y $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ y $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ y $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \to x - y + z - 3 = 0$$

Es un plano: el plano mediador del segmento AB.

b) $dist\,(X, \pi) = dist\,(X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}}$$ Dos posibilidades:

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \to 2y = 0 \to y = 0$
- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \to 2x + 2z - 4 = 0 \to x + z - 2 = 0$

Son dos planos: los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π'. Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos (1, 0, 1) y (0, 0, 2), al igual que π y π'.

Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $dist\,(X, \pi) = dist\,(X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1+9+4}}$$ Dos posibilidades:

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \to -8 = 0 \to$ Imposible.
- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \to 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \to x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 186

2 Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es (–1, 5, 0).

3 Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 3 = 0$ corta a la esfera $(x-2)^2 + (y+5)^2 + z^2 = 169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es:

$$d = \frac{|8 + 15 - 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{20}{5} = 4$$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 16} = \sqrt{153}$

El radio de la circunferencia es $\sqrt{153}$.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68.**

Tras efectuar los cálculos, comprueba que la superficie resulta ser una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$

$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9 \rightarrow$ Es una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

Página 187

5 **Halla el L.G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.**

$dist\,(X, F) + dist\,(X, F') = 26$

$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2} = 26$

$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2}$

$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2} = 676 + x^2 + y^2 + z^2 + 25 + 10z - x^2 - y^2 - z^2 - 25 + 10z$

$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2} = 20x + 676$

$13\sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2} = 5z + 169$

$169\,[x^2 + y^2 + (z+5)^2] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169\,[x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1\,690z} + 4\,225 = 25z^2 + \cancel{1\,690z} + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24\,336$

$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{169} = 1 \rightarrow$ Es un elipsoide.

6 **Halla el L.G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.**

$|dist\,(X, F) - dist\,(X, F')| = 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x+5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x + - 5)^2 + y^2 + z^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$

$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$

$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ Es un hiperboloide.

7 **Halla el L.G. de los puntos que equidistan del plano $x + \frac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.**

¿A qué se parece la ecuación obtenida?

dist $(X, F) =$ *dist* (X, π), donde π: $x + \frac{1}{4} = 0$ y $F\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$.

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \frac{1}{4}\right|$$

$$\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{1}{16}}$$

$$x = y^2 + z^2$$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 188

1. Punto simétrico respecto de un plano

Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(-3, -1, 0)$ respecto del plano: π: $3x - 2y + z - 7 = 0$

$A'(x, y, z)$: punto simétrico de A respecto del plano π.

Recta perpendicular a π que pasa por A:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$M = r \cap \pi \rightarrow 3(-3 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + \lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$M(0, -3, 1)$

M es el punto medio entre A y A'.

$$(0, -3, 1) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z}{2}\right) \rightarrow A'(3, -5, 2)$$

2. Punto simétrico respecto de una recta

Hazlo tú. Halla el punto simétrico de $A(1, -1, 1)$ respecto de la recta: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{0} = z - 1$

$A'(x, y, z)$: punto simétrico de A respecto de la recta.

Plano perpendicular a r que pasa por A:

π: $-x + z + k = 0$

$A \in \pi \rightarrow -1 + 1 + k = 0 \rightarrow k = 0$

π: $-x + z = 0$

$M = r \cap \pi \rightarrow -(2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

$M\left(\dfrac{3}{2}, 3, \dfrac{3}{2}\right)$

M es el punto medio entre A y A'.

$$\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) \rightarrow A'(2, 7, 2)$$

Página 189

4. Punto de una recta que cumple una condición

Hazlo tú. Halla los puntos de $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia a $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{11}$.

$A \in r \rightarrow A(\lambda, 3 - \lambda, 1 + 2\lambda)$

$dist(A, P) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda - 2)^2} = \sqrt{6\lambda^2 - 12\lambda + 11} = \sqrt{11} \rightarrow \lambda = 0, \ \lambda = 2$

Hay dos puntos: $A_1(0, 3, 1)$ y $A_2(2, 1, 5)$

5. Distancias, ángulos, áreas

Hazlo tú.

a) Halla la distancia del punto $P(2, 0, -1)$ a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

b) ¿Qué ángulo forma r con el eje Z?

a) $A \in r \rightarrow A(3, 0, -2)$

$\vec{d}_r = (1, -2, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{AP} = (2, 0, -1) - (3, 0, -2) = (-1, 0, 1)$

$$dist\,(P, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(1, 1, 1) \times (-1, 0, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{|(1, -2, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ u}$$

b) Eje OZ: $\begin{cases} \vec{d}(0, 0, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}|}{|\vec{d}_r||\vec{d}|} = \frac{|1|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = arc\,cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

6. Distancia entre rectas paralelas

Hazlo tú. Halla el valor de k para el cual las rectas siguientes son paralelas:

$$r: \frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k} \qquad s: \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}$$

Calcula, en ese caso, la distancia entre ellas.

Para que sean paralelas:

$$\frac{k}{2k} = \frac{2}{k+3} = \frac{k}{2}$$

Simplificando en la primera fracción, tenemos que:

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow k = 1$$

Para este valor, se cumple: $\dfrac{2}{k+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Estas rectas son paralelas para $k = 1$.

Cálculo de la distancia:

$r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ P_r(1, 0, -3) \end{cases}$

$s: \begin{cases} \vec{d}_s(2, 4, 2) \\ P_s(-1, 0, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 0, -3) - (-1, 0, 2) = (2, 0, -5)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P_s, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \overrightarrow{P_sP_r}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(1, 2, 1) \times (2, 0, 5)|}{\sqrt{6}} = \frac{|(10, -3, -4)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{100 + 9 + 16}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{5}{6}} \text{ u}$$

Página 190

7. Distancia entre rectas que se cruzan

Hazlo tú.

a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y calcula la distancia entre ellas.

$$r\colon x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{2} \qquad s\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

b) Halla la ecuación de los planos paralelos a r y s y que distan $\sqrt{14}$ u de s.

a) $r\colon \begin{cases} \vec{d}_r(1,-1,2) \\ P_r(-1,1,-3) \end{cases}$

$s\colon \begin{cases} \vec{d}_s(1,1,-1) \\ P_s(0,1,2) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 1, 2) - (-1, 1, -3) = (1, 0, 5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes, no están en un mismo plano, por tanto, r y s se cruzan.

b) π: plano paralelo a r y s:

$\vec{n}_\pi = (1, -1, 2) \times (1, 1, -1) = (-1, 3, 2)$

$\pi\colon -x + 3y + 2z + k = 0$

$$dist\,(s, \pi) = dist\,(P_s, \pi) = \frac{|3+4+k|}{\sqrt{1+9+4}} = \sqrt{14} \to \begin{cases} \dfrac{7+k}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \to 7+k=14 \to k=7 \\[2mm] \dfrac{7+k}{\sqrt{14}} = -\sqrt{14} \to 7+k=-14 \to k=-21 \end{cases}$$

Hay dos planos que verifican la condición:

$\pi\colon -x + 3y + 2z + 7 = 0$

$\pi'\colon -x + 3y + 2z - 21 = 0$

8. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Hazlo tú. Halla la proyección ortogonal de la recta $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1-y}{1}=\dfrac{z}{2}$ sobre el plano $\pi\colon x+2y-5z-1=0$.

π': Plano perpendicular a π que contiene a $r \to$ contiene las direcciones $\vec{n}_\pi$ y $\vec{d}_r$.

$\vec{n}_\pi(1, 2, -5)$.

$r\colon \begin{cases} \vec{d}_r(2,-1,2) \\ P_r(-3,1,0) \end{cases}$

$$\pi'\colon \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi'\colon x + 12y + 5z - 9 = 0$$

$s\colon \pi' \cap \pi$

La recta pedida es:

$$s\colon \begin{cases} x+12y+5z-9=0 \\ x+\ \ 2y-5z-1=0 \end{cases}$$

Página 192

10. Lugares geométricos

Hazlo tú. Halla el L.G. de los puntos cuya distancia a $A(0, 2, 1)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 3, -2)$.

