Resuelve

Página 205

Piensa y encuentra límites

1. Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5} = -\infty$

2. Tanteando con la calculadora, da el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot ln\,(x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot ln\,(x - 3) = 0$

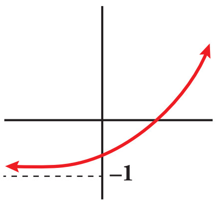
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \approx 403{,}43$

1 Idea gráfica de los límites de funciones

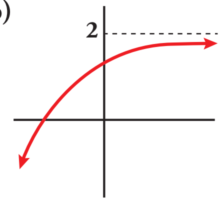
Página 206

1 Describe mediante un límite cada una de las siguientes ramas:

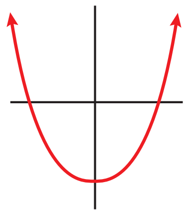
a)



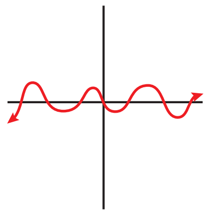
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

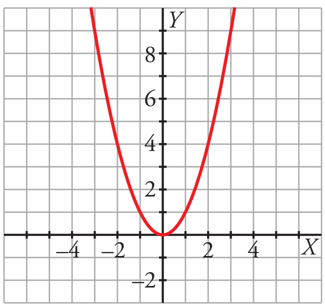
2 Asigna $\lim\limits_{x \to -\infty}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty}$ a cada una de las siguientes funciones conocidas (dibuja esquemáticamente su gráfica):

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = -x^2$ **c)** $f(x) = x^3$

d) $f(x) = -x^3$ **e)** $f(x) = sen\, x$ **f)** $f(x) = tg\, x$

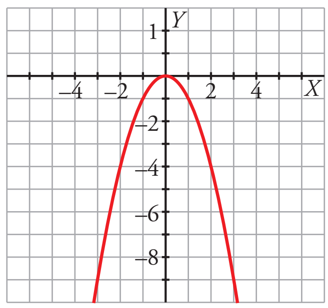
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



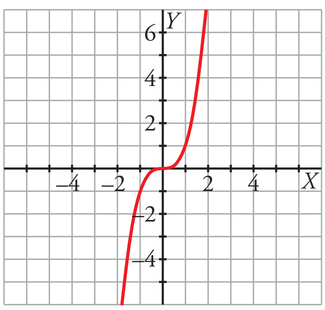
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



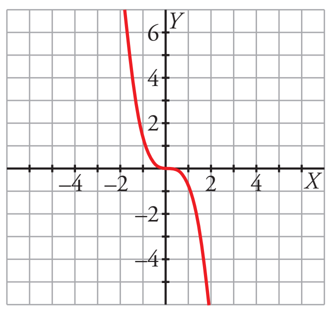
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



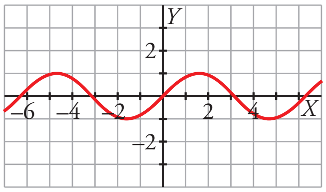
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



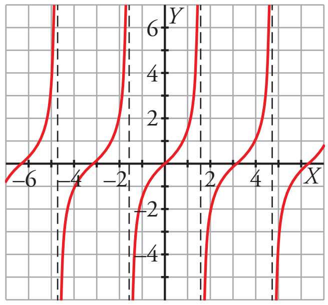
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = no existe



f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = no existe



3 **Dibuja, en cada caso, una función que cumpla:**

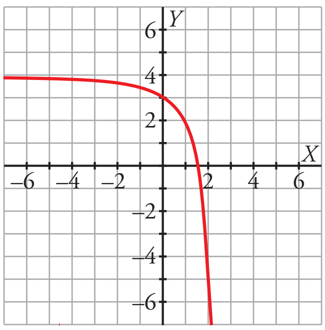
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

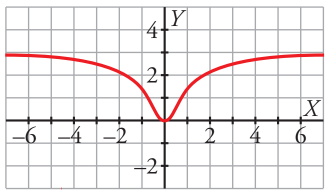
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

