

Autoevaluación

Página 200

- 1** Determina todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u}(1, -1, -1)$ y $\vec{v}(-1, 2, 1)$.

Los vectores perpendiculares a los dos vectores a la vez son proporcionales al producto vectorial de ambos.

$$\vec{w} = (1, -1, -1) \times (-1, 2, 1) = (1, 0, 1)$$

$$|\vec{w}| = 2$$

Los vectores que buscamos son:

$$\vec{w}_1 = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \vec{w}_2 = -2 \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)$$

- 2** Dados los vectores $\vec{u}(2, 0, 0)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$ y $\vec{w}(-2, 3, 2)$, calcula:

- a) El área del paralelogramo determinado por \vec{v} y \vec{w} .
 b) El ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} .
 c) El volumen del paralelepípedo que forman \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

a) Área = $|\vec{v} \times \vec{w}|$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (1, 0, -1) \times (-2, 3, 2) = (3, 0, 3) \rightarrow \text{Área} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \text{ u}^2$$

b) $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{(2, 0, 0) \cdot (1, 0, -1)}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

c) $V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \text{ u}^3$

- 3** Dados los puntos $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 1)$ y $R(2, 0, -1)$:

- a) Halla la recta que pasa por P y Q .
 b) Halla el plano que contiene a P , Q y R .
 c) Halla la distancia entre P y Q .

a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1)$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, -1) = (3, 1, -5) \perp \pi$$

$$\pi: 3(x-3) + 1(y-2) - 5(z-0) = 0 \rightarrow 3x + y - 5z - 11 = 0$$

c) $\text{dist}(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ u}$

- 4** Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento de extremos $A(0, -1, 3)$ y $B(2, -1, 1)$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

$$\text{Punto medio: } M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (1, -1, 2)$$

$$\text{Vector normal al plano: } \overrightarrow{AB} = (2, -1, 1) - (0, -1, 3) = (2, 0, -2)$$

$$\text{La ecuación del plano buscado es: } (x-1) - 2(z-2) = 0 \rightarrow \pi: 2x - 2z + 2 = 0$$

- 5** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $2x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Puntos de corte:

$$P = \pi \cap OX = (1, 0, 0)$$

$$Q = \pi \cap OY = (0, 2, 0)$$

$$R = \pi \cap OZ = (0, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{PR} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} |(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 1)| = \frac{1}{2} |(2, 1, 2)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = \frac{3}{2} \text{ u}^2$$

- 6** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente al eje Z y pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

El vector director de r , el del eje Z y el que une P con un punto del eje Z deben ser coplanarios.

$$Q(0, 0, 1) \quad P(1, 2, 3)$$

$$\vec{v}_z = (0, 0, 1) \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a - b = 0$$

$$\text{Además, } \vec{v}_z \cdot \vec{d}_r = 0 \rightarrow (0, 0, 1)(a, b, c) = 0 \rightarrow c = 0$$

El vector director de r es de la forma $(1, 2, 0)$.

$$\text{Por tanto, } (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 0)$$

- 7** Considera las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

a) Determina los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que r y s sean paralelas.

b) ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (a, 0, 1) = (1, 2, a) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (1, b, 0) \times (0, 1, 1) = (b, -1, 1) \\ P_s = (3, 0, 3) \end{cases}$$

$$a) \vec{d}_r = k \vec{d}_s \rightarrow \frac{1}{b} = \frac{2}{-1} = \frac{a}{1} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) \overrightarrow{P_r P_s} = (3, 0, 3)$$

$$\text{Para que sean coincidentes, necesitamos } \overrightarrow{P_r P_s} = k \vec{d}_s \rightarrow \frac{3}{b} = \frac{0}{-1} \neq \frac{3}{1}$$

Las coordenadas no son proporcionales para ningún valor de b , luego no existen valores de $a \neq 0$ y de $b \neq 0$ para los cuales las rectas son coincidentes.

8 Sean las rectas $r: x = y = z$ y $s: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$

a) Comprueba que r y s se cruzan.

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s .

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (1, 1, 1) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (1, 0, -3) = (3, 3, 1) \\ P_s = (1, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (1, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) Vector perpendicular común: $\vec{w} = (1, 1, 1) \times (3, 3, 1) = (-2, 2, 0)$

π : plano que contiene a r y a la dirección \vec{w} :

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x - 2y + 4z = 0$$

π' : plano que contiene a s y a la dirección \vec{w} :

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x - 2y + 12z + 2 = 0$$

La recta pedida, t , es:

$$t: \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2x - 2y + 12z + 2 = 0 \end{cases}$$

9 Considera las rectas $r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{2z-1}{4}$.

a) Estudia su posición relativa según los valores de a .

b) Calcula el ángulo que forman en el caso $a = 2$.