Punto genérico: $P(x, y, z)$

$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4\left((x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2\right)$$

$$x^2 + y^2 - 4y + z^2 - 2z + 5 - (4x^2 + 8x + 4y^2 - 24y + 4z^2 + 16z + 56) = 0$$

$$-3x^2 - 8x - 3y^2 + 20y - 3z^2 - 18z - 51 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 8x - 20y + 18z + 51 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{3}x - \frac{20}{3}y + 6z + 17 = 0$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-3)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + 17 - \frac{197}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + (z-3)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{44}{9}$$

Es la ecuación de una circunferencia.

Ejercicios y problemas guiados

Página 193

1. Punto más cercano a una recta

Hallar el punto que está más cercano a $P(1, 3, 0)$ de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto $Q(-2, 2, 1)$ y el vector $\vec{v}(1, 1, 1)$.

Calcular la distancia del punto P a la recta.

a) $\pi: x + y + z + k = 0$

$P \in \pi \to 1 + 3 + k = 0 \to k = -4$

$\pi: x + y + z - 4 = 0$

b) $A = r \cap \pi: (-2 + \lambda) + (2 + \lambda) + (1 + \lambda) - 4 = 0 \to \lambda = 1$

$A(-1, 3, 2)$

c) $dist(P, r) = dist(P, A) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ u

2. Distancia de un punto a un plano

Determinar la relación que deben cumplir a y b para que la distancia del punto $P(a, 1, b)$ al plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$ y $C(0, 2, 1)$, sea igual a 1.

a) π: plano determinado por A, B, C.

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to \pi: x + y - z - 1 = 0$$

b) $dist(P, \pi) = \dfrac{|a + 1 - b - 1|}{\sqrt{3}} = 1$ u

c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a-b}{\sqrt{3}} = 1 \\ \dfrac{a-b}{\sqrt{3}} = -1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a - b = \sqrt{3} \\ a - b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

3. Distancia entre rectas

Considerar el punto $Q(3, -1, 4)$ y la recta: $r: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = \quad -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

a) Hallar la distancia de Q a la recta r.

b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene como vector dirección $(1, -1, 1)$, no corta a r.

c) Calcular la distancia entre r y s.

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r}(3, -2, 4) \\ P_r(-2, 0, 1) \end{cases}$

$\overrightarrow{QP_r} = (-2, 0, 1) - (3, -1, 4) = (-5, 1, -3)$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{QP_r} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|} = \frac{|(-5, 1, -3) \times (3, -2, 4)|}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{|(-2, 11, 7)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \text{ u}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to$ Son linealmente independientes y por tanto no coplanarios.

c) $dist\,(r, s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ}, \vec{d_r}, \vec{d_s}|}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ u

4. Recta perpendicular a otra

Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta r:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \quad 3\lambda \end{cases}$$

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r}(1, 2, 3) \\ P_r(3, -1, 0) \end{cases}$

α es perpendicular a r y contiene a $P(2, -1, 1)$.

$\alpha: x + 2y + 3z + k = 0$

$P \in \alpha \to 2 - 2 + 3 + k = 0 \to k = -3 \to \alpha: x + 2y + 3z - 3 = 0$

β contiene a r y a P.

$\overrightarrow{PP_r} = (3, -1, 0) - (2, -1, 1) = (1, 0, -1)$

$\beta: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: -2x + 4y - 2z + 10 = 0 \to \beta: x - 2y + z - 5 = 0$

$s: \begin{cases} x + 2y + 3z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $Q = r \cap \alpha \to (3 + \lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - 3 = 14\lambda - 2 = 0 \to \lambda = \dfrac{1}{7}$

$$Q = \left(3 + \frac{1}{7}, -1 + 2 \cdot \frac{1}{7}, 3 \cdot \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{22}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{22}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{3}{7}\right) - (2, -1, 1) = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right) = \frac{1}{7}(8, 2, -4)$$

$s: (x, y, z) = (2, -1, 1) + t(8, 2, -4)$

5. Puntos equidistantes

Dados los planos de ecuaciones: α***:*** $\boldsymbol{x - y + z = 0}$ ***y*** β***:*** $\boldsymbol{x + y - z = 2}$***:***

a) Hallar la ecuación de la recta r ***que pasa por*** $A(1, 2, 3)$ ***y no corta a ninguno de los dos planos.***

b) Determinar el punto que equidista de $A(1, 2, 3)$ ***y*** $B(2, 1, 0)$ ***y pertenece a la recta*** s ***intersección de*** α ***y*** β***.***

a) $\overrightarrow{n_\alpha}(1, -1, 1)$; $\overrightarrow{n_\beta}(1, 1, -1)$ $\to$ No son proporcionales, luego los planos no son paralelos.

$\overrightarrow{d_r} = (1, -1, 1) \times (1, 1, -1) = (0, 2, 2) = 2(0, 1, 1)$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r}(0,1,1) \\ P_r(1,2,3) \end{cases} \to r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 1)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\} \to x = 1,\ y = 1 + \lambda,\ z = \lambda \to P(1, 1 + \lambda, \lambda)$$

$dist(P, A) = dist(P, B)$

$$\sqrt{2\lambda^2 - 8\lambda + 10} = \sqrt{2\lambda^2 + 1} \to \lambda = \frac{9}{8}$$

$$P = \left(1, 1 + \frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right) = \left(1, \frac{17}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 194

Para practicar

Ángulos

1 **Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que se cortan:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(-2, 3, -2)$; $P(5, 4, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 5, 1)$; $P'(5, 4, 0)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es porporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que se cortan en el punto P.

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$; $|\vec{d}_s| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$

$$cos\ \alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{27}} = 0,7 \rightarrow \alpha = 45°\ 33'\ 42''$$

b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$$

Por lo tanto:

$\vec{d}_r(1, 1, -1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s(3, 2, 5)$; $P'(3, 0, 15)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P.

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90°$.

c) $\vec{d}_r = (1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0) = -1(1, 1, 0)$

$\vec{d}_s = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

$\alpha = (\widehat{r, s})$

$$cos\ \alpha = \left| \frac{(1,1,0) \cdot (0,0,1)}{\sqrt{2} \cdot 1} \right| = 0$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}\ rad \rightarrow r \perp s$

2 **Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90°:**

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(-5, 1, -1)$; $\vec{d}_s(1, 2, m)$

Para que r y s formen 90°, el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ tiene que ser 0:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \;\rightarrow\; m = -3$$

3 **Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$

$\pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\; y = 1 + 2\lambda,\; z = -2$

$\pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$

$\pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|-2-8-2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección, luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2-2+0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 90° \;\rightarrow\; \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 30° \;\rightarrow\; \alpha = 60°$$

4 **Calcula, en cada caso, el ángulo que forman los siguientes pares de planos:**

a) $\alpha: z = 3$

$\beta: x - y + 2z + 4 = 0$

b) $\alpha: 2x + y - 3 = 0$

$\beta: x + z - 1 = 0$

a) $\vec{n_\alpha}(0, 0, 1)$; $\vec{n_\beta}(1, -1, 2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}||\vec{n_\beta}|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \;\rightarrow\; \varphi = 35°\, 15'\, 52''$$

b) $\vec{n_\alpha}(2, 1, 0)$; $\vec{n_\beta}(1, 0, 1)$

$$\cos\,(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{|(2, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \;\rightarrow\; (\widehat{\alpha, \beta}) = arc\ cos\ \frac{2}{\sqrt{10}} = 50°\, 47'$$

5 **Calcula los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:**

a) $\boldsymbol{A(0, 0, 0),\ B(1, 2, 1),\ C(3, 1, 1)}$

b) $\boldsymbol{A(2, 7, 3),\ B(1, 2, 5),\ C(-1, -2, 5)}$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$$cos\ \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0{,}73855 \ \rightarrow \ \hat{A} = 42°\ 23'\ 31''$$

$\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$cos\ \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \ \rightarrow \ \hat{B} = 90°$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47°\ 36'\ 29''$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$

$$cos\ \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0{,}97922 \ \rightarrow \ \hat{A} = 11°\ 42'\ 6''$$

$\overrightarrow{BA} = (1, 5, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$

$$cos\ \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0{,}898 \ \rightarrow \ \hat{B} = 153°\ 54'\ 56''$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14°\ 22'\ 58''$

6 **Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los ejes coordenados:**

$$\boldsymbol{\pi: x - 2y + z = 0}$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$.