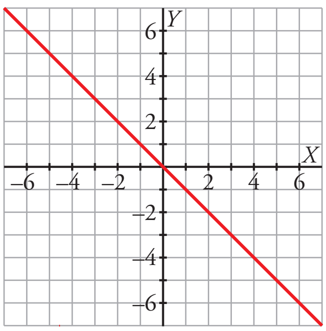
a)



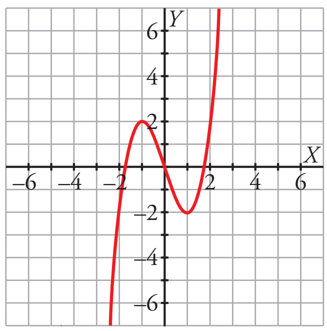
b)



c)



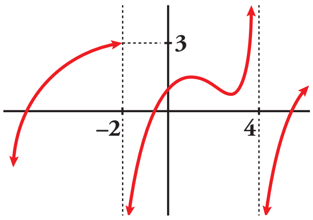
d)



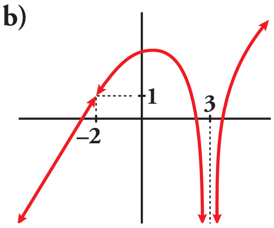
Página 207

4 Describe con límites las siguientes ramas:

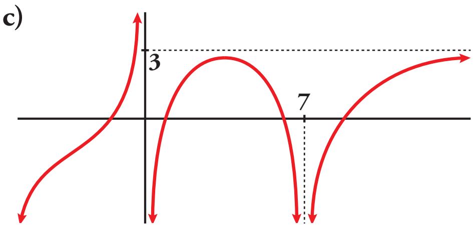
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

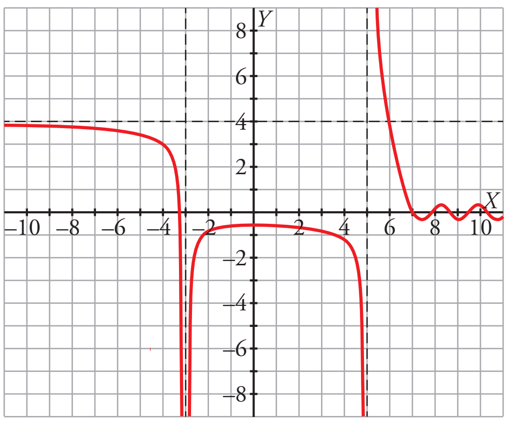
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

5 Representa una curva que cumpla las seis condiciones siguientes:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$ $\quad\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **no existe**



2 Un poco de teoría: aprendamos a definir los límites

Página 208

1 Sabiendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-20}{x-100} = 3$, aplica lo que acabamos de ver para calcular h en función de ε.

Averigua después para qué valor de h se verifica que "si $x > h$, entonces $|f(x) - 3| < 0{,}01$".

$$|f(x)-3| < 0{,}01 \to \left|\frac{3x-20}{x-100} - 3\right| < 0{,}01 \to \left|\frac{3x-20-3x+300}{x-100}\right| < 0{,}01 \to$$

$$\to \left|\frac{280}{x-100}\right| < 0{,}01 \overset{(*)}{\to} \frac{280}{x-100} < 0{,}01 \to \frac{280}{0{,}01} < x - 100 \to x > 28\,100$$

(*) Para valores grandes de x, la fracción es positiva y se puede quitar el valor absoluto.

El valor es h = 28 100.

Página 209

2 Define, acompañado de un dibujo, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

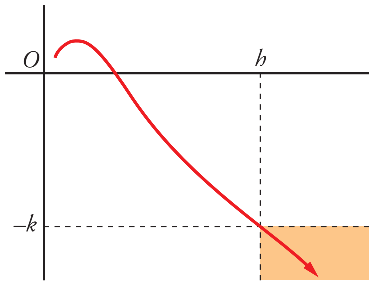
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

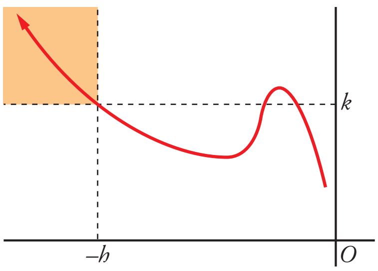
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.