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r = (2, 0, -4) \times (1, 1, 1) = (4, -6, 2) \\ P_r = (1, 0, 0) \end{cases} \quad s: \begin{cases} \vec{d}_s = (2, a, 2) \\ P_s = \left(0, -2, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

a) $\text{ran} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas se cruzan o se cortan para cualquier valor de a , pero nunca serán paralelas.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = \left(-1, -2, \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{vmatrix} = 4a + 26 = 0 \rightarrow a = -\frac{13}{2}$$

• Si $a \neq -\frac{13}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = 3 \rightarrow$ Las rectas se cruzan.

• Si $a = -\frac{13}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \rightarrow$ Las rectas se cortan.

b) $\cos(\widehat{r, s}) = |\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{(4, -6, 2) \cdot (2, 2, 2)}{2\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{3}} = 0 \rightarrow \widehat{r, s} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Las rectas son perpendiculares.

10 a) Halla las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por $A(0, 2, -4)$ y es paralela a r :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 0)$ a r .

a) Calculamos el vector director de r , \vec{d}_r .

$$\vec{d}_r = (5, -3, 2) \times (1, 3, -2) = (0, 12, 18)$$

Como son paralelas, $\vec{d}_s // \vec{d}_r \rightarrow \vec{d}_s = (0, 2, 3)$

$$\text{Entonces, } s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

$$b) r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}\lambda - \frac{7}{6}, z = \lambda$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{d}_r &= \left(0, \frac{2}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}(0, 2, 3); & P_r &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} \times \vec{d}_r &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{6}, 0\right) \times (0, 2, 3) = \left(-\frac{13}{2}, \frac{9}{2}, -2\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{dist}(P, r) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} \sqrt{143}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{22}}{2} \text{ u}$$

11 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralelo a la recta

$$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ y es perpendicular al plano } \alpha: 2x - y + z + 1 = 0.$$

$$(1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0) // (2, 1, 0) = \vec{d}_r$$

Sea π el plano buscado y \vec{n} su vector normal. Entonces:

$$\pi // r \Rightarrow \vec{d}_r \perp \vec{n}$$

$$\pi \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} \perp (2, -1, 1)$$

$$\text{Por tanto, } \vec{n} = (2, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -2, -4)$$

$$\text{Ecuación de } \pi: 1(x-1) - 2(y-0) - 4(z+1) = 0 \rightarrow x - 2y - 4z - 5 = 0$$

12 Considera el plano $\pi: x + y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, -1)$. Obtén:

a) El punto Q del plano π tal que la recta s determinada por P y Q sea perpendicular al plano π .

b) Los puntos R de la recta s tales que la distancia de R a π sea el doble que la distancia de P a π .

a) s : recta perpendicular a π que pasa por P .

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Q debe ser la intersección del plano π y la recta perpendicular a π que pasa por P :

$$Q = s \cap \pi$$

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (-1 - \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$Q = (0, 0, 0)$$

$$b) \text{dist}(P, \pi) = \frac{3}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{dist}(R, \pi) = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\text{dist}(R, \pi) = \left| \frac{(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - (-1 - \lambda)}{\sqrt{3}} \right| = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3\lambda + 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{3\lambda + 3}{\sqrt{3}} = -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3\lambda + 3 = 6 \rightarrow \lambda = 1 \\ 3\lambda + 3 = -6 \rightarrow \lambda = -3 \end{array} \right\}$$

Hay dos soluciones: $R_1 = (2, 2, -2)$, $R_2 = (-2, -2, 2)$

13 Halla la ecuación de la recta que está contenida en el plano $\alpha: x + y + z = 3$, es paralela al plano $\beta: x = 0$ y que pasa por el punto simétrico de $P(-1, 1)$ respecto de β .

Sea $M: \beta \cap r$ con $r \perp \beta$ que pasa por P .

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$-1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow M = (0, 1, 1)$$

P' : simétrico de P respecto de $\beta \rightarrow M$ es punto medio de P y P' .

$$P' = (x, y, z)$$

$$M = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2} \right) = (0, 1, 1) \rightarrow P' = (1, 1, 1)$$

Los planos paralelos a β son: $x + k = 0$

La recta s pedida tiene como ecuaciones implícitas:

$$s: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + k = 0 \end{cases}$$

Para calcular k tenemos que tener en cuenta que $P \in s$:

$$1 + k = 0 \rightarrow k = -1 \rightarrow s: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

14 Dadas las rectas:

$$r: \frac{2x-1}{2} = 1-y=z \quad y \quad s: \begin{cases} x + y + z + m = 0 \\ 3x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

calcula m para que estén en el mismo plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-(1/2)}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} \rightarrow \vec{d}_r = (1, -1, 1) \\ s: \vec{d}_s = (1, 1, 1) \times (3, 0, -4) = (-4, 7, -3) \end{array} \right\}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas. Veamos cómo ha de ser m para que se corten.