- El ángulo que forma π con el eje X, de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0{,}408 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 90° - \alpha = 65°\ 54'\ 19'' \ \rightarrow \ \alpha = 24°\ 5'\ 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje Y, de vector director $(0, 1, 0)$, es:

$$cos\ (90° - \beta) = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 1, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0{,}8165 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 90° - \beta = 35°\ 15'\ 52'' \ \rightarrow \ \beta = 54°\ 44'\ 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje Z, de vector director $(0, 0, 1)$, es:

$$cos\ (90° - \gamma) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 0, 1)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}408 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 90° - \gamma = 65°\ 54'\ 19'' \ \rightarrow \ \gamma = 24°\ 5'\ 41''$$

7 Calcula el valor de m para que las rectas r y s formen un ángulo de 60°.

$$r: \begin{cases} x = 1+\gamma \\ y = \sqrt{2}\gamma \\ z = 1-\gamma \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 1+m\mu \\ z = 1+\mu \end{cases}$$

$\vec{d}_r = (1, \sqrt{2}, -1)$

$\vec{d}_s = (1, m, 1)$

$\alpha = \widehat{(r, s)}$

$$\cos\alpha = \left|\frac{(1, \sqrt{2}, -1)\cdot(1, m, 1)}{2\cdot\sqrt{2+m^2}}\right| = \frac{1}{2} \to \left|\frac{\sqrt{2}m}{2\cdot\sqrt{2+m^2}}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2+m^2}} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2+m^2}} = -1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} \sqrt{2}m = \sqrt{2+m^2} \to m = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}m = -\sqrt{2+m^2} \to m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Distancias

8 Tenemos la recta r y los planos π y σ siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-6\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi: x+2y-z=1 \\ \sigma: x-y+z=3 \end{array}$$

a) Halla el punto P en el que se cortan la recta r y el plano π.

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y σ.

c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π:

$$8\lambda + 2(2) - (3-6\lambda) = 1 \to \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$.

b) De la misma forma hallamos Q:

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \to \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

9 Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π:

a) $P(2, -3, 1)$ $\quad\pi: 3x - 4z = 3$

b) $P(0, 1, 3)$ $\quad\pi: x - y - 2z + 3 = 0$

c) $P(2, 0, 1)$ $\quad\pi: x + y - 2z = 0$

d) $P(3, -4, 1)$ $\quad\pi: y = 3$

a) $dist\,(P, \pi) = \dfrac{|3\cdot 2 - 4\cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ u

b) $dist\,(P, \pi) = \dfrac{|0 - 1 - 2\cdot 3 + 3|}{\sqrt{1+1+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} \approx 1{,}633$ u

c) $dist\,(P, \pi) = \dfrac{|2-2|}{\sqrt{1+1+4}} = 0$ u

d) $dist\,(P, \pi) = \dfrac{|-4-3|}{1} = 7$ u

10 Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene al punto $P(2, 0, 4)$ y a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

El plano π, que contiene a P y a s, tiene como vectores dirección $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$, siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \overrightarrow{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a $\vec{n}$: $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es $\pi: z = 4$

$$dist\,(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

11 Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1: x - 2y + 3 = 0; \;\; \pi_2: 2x - 4y + 1 = 0$

b) $\pi_1: 3x - 2y + z - 2 = 0; \;\; \pi_2: 2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto de P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2.

$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$

$$dist\,(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

12 Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases} \quad \pi: 3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \quad \pi: 7x - 2y - z + 1 = 0$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d}_r(4, 3, 7)$; $\vec{n}(3, -4, 0)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \;\rightarrow\;$ son perpendiculares

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π. Tomamos P como punto de r.

$$dist\,(r, \pi) = dist\,(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ u}$$

b) $\vec{d}_r(2, 0, 1)$

$\vec{n}(7, -2, -1)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \;\rightarrow\;$ no son perpendiculares $\rightarrow$ r y π se cortan.

$dist\,(r, \pi) = 0$ u

13 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ mediante los siguientes pasos:**

a) Halla un plano, π, que sea perpendicular a r y que contenga a P.

b) Obtén la intersección del plano hallado, π, con r. Llama a ese punto Q.

c) Calcula la distancia de P a Q.

a) El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r.

La ecuación de π es:

$$4(x - 3) + (y - 1) - 3(z - 6) = 0 \to \pi: 4x + y - 3z + 5 = 0$$

b) Para hallar la intersección de π con r, sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π:

$$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \to \lambda = -1$$

Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de $r \to Q(0, 1, 2)$

c) $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ u

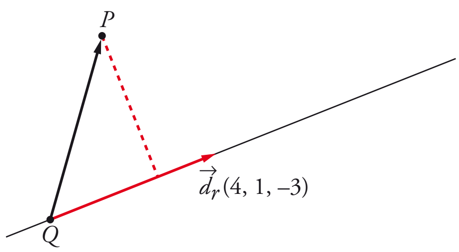
Página 195

14 **Calcula la distancia que hay entre la recta y el punto del ejercicio anterior mediante los siguientes pasos:**

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.

b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector dirección de r.

c) Divide el área calculada entre el módulo del vector dirección de r.



a) $P(3, 1, 6)$, $Q(4, 2, -1) \in r$

$\overrightarrow{PQ}\,(1, 1, -7)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650}$ u^2

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$ u

15 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos de los ejercicios anteriores.**

a) $\left.\begin{array}{l} P(2, 2, -11) \\ Q(9, -1, 6) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{PQ}(7, -3, 17)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (36, 169, 15)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{36^2 + 169^2 + 15^2} = \sqrt{30\,082}$ u^2

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{30\,082}}{\sqrt{178}} = 13$ u

16 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s.

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π.

r: $R(0, -10, 9)$, $\vec{d}_r(4, -3, 5)$

s: $S(2, 1, 4)$, $\vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) \,//\, (3, 4, 0) \perp \pi$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

$$\pi: 3(x - 0) + 4(y + 10) + 0(z - 9) = 0 \ \longrightarrow\ \pi: 3x + 4y + 40 = 0$$

b) $dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,(S, \pi) = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{50}{5} = 10$ u

17 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- El vector normal a π será $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$

  $-84(x + 7) + 35(z - 19) = 0 \ \rightarrow\ \pi: -84x + 35z - 1\,253 = 0$

- $Q(10, -2, 26) \in s$

  $dist\,(r, s) = dist\,(Q, \pi) = \dfrac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1\,253\,|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \dfrac{1183}{91} = 13$ u

18 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s, respectivamente.

b) Halla el volumen, V, del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores dirección de r y s.

c) Halla el área, A, del paralelogramo descrito por los vectores dirección de r y s.

d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 2, 1) \\ P(-2, 0, 1) \end{cases}$; $\quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-1, 5, 1) \\ Q(1, 0, -2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -2) - (-2, 0, 1) = (3, 0, -3)$

b) $V = \left| \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \right| = |-60| = 60 \text{ u}^3$

c) Área $= |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(3, 2, 1) \times (-1, 5, 1)| = |(-3, -4, 17)| = \sqrt{9 + 16 + 289} = \sqrt{314}\ \text{u}^2$

d) $dist\,(r, s) = \dfrac{60}{\sqrt{314}}$ u

Áreas y volúmenes

19 **Halla el área de cada uno de los triángulos ABC donde:**

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$ **b)** $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

20 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro de vértices:**

a) $(2, 1, 4)$; $(1, 0, 2)$; $(4, 3, 2)$; $(1, 5, 6)$ **b)** $(4, 1, 2)$; $(2, 0, 1)$; $(2, 3, 4)$; $(6, 5, 1)$

a) $A(2, 1, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(4, 3, 2)$; $D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$; $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$; $B(2, 0, 1)$; $C(2, 3, 4)$; $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$; $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$; $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

21 **Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

$$A(2, 3, 1),\ B(4, 1, -2),\ C(6, 3, 7),\ D(-5, -4, 8)$$

- Área del triángulo ABC:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} = 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} = 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total = 14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 u²
- Volumen = $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$; $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$; $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{308}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

22 Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:

$$\pi\text{: } 6x - 5y + 3z - 30 = 0$$

- Hallamos los vértices:

$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = 10 \rightarrow A(0, 0, 10)$$
$$y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0, 0)$$
$$x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow C(0, -6, 0)$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(10\cdot 5\cdot 6) = 50 \text{ u}^2$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}\right| = 50 \text{ u}^3$$

23 Halla la ecuación del plano π perpendicular a la recta r: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por π y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es:

$$2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0 \rightarrow 2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$
$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$
$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$
$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera

24 Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2, \ y^2, \ z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \rightarrow radio = \sqrt{9} = 3$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2, \ y^2, \ z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \rightarrow radio = \sqrt{6}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2, \ y^2, \ z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \rightarrow radio = \sqrt{15}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2, \ y^2, \ z^2 + 2x - + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \rightarrow radio = 2$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

25 **Halla la ecuación de las siguientes esferas:**

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro AB con $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB:

$$C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

La ecuación es:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}, \text{ o bien:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π:

$$r = dist\,(C, \pi) = 3$$

La ecuación será:

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

26 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro (2, –1, 4) y radio 7:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$$

27 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4((x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2)$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 29 - (4x^2 - 24x + 4y^2 + 8y + 4z^2 + 16z + 56) = 0$$

$$-3x^2 + 28x - 3y^2 - 14y - 3z^2 - 24z - 27 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 28x + 14y + 24z + 27 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia.

28 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB.**

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$\overrightarrow{PA} = (4, 2, 0) - (x, y, z) = (4-x, 2-y, -z)$$

$$\overrightarrow{PB} = (2, 6, -4) - (x, y, z) = (2-x, 6-y, -z-4)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$(4-x, 2-y, -z) \cdot (2-x, 6-y, -z-4) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro el punto medio entre A y B.

Página 196

Para resolver

29 **Halla los puntos de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos $\alpha: 4x - 3y - 1 = 0$ y $\beta: 3x + 4y - 1 = 0$.**

Punto genérico de la recta: $P(1 + \lambda, -2 + \lambda, \lambda)$

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta)$$

$$\frac{|4(1+\lambda) - 3(-2+\lambda) - 1)|}{\sqrt{25}} = \frac{|3(1+\lambda) + 4(-2+\lambda) - 1|}{\sqrt{25}} \to |\lambda + 9| = |7\lambda - 6| \to$$

$$\to \begin{cases} \lambda + 9 = 7\lambda - 6 \to -6\lambda + 15 = 0 \to \lambda = \dfrac{5}{2} \\ \lambda + 9 = -(7\lambda - 6) \to 8\lambda + 3 = 0 \to \lambda = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$P = \left(1 + \frac{5}{2}, -2 + \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad P' = \left(1 - \frac{3}{8}, -2 - \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

$$P = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad P' = \left(\frac{5}{8}, -\frac{19}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

30 **a) Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano σ: $2x - y + 3z + 1 = 0$.**

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

c) Halla el ángulo que forma la recta r con el plano σ.

a) Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$$P(1, -1, 1) \in r \to P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \; // \; r \to \vec{d}(3, -2, 1) \; // \; \pi$$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\overrightarrow{n_\sigma}(2, -1, 3) \perp \sigma \to (2, -1, 3) \; // \; \pi$$

Obtenemos un vector normal a π:

$$(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \to (5, 7, -1)$$

La ecuación del plano π es:

$$5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0 \to 5x + 7y - z + 3 = 0$$

b) Ecuaciones paramétricas de la recta determninada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta:

$$(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$$

Punto de la recta:

$$x = 0 \to \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{cases}$$

c) $\alpha = (\widehat{r, s})$

$\beta = (\widehat{r, n_\sigma})$

$\alpha = 90° - \beta$

$$\cos \beta = \frac{(3, -2, 1) \cdot (2, -1, 3)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6 - 2 + 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \to \beta = 60°$$

$\alpha = 90° - 60° = 30°$

31 **Si** $r: \begin{cases} x \quad -2z+3=0 \\ y-\ z-4=0 \end{cases}$ **y** π**:** $x+2y+3z-1=0$**, halla la ecuación de una recta situada en el plano** π**, que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r**.**

Un vector dirección de r es:

$$(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a (2, 1, 1) y perpendicular a (1, 2, 3) (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

32 **Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x+\ y=z+4 \\ x+2y= \quad 7 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x \quad -2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x+\ y=z+4 \\ x+2y=7 \end{cases}$$

Restando la 1.ª ecuación a la 2.ª:

$$y = 3 - z \to x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \to \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \to s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \to \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \to 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \to -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \to \mu - \lambda = 0 \to \mu = \lambda \to \mu = \lambda \end{array}\right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \to \lambda = \frac{8}{5};\ \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \to \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

33 **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punto de intersección:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}\right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones: } 1 = 9 + 8\mu \rightarrow -8 = 8\mu \rightarrow \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

- Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación:

$$8(x-0) + 5(y-1) - 11(z-0) = 0 \rightarrow 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

34 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta siguiente:**

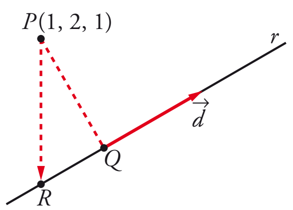
$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x \quad + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \rightarrow y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + \quad z = 2 \rightarrow x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es: $R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

35 **Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje Y.**

Los vértices del triángulo son:

$$y = 0,\ z = 0 \to 2x = 6 \to x = 3 \to A(3, 0, 0)$$
$$x = 0,\ z = 0 \to y = 6 \to B(0, 6, 0)$$
$$x = 0,\ y = 0 \to -3z = 6 \to z = -2 \to C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\to (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$.

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lll} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 & \to (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 & \to 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, 3) \cdot \vec{d} = 0 & \to (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 & \to 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \to$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

36 **Halla el punto P de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:**

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = -6 \quad + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \to 6\lambda = 0 \to \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \to 6\lambda = -6 \to \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

37 **Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano σ: $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.**

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

38 **a) Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a r y s:**

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre r y s.

a) $r: \begin{cases} \vec{d_r}(1, 5, 0) \\ P(-3, -2, 0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \vec{d_s}(0, 4, 1) \\ Q(3, -6, 2) \end{cases}$

Vector perpendicular común:

$\vec{v} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$

La recta t perpendicular común es la intersección $\pi \cap \pi'$, con π, plano que contiene a r y es paralelo a $\vec{v}$ y π', plano que contiene a s y es paralelo a $\vec{v}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 20x - 4y - 26z + 52 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 17x + 5y - 20z + 19 = 0$$

$$t: \begin{cases} 20x - 4y - 26z + 52 = 0 \\ 17x + 5y - 20z + 19 = 0 \end{cases}$$

b) $P \in r \to P(-3 + \lambda, -2 + 5\lambda, 0)$

$Q \in s \to Q(3, -6 + 4\mu, 2 + \mu)$

El vector perpendicular común verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d_r} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d_s} = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (1, 5, 0) = 0 \to 20\mu - 26\lambda - 14 = 0 \\ (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (0, 4, 1) = 0 \to 17\mu - 20\lambda - 14 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1, \ \mu = 2$

Los puntos que determinan la distancia mínima son:

$P = (-3 + 1, -2 + 5, 0) = (-2, 3, 0)$

$Q = (3, -6 + 8, 2 + 2) = (3, 2, 4)$

$dist\ (r, s) = dist\ (P, Q) = \sqrt{(3+2)^2 + (2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{42}$ u

39 **Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.**

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano XY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \quad \begin{array}{l} \frac{a}{1} = \frac{-3}{-1} \to a = 3 \\ \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \to a = 3 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} \frac{a}{1} \\ \frac{9}{a} \end{array}}\right\} a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \to a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\,(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; \frac{64a^2 + 64}{(a^2-9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \;\rightarrow\; 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \;\rightarrow\; a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

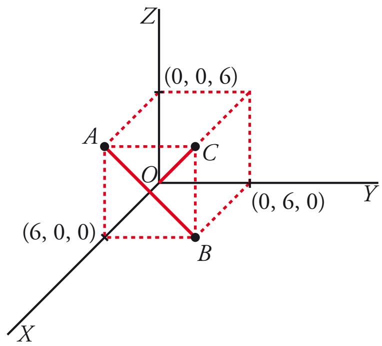
$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \;\rightarrow\; a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \;\rightarrow\; a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

40 Dibuja un cubo de 6 unidades de lado, con un vértice en el origen y los tres vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas. Halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una cara, sabiendo que las rectas que contienen a las diagonales se cruzan.