Conviene expresar cada una de las dos rectas como intersección de dos planos. Obligamos a que los cuatro planos tengan algún punto común:

$$r: \begin{cases} \frac{2x-1}{2} = z \rightarrow 2x - 2z = 1 \\ 1-y = z \rightarrow y + z = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x + y + z = -m \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -m \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -2m - 8; \quad -2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Si $m = -4$, las dos rectas se cortan. Por tanto, están en un mismo plano.

- 15** Dados la recta y el plano siguientes, halla la ecuación de un plano paralelo a β que diste 3 unidades de la recta r :

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases} \quad \beta: x - 3y - z + 6 = 0$$

Los planos π paralelos a β son: $x - 3y - z + k = 0$.

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -5\lambda - 7, \quad y = -2\lambda - 3, \quad z = \lambda$$

$$s: \begin{cases} \vec{d}_r = (-5, -2, 1) \\ P_r = (-7, -3, 0) \end{cases}$$

$$(-5, -2, 1) \cdot (1, -3, -1) = 0 \rightarrow r // \beta$$

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P_r, \pi) = \frac{|-7 + 9 + k|}{\sqrt{11}} = \frac{|2 + k|}{\sqrt{11}}$$

$$\begin{cases} \frac{2+k}{\sqrt{11}} = 3 \rightarrow k = 3\sqrt{11} - 2 \\ \frac{2+k}{\sqrt{11}} = -3 \rightarrow k = -3\sqrt{11} - 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$\pi_1 = x - 3y - z + 3\sqrt{11} - 2 = 0, \quad \pi_2 = x - 3y - z - 3\sqrt{11} - 2 = 0$$

- 16** Halla un punto de la recta $x = -y = z$ tal que su distancia a $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ sea igual a 1 unidad.

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow P_s = (\lambda, -\lambda, \lambda) \quad r: \begin{cases} \vec{d}_r = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0) \\ P_r = (0, 0, 3) \end{cases}$$

$$\text{dist}(P_s, r) = \frac{|\overrightarrow{P_s P_r} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{P_s P_r} &= (-\lambda, \lambda, 3 - \lambda) \\ \overrightarrow{P_s P_r} \times \vec{d}_r &= (-\lambda, \lambda, 3 - \lambda) \times (1, -1, 0) = (3 - \lambda, 3 - \lambda, 0) \\ |\overrightarrow{P_s P_r} \times \vec{d}_r| &= \sqrt{2}(3 - \lambda) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{dist}(P_s, r) = \frac{\sqrt{2}(3 - \lambda)}{\sqrt{2}} = (3 - \lambda) = 1$$

$$\text{dist}(P_s, r) = 1 \rightarrow 3 - \lambda = 1 \rightarrow \lambda = 2$$

$$P_s = (\lambda, -\lambda, \lambda) = (2, -2, 2)$$

17 Calcula las ecuaciones de la recta r' sabiendo que es la proyección ortogonal de la recta:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases} \text{ sobre } \pi: x - y + 2z + 4 = 0.$$

La recta r' es intersección de dos planos: el π y un plano α que contiene a r y es perpendicular a π .

Un vector normal a α es perpendicular al vector dirección de r y al vector normal a π .

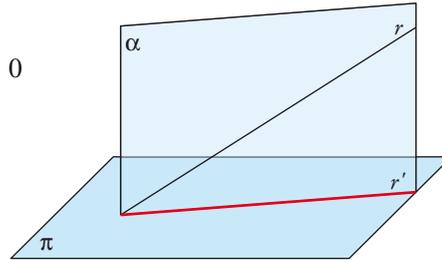
Por tanto:

$$(1, 3, 0) \times (1, -1, 2) = (6, -2, -4) // (3, -1, -2) = \vec{n}; \vec{n} \perp \alpha$$

$$(0, -2, 3) \in \alpha$$

$$\alpha: 3(x-0) - (y+2) - 2(z-3) = 0 \rightarrow 3x - y - 2z + 4 = 0$$

$$\text{La recta es } r' = \begin{cases} 3x - y - 2z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$



18 Dada la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 39 = 0$, halla:

a) Su centro y su radio.

b) La ecuación correspondiente al plano tangente en el punto $P(1, -3, 7)$.

a) Centro: $C(1, -3, 0)$

Radio: $r = 7$

b) $(1, -3, 7)$ ¿pertenece a la superficie esférica?

$$1 + 9 + 49 - 2 - 18 - 39 = 0. \text{ Sí pertenece, pues cumple la ecuación.}$$

(También podríamos haber comprobado que $\text{dist}(P, C) = 7$).

El vector \overrightarrow{CP} es perpendicular al plano tangente, π :

$$\overrightarrow{CP} (0, 0, 7) // (0, 0, 1), \text{ perpendicular a } \pi.$$

Ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P es:

$$\pi: 0(x-1) + 0(y+3) + 1(z-7) = 0 \rightarrow z = 7$$