- La diagonal del cubo para por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$



- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

- $dist\,(r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$

$$[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d'} = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \;\rightarrow\; |\vec{d} \times \vec{d'}| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\,(r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ u

41 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0 \ \rightarrow \ x + 3y + 2z - 14 = 0$$

42 Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano $\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

— Simétrico respecto del plano:

• Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a a:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

• Punto de corte de a con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces:

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \ \rightarrow \ P'(2, -1, 1)$$

— Simétrico respecto de la recta:

• Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 \ \rightarrow \ y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \ \rightarrow \ z = 4x \end{cases}\right\} \rightarrow \ r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

• Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0 \ \rightarrow \ x + y + 4z - 15 = 0$$

• Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18L - 12 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces:

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \ \rightarrow \ P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

43 **a) Encuentra los puntos de** $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ **que disten** $\frac{1}{3}$ **del plano** $\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$.

b) Obtén los puntos de π **que distan** $\frac{1}{3}$ **de los puntos hallados en el apartado anterior.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} y &= -x \\ z &= x \end{aligned}\right\} \to r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \to \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \to \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \to \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \to 9\lambda = -1 \to \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \to \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

44 Dados los puntos $A(-1, 3, -1)$, $B(-3, 1, -7)$ y $C(0, 5, 1)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Es suficiente probar que no están alineados:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -7) - (-1, 3, -1) = (-2, -2, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 5, 1) - (-1, 3, -1) = (1, 2, 2)$$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{2} \rightarrow \text{Los puntos no están alineados, son vértices de un triángulo.}$$

b) El segmento que nos piden es la altura del triángulo que forman.

Calculamos el área del paralelogramo, A_p, que forman $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, la dividimos entre la medida de la base, $|\overrightarrow{AC}|$ y obtenemos la altura:

$$A_p\text{: } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-2, -2, -6) \times (1, 2, 2)| = |(8, 2, 2)| = \sqrt{64 + 4 + 4} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Medida de la base: } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

La longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC es:

$$\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

45 Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro sobre $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es (0, 0, 0), ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

a) $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\lambda,\ y = \dfrac{1}{2}\lambda,\ z = \lambda$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(2, -1, -2) \\ P_s(3, 1, -5) \end{cases}$$

$$\vec{d}_s = -2\,\vec{d}_r \rightarrow r \,//\, s$$

El lado del cuadrado es la distancia entre las rectas.

$$l = dist\,(r, s) = dist\,(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(3, 1, -5) \times (2, -1, -2)|}{|(2, -1, -2)|} =$$

$$= \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{49 + 16 + 25}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \sqrt{10} \text{ u}$$

Área $= 10$ u^2

b) Un punto genérico de r es:

$$A\left(-\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \lambda\right)$$

$$dist\,(A, O) = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{(-\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + (\lambda)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \frac{9}{4}\lambda^2 = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2}{3}\sqrt{10},\ \lambda = -\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$A\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right) \text{ y } A'\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{1}{3}\sqrt{10}, -\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$$

Página 197

46 **Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.**

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \;\rightarrow\; 2\lambda = 4 \;\rightarrow\; \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$.

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83 \text{ u}$$

47 **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array}\right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales, luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \;\rightarrow\; A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

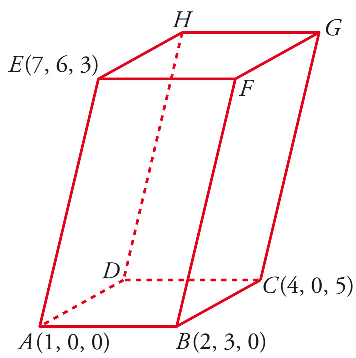
$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ u}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}|\text{Área base} \cdot \text{altura}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

48 **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:



- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \;\rightarrow\; (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$$

$D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \;\rightarrow\; (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$$

$F(8, 9, 3)$

- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$

  $G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$

  $H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0)$, $\overrightarrow{AD}(2, -3, 5)$, $\overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

49 **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina su posición relativa y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \text{ Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x; \ z = 2 - x + y = 3 + x$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

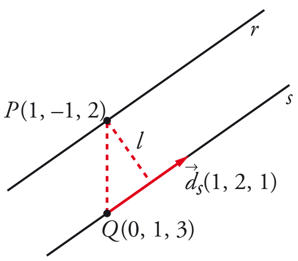
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

  $\vec{d}_r(1, 2, 1)$; $P(1, -1, 2)$

  $\vec{d}_s(1, 2, 1)$; $Q(0, 1, 3)$

  Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ u}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

50 **Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ sobre el plano α: $x-3y+2z+12=0$.**

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano, π, perpendicular a α y que contiene a r.

$$P(1, 1, 2); \quad \vec{d}_r(2, 1, 2); \quad \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es:

$$8(x-1)-2(y-1)-7(z-2)=0 \;\to\; \pi: 8x-2y-7z+8=0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x-3y+2z+12=0 \\ 8x-2y-7z+\ \ 8=0 \end{cases}$$

51 **Considera las rectas r y s:**

$$r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3+2\lambda, \lambda, 1+\lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3-2\lambda+\mu, -\lambda-\mu, -1-\lambda-\mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS}\cdot(2,1,1)=0 \;\to\; -6\lambda-7=0 \;\to\; \lambda=-\dfrac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS}\cdot(1,-1,-1)=0 \;\to\; -2+3\mu=0 \;\to\; \mu=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \;\to\; \vec{d}(0,1,-1)$$

La recta es:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{7}{6}+\lambda \\ z=-\dfrac{1}{6}-\lambda \end{cases}$$

52 **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.**

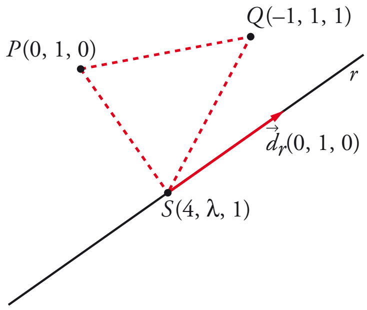
a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \to \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \to \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$



b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$; $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

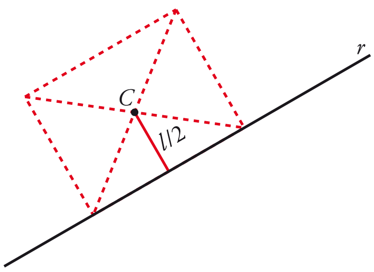
53 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \parallel \pi$

Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

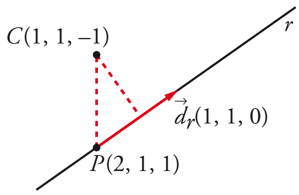
$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0 \to 2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.

$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

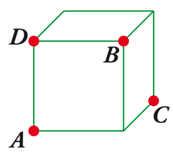
$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist(C, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u}$$



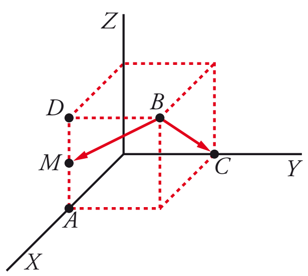
$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \to$ lado del cuadrado $= l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ u

54 **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$; $B(1, 1, 1)$; $C(0, 1, 0)$; $D(1, 0, 1)$; $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \to \alpha = 71° 33' 54''$$

55 **Sea la recta** $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s **que corta perpendicularmente a** r **y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto** P **intersección de** r **y** s**.**

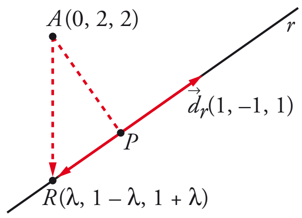
b) Halla la ecuación del plano π **que contiene a** r **y a** s**, y la de la recta** t **perpendicular a** π **por el punto** P**.**

c) Si Q **es cualquier punto de** t**, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de** Q **a** r**, a** s **y a** π**.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \;\rightarrow\; z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \;\rightarrow\; y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir, $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$.

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; 3\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}\ (0, 1, 1) \;\rightarrow\; s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1)$; $P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \;\rightarrow\; \pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \;\rightarrow\; dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

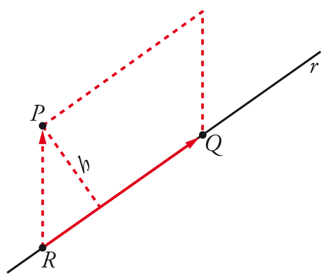
56 **a) Halla la distancia del punto** $P(1, -1, 3)$ **a la recta que pasa por los puntos** $Q(1, 2, 1)$ **y** $R(1, 0, -1)$**.**

b) Encuentra todos los puntos S **del plano determinado por** P**,** Q **y** R**, de manera que el cuadrilátero de vértices** P**,** Q**,** R **y** S **sea un paralelogramo.**

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q, entonces:

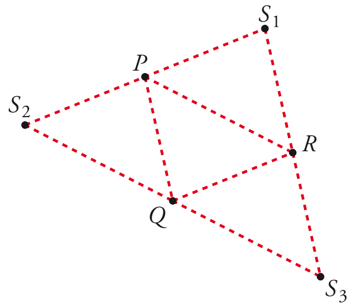
$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Bse}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2) \end{matrix}\right\} \; \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$



$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54 \text{ u}$$

b) Hay tres posibilidades: que P y Q no formen un lado del paralelogramo, que P y R no formen un lado o que Q y R no formen un lado.



- Si P y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \rightarrow (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1) \rightarrow S_1(1, -3, 1)$

- Si P y Q no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \rightarrow (0, -1, 4) = (a - 1, b -2, c - 1) \rightarrow S_2(1, 1, 5)$

- Si Q y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_3(\alpha, \beta, \gamma)$:

  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS_3} \rightarrow (0, 3, -2) = (\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \rightarrow S_3(1, 3, -3)$

57 Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen de coordenadas.

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2+1+1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1 \text{ u}$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2+2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

58 Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases}$ a los ejes coordenados.

Hallaremos el plano π que contiene a r y es paralelo a cada uno de los ejes de coordenadas.

$$r: \begin{cases} x - 3z - 3 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3 + 3\lambda,\ y = -1 + 4\lambda,\ z = \lambda$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 4, 1) \\ P_r(3, -1, 0) \end{cases}$$

- Eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_{OX}(1, 0, 0) \\ P_{OX}(0, 0, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi_x: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y - 4z + 1 = 0$$

$$dist\,(OX, r) = dist\,(OX, \pi_x) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1+16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \text{ u}$$

- Eje OY:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_{OY}(0,1,0)\\ P_{OY}(0,0,0)\end{array}\right\} \to \pi_y: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x+3z+3=0$$

$$dist\,(OY, r) = dist\,(OY, \pi_y) = \frac{|0+0+3|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ u}$$

- Eje OZ:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_{OZ}(0,0,1)\\ P_{OZ}(0,0,0)\end{array}\right\} \to \pi_z: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4x-3y-15=0$$

$$dist\,(OZ, r) = dist\,(OZ, \pi_z) = \frac{|0-0-15|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

59 **a) Determina el valor de a y b para que los tres planos se corten en una misma recta.**

$$\begin{cases} x+ay+\ \ z=0 \\ x+y-2z=b \\ -2x+y+\ \ z=-2 \end{cases}$$

b) Halla el simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a los tres planos dados.

a) Para que los tres planos se corten en una recta, los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada tienen que ser iguales a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para que $ran(A) = 2$, tiene que ser $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3a+6=0 \to a=-2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Para que $ran(A') = 2$, añadimos al menor anterior la cuarta columna y el menor obtenido también tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3b-6=0 \to b=2$$

b) Para $a=-2$ y $b=2$, el sistema es equivalente a:

$$r: \begin{cases} x-2y+\ \ z=0 \\ x+\ \ y-2z=2 \end{cases} \to x = \frac{4}{3}+\lambda,\ y=\frac{2}{3}+\lambda,\ z=\lambda$$

Calculamos el plano perpendicular a r que pasa por O.

$$\pi: x+y+z=0$$

El punto de intersección $M = r \cap \pi$ es el punto medio entre O y su simétrico $O'(a, b, c)$ respecto de la recta.

$$r \cap \pi: \left(\frac{4}{3}+\lambda\right) + \left(\frac{2}{3}+\lambda\right) + \lambda = 0 \to \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$M = \left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \to O'\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

60 **Los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo, cuyo tercer vértice, C, está contenido en $r: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Si el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C?**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$

$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2\lambda, y = \lambda, z = 1$

El punto $C(2\lambda, \lambda, 1)$

$\overrightarrow{AC}\ (2\lambda, \lambda, 1)$

La expresión $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$ nos da el área del triángulo que forman los tres puntos.

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1, 1, 1) \times (2\lambda, \lambda, 1)|}{2} = \frac{|(1 - \lambda, 2\lambda - 1, -\lambda)|}{2} = \frac{\sqrt{(1-\lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + (-\lambda)^2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2} = \sqrt{2} \rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0$$

Los puntos son $C(2, 1, 1)$ y $C'(0, 0, 1)$.

61 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, A) = dist\,(P, B) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$$

$\pi: 2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}\ (2, 8, -8)\ //\ \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

62 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos $\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$ y $\beta: x - 3y + 2z - 3 = 0$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3| \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

Página 198

63 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, y, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1 \to |x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \to x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \to x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

64 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:**

$$\alpha: 3x - 4y + 5 = 0 \qquad \beta: 2x - 2y + z + 9 = 0$$

b) ¿Qué puntos del eje Y equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \to \frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \to x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \to 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son *los planos bisectores* del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \to \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9| \begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \to -2y = 30 \to y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \to -22y = -60 \to y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos:

$$Q_1(0, -15, 0) \text{ y } Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$$

65 **Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a la misma distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?**

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$dist\,(A, P) = dist\,(A, Q) \to$

$$\to \sqrt{(x - + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2} \to$$

$$\to \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 = \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \to$$

$$\to -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \to \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \to$$

$$\to dist\,(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \text{ u}$$

66 **a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}\,(0, 0, 1)$.

Su ecuación es:

$$0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0, \text{ es decir: } z - 1 = 0$$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

67 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y cuyo centro pertenece a la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4+1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| =$$

$$= |-z + 1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2x - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow \text{Radio} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

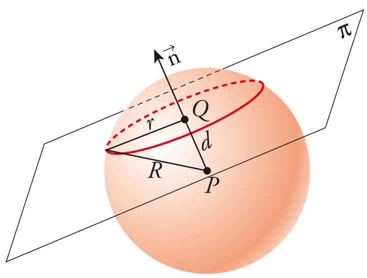
  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

- $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow \text{Radio} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

68 **La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia.**

Halla su centro y su radio.



- Obtengamos el centro de la circunferencia:

  — El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

  — La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

  $$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

  — El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

  $$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

  $$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

  $Q(1, 0, 0)$

- Calculamos el radio de la circunferencia:

  La distancia entre los centros P y Q es:

  $$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

  El radio de la esfera es $R = 5$.

  Luego el radio de la circunferencia es:

  $$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

69 a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta $\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-1}$.

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$.

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\to\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda+4)^2 + (\lambda+2)^2 + (-\lambda-1)^2} = \sqrt{(2\lambda+5)^2 + (\lambda+1)^2 + (-\lambda-5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda = \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \;\to\; \lambda = -3 \;\to\; C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera}$$

La ecuación es:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9, \text{ o bien: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

70 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (2, 0, 0) y (–2, 0, 0) sea igual a 6.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36 \;\to\; 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81 \;\to\; 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45 \;\to\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

71 **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de (0, 0, 3) y del plano $z = -3$.**

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$dist = (P, (0, 0, 3)) = dist\ (P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = \frac{|z+3|}{\sqrt{1}} = |z+3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = (z+3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

72 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) sea igual a 4.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2}\,\right| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

73 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos (2, 3, 4) y (2, 3, –4) es igual a 8?**

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x-2)^2} + (y-3)^2 + \cancel{(z-4)^2} = 64 + \cancel{(x-2)^2} + (y+3)^2 + \cancel{(z-4)^2} -$$

$$-16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

$$16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 64 + 12y$$

$$4\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 16 + 3y$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16) = 256 + 96y + 9y^2$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0$$

Se trata de un *elipsoide*.

74 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto $(0, -2, 1)$.**

$$dist\,(P, \pi) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

$$dist\,(P, Q) = \sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2}$$

$$\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

Cuestiones teóricas

75 **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano:

I) Si $a = 0$ y $b = 0$ el plano es perpendicular al plano XY.

II) Si $b = 0$ y $c = 0$ el plano es paralelo al plano YZ.

III) Si $a = 0$ y $c = 0$ el plano es perpendicular al eje Y.

b) Si $P \in r$ hay infinitas rectas perpendiculares a r que pasan por P.

c) No es posible calcular la distancia entre el plano $x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $x = y = z$.

d) El punto $P'(2, 6, -3)$ es el simétrico de $P(-1, 3, 3)$ respecto del plano $x + y - 2z - 5 = 0$.

e) No es posible hallar el punto de corte de las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \qquad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z}{4}$$

f) La distancia entre los planos $\alpha: x + y - z = 1$ y $\beta: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 \quad + s \end{cases}$ es igual a $\sqrt{3}$ u.

g) El plano $2x + y + z = 2$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$ u^2.

h) Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto que está contenido en el plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es un punto tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, entonces $B \in \pi$.

a) I) Falso, pues el plano es perpendicular a $(0, 0, 1)$, que es la dirección del eje OZ, y es paralelo al plano XY, no perpendicular.

II) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(1, 0, 0)$, que es la dirección del eje OX, y es paralelo al plano YZ.

III) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(0, 1, 0)$, que es la dirección del eje OY.

b) Verdadero, todas las rectas del plano π perpendicular a r que pasan por P verifican la condición.

c) Falso, siempre es posible calcular la distancia entre un plano y una recta.

En este caso, como $\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{d_r} = (1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 0$ y el punto $(0, 0, 0)$ de la recta no está en el plano, $r \,//\, \pi$.

La distancia $dist\,(r, \pi)$ es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$dist\,(O, \pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{6}\sqrt{6} \text{ u}$$

d) $\overrightarrow{PP'} = (2, 6, -3) - (-1, 3, 3) = (3, 3, -6) = 3(1, 1, 2) \rightarrow \overrightarrow{PP'} \perp \pi$

El punto medio es $M = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

Sustituimos las coordenadas de M en π:

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 5 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

Luego el segmento PP' es perpendicular a π y lo corta en su punto medio. La afirmación es verdadera.

e) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(2, -3, 3) \\ P_r\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-2, 1, 4) \\ P_s\left(3, \frac{-3}{2}, 0\right) \end{cases}$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = \left(3, \frac{-3}{2}, 0\right) - \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(2, -2, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3/2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Verdadero, las rectas se cruzan.}$$

f) $\vec{n}_\beta = (1, -1, 0) \times (1, 0, 1) = -(1, 1, -1) = -\vec{n}_\alpha \rightarrow$ Los planos son paralelos.

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \beta: z - y - x = 0$$

$$dist\,(\alpha, \beta) = |dist\,(O, \alpha) - dist\,(O, \beta)| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ u}$$

Falso, la distancia es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ u.

g) $A = OX \cap \pi = (1, 0, 0)$

$B = OY \cap \pi = (0, 2, 0)$

$C = OZ \cap \pi = (0, 0, 2)$

$\overrightarrow{AB}\,(-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC}\,(-1, 0, 2)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 2)|}{2} = \frac{|(4, 2, 2)|}{2} = \frac{\sqrt{16+4+4}}{2} = \sqrt{6} \text{ u}^2$$

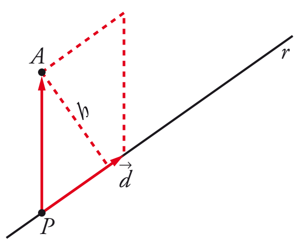
Verdadero.

h) Verdadero, porque $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_\pi$.

Si $A \in \pi$, todo vector con origen en A y perpendicular al vector normal al plano tiene su extremo en π, luego $B \in \pi$.

76 **Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ es:**

$$dist\,(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}\,(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\,(A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

77 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector director $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por B y $\vec{d}_s$. Si suponemos que r y s se cruzan:**

a) Justifica la igualdad $dist(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$.

b) Justifica que la perpedicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $dist\,(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \text{ y } \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

β: $det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto, $p: \begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

78 **Comprueba que los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$ forman un triángulo isósceles.**

$dist\,(A, B) = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(\lambda-\lambda)^2 + (-2)^2 + (\lambda+2-\lambda)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(\lambda-2)^2 + (-\lambda)^2 + (\lambda+2)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

Los lados AB y BC miden lo mismo, luego el triángulo es isósceles.

Página 199

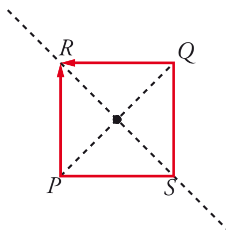
Para profundizar

79 **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.



La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

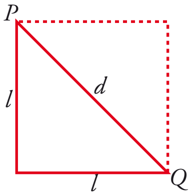
Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PR}(1+\lambda, -1+\lambda, 1)\\ \overrightarrow{QR}(-1+\lambda, 1+\lambda, -1)\end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l}\lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$$

Los vértices son: $R\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \to d^2 = 2l^2 \to 12 = 2l^2 \to l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$ u

80 **Considera las rectas r, s y t siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 - \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

Halla un punto P que esté en la recta t y tal que el plano que determina con la recta s contenga a la recta r.

$P \in t \to P = (\gamma, -1-\gamma, \gamma)$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(0, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s(1, -1, -2) \\ P_s(0, 0, -2) \end{cases}$$

$\overrightarrow{P_sP}\ (\gamma, -1-\gamma, \gamma+2)$

π: plano que contiene a P y a s

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ \gamma & -1-\gamma & \gamma+2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi: (4+3\gamma)x + (2+3\gamma)y + z + 2 = 0$$

Calculamos el valor de γ para que $P_r \in \pi$:

$$P_r \in \pi \to (4+3\gamma) \cdot (-2) + 2 = 0 \to -8 - 6\gamma + 2 = 0 \to \gamma = -1$$

La condición para que $r \subset \pi$ es que $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \to \vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.

$$\vec{n}_\pi = (3+2\gamma, \gamma, -\gamma) = (1, -1, 1)$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (0, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

Luego $r \subset \pi$.

El punto pedido es $P(-1, 0, -1)$.

81 **Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ con los tres planos coordenados. ¿Qué figura obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 4 y 3.

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 3.

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 4.

Es un *elipsoide*.

82 **Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:**

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0}$$

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

$2(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$

$2(x-2)^2 + 3(y+1)^2 + (z-2)^2 = 18$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{18} = 1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

83 **Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$ con los planos coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?**

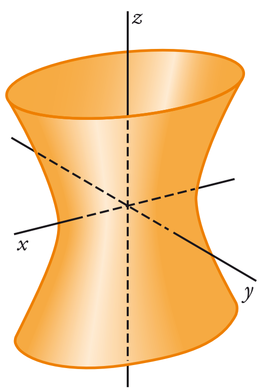
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 2.

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 3.

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 3 y 2.

Es un *hiperboloide*.

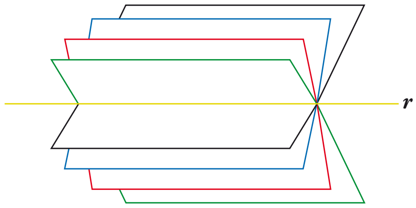


84 Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ.

El conjunto de todos los planos que contienen a r **se llama** ***HAZ DE PLANOS*** **de arista** r, **y su expresión analítica es:**

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a **y** b **(salvo para** $a = 0$ **y** $b = 0$**), se obtiene la ecuación de un plano del haz.**

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k **uno de los planos del haz es perpendicular a la recta** $t: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$**? ¿Cuál es ese plano?**

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta $s: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$.

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \ \to \ b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es:

$\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \ \to \ a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$-11(2k + 3) + (k - 3) = 0 \ \to \ -22k - 33 + k - 3 = 0$

$-21k - 36 = 0 \ \to \ k = \dfrac{-36}{21} = \dfrac{-12}{7} \ \to \ k = \dfrac{-12}{7}$

El plano del haz es:

$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$

$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$

$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$

$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \rightarrow (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \rightarrow k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \rightarrow -2x + 10 = 3y + 3 \rightarrow -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \rightarrow x - 5 = 3z - 9 \rightarrow x - 3z + 4 = 0$$

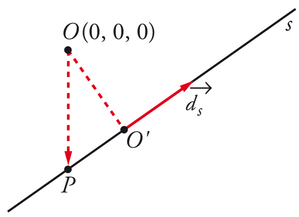
$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego:

$O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será:

$$5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0 \rightarrow 5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

Autoevaluación

Página 199

1 a) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano que pasa por $P(1, –1, –2)$ y es paralelo al plano π: $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

c) ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por A y P con π?

a) π': $x + 2y + 3z + k = 0$

$P \in \pi' \to 1 - 2 - 6 + k = 0 \to k = 7 \to \pi'$: $x + 2y + 3z + 7 = 0$

$$dist\,(A, \pi') = \frac{|1+7|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4}{7}\sqrt{2}\sqrt{7} \text{ u}$$

b) $A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de π.

r: recta perpendicular a π que pasa por A.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi \to (1 + \lambda) + 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6 = 0 \to \lambda = -\frac{1}{2}$$

$M\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de M.

$$\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \to x = 0,\ y = -2,\ z = -3 \to A' = (0, -2, -3)$$

c) $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$

$\vec{d}\,(0, -1, -2)$

$$sen\ (\widehat{s, \pi}) = \frac{|(0, -1, -2) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{35}}\sqrt{2} \to (\widehat{s, \pi}) = arc\ sen\ \frac{3}{\sqrt{35}}\sqrt{2}$$

2 a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, –1)$.

b) Comprueba que el plano que obtienes, π, es perpendicular al segmento PQ en su punto medio.

c) El plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.

d) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y O (origen de coordenadas).

a) $A(x, y, z)$: punto genérico.

$dist\,(A, P) = dist\,(A, Q)$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2}$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = (x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59) = 0$$

$$-4x + 12y - 8z - 24 = 0$$

Es un plano:

$$\pi: -x + 3y - 2z - 6 = 0$$

b) $\vec{n}_\pi(-1, 3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 7, -1) - (5, 1, 3) = (-2, 6, -4) = 2(-1, 3, -2) \to \overrightarrow{PQ} \,//\, \vec{n}_\pi \to \pi \perp \overrightarrow{PQ}$

$M = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) = (4, 4, 1)$

Sustituimos las coordenadas de M en π:

$-4 + 12 - 2 - 6 = 0 \to M \in \pi$

Luego π es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

c) $A(-6, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -3)$

$\overrightarrow{AB}(6, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC}(6, 0, -3)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|(6,2,0)\times(6,0,-3)\right| = \frac{1}{2}\left|(-6,18,-12)\right| = \frac{6}{2}\left|(-1,3,-2)\right| = 3\sqrt{1+9+4} = 3\sqrt{14}\ \text{u}^2$$

d) $\overrightarrow{OA}(-6, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB}(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{OC}(0, 0, -3)$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\ \text{u}^3$$

3 Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuación:

$$x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Buscamos un punto M de la recta de manera que el vector $\overrightarrow{AM}$ sea perpendicular al vector dirección de r.

Un punto de r es de la forma $(1, -3, -1) + \lambda(1, 2, 2) = (1 + \lambda, -3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

$\overrightarrow{AM}(4 + \lambda, -4 + 2\lambda, -7 + 2\lambda)$

El vector dirección de la recta es $(1, 2, 2)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{d}_r = 4 + \lambda - 8 + 4\lambda - 14 + 4\lambda = -18 + 9\lambda = 0 \to \lambda = 2$

El punto M es $(3, 1, 3)$.

Buscamos un punto $A'(\alpha, \beta, \gamma)$ simétrico de A respecto de M:

$A' = M + \overrightarrow{AM} = (3, 1, 3) + (6, 0, -3) = (9, 1, 0)$

4 Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \qquad \pi: 3x + 4y - 6 = 0$$

a) Comprueba que son paralelos y calcula $dist(r, \pi)$.

b) Halla las ecuaciones de dos rectas distintas que estén contenidas en π y que sean paralelas a r y calcula la distancia entre ellas.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(-4, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$

$\pi: 3x + 4y - 6 = 0$

$\vec{d}_r(-4, 3, 1)$, $\vec{n}_\pi(3, 4, 0)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \to \vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi \to r \,//\, \pi$

$$dist(r, \pi) = dist(P_r, \pi) = \left|\frac{3 + 8 - 6}{5}\right| = 1\ \text{u}$$

b) Tomamos dos puntos de π distintos, P y P'.

$$s: \begin{cases} \vec{d_s} = \vec{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} \vec{d_t} = \vec{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 2) \end{cases}$$

$$dist\,(s, t) = dist\,(P, t) = \frac{|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|} = \frac{|(0, 0, 1) \times (-4, 3, 1)|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{|(-3, -4, 0)|}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ u}$$

5 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$**:**

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r **y a** s**.**

b) Calcula la distancia entre r **y** s**.**

a) $\vec{d_r}\,(2, -1, 1)$; $\vec{d_s} = (2, -1, 1) \times (1, 0, 3) = (-3, -5, 1)$

Por tanto, si llamamos t a la recta que buscamos:

$$\vec{d_t} = (2, -1, 1) \times (-3, -5, 1) = (4, -5, -13)$$

Plano α que contiene a t y a r:

$$\left.\begin{array}{l} P(3, 5, 4) \\ \vec{d_r}(2, -1, 1) \\ \vec{d_t}(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \alpha: \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 4 \\ y-5 & -1 & -5 \\ z-4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \alpha: 3x + 5y - z - 30 = 0$$

Plano β que contiene a t y a s:

Hallamos primero un punto de s haciendo $x = 0$ en las ecuaciones de s:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z + 4 = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} z = 0 \\ y = 4 \end{cases} \to Q(0, 4, 0)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} Q(0, 4, 0) \\ \vec{d_s}(-3, -5, 1) \\ \vec{d_t}(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \beta: \begin{vmatrix} x & -3 & 4 \\ y-4 & -5 & -5 \\ z & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: 2x - y + z + 4 = 0$$

La recta t es:

$$t: \begin{cases} 3x + 5y - z - 30 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P, y un vector director, $\vec{d_s}$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(0, 4, 0) \in s \qquad \vec{d_s}\,(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d_r}$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r:

$$Q(3, 5, 4) \in r; \ \vec{d_r}\,(2, -1, 1)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}(3, 1, 4)$

$$dist(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{\vec{d}_r \times \vec{d}_s}$$

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$dist(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14} \text{ u}$$

6 **a) Halla el centro y el radio de esta esfera:**

$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S.

a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano $\pi: 3x - 4z + 5 = 0$:

$$dist(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$