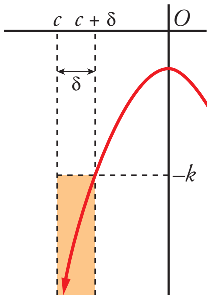
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que si $x < -h$, entonces $f(x) > k$.



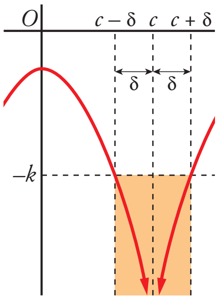
c) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$

Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $\delta < x < c + \delta$, entnces $f(x) < -k$.



d) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $c - \delta < x < c + d$, entonces $f(x) < -k$.



3 Sencillas operaciones con límites

Página 210

1 Todas estas propiedades que acabamos de presentar son muy sencillas y razonables. Y se pueden enunciar en los siguientes términos:

1. *El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.*

Haz otro tanto con las propiedades 2 a 7 y reflexiona sobre las restricciones que se imponen en algunas de ellas, de modo que las veas razonables (por ejemplo: ¿por qué $b \neq 0$ en la propiedad 4?, ¿por qué $f(x) > 0$ en la propiedad 5?, …).

2. El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.
3. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
4. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea 0 (para que no se produzca una división entre 0).
5. El límite de la potencia de dos funciones es igual a la potencia de sus límites, siempre que la base de la potencia sea positiva (para que tenga sentido la potencia de exponente real).
6. El límite de la raíz de una función es igual a la raíz de su límite. En el caso de que la potencia sea de índice par, además, la función debe ser no negativa (para que se pueda hallar dicha potencia).
7. El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo de su límite (para que tenga sentido el límite y el resultado, es necesario que tanto la función como su límite sean positivos).

Página 211

2 Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$	**d)** $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$
f) $u(x)^{u(x)}$	**g)** $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$	**j)** $u(x)/h(x)$
k) $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$	**m)** $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}	**r)** $f^2(x) + h^2(x)$	**s)** $f^2(x) - h^2(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - h(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminación.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot h(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \to$ Indeterminación.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminación.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \longrightarrow$ Indeterminación.

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \longrightarrow$ No existe.

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^{\infty}} = 0$

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) + h^2(x)) = (+\infty)^2 + (-\infty)^2 = +\infty$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) - h^2(x)) = (+\infty)^2 - (-\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty) \longrightarrow$ Indeterminación.

4 Indeterminaciones

Página 212

1 Para $x \to 4$ se dan los siguientes resultados:

$$f(x) \to +\infty,\ g(x) \to 4,\ h(x) \to -\infty,\ u(x) \to 0$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones cuando $x \to 4$? En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} [f(x) + h(x)] = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indetermninación.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \to$ Indeterminación.

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)} \to$ Indeterminación

f) $\lim\limits_{x \to 4} u(x)^{h(x)} = (0)^{(-\infty)} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)} \to$ Indeterminación

h) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)^{f(x)} = (4)^{(+\infty)} = +\infty$

5 Comparación de infinitos. Aplicación a los límites cuando $x \to \pm\infty$

Página 213

1 Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $log_2 x$ **e)** $\dfrac{1}{x^3+1}$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

Son infinitos cuando $x \to +\infty$ las expresiones a), c), d), f), g) e i).

No lo son las expresiones b), e) y h).

2 a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) 4^x; $1{,}5^x$; $3x^5$; x^2; $\sqrt{x}$; $log_2 x$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$$

6 Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

Página 215

1 Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right)$ **b)** $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ **d)** $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8-2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2 Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$ **d)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$ **f)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2-4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-2x^3-x}{4x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$$

Página 216

3 **Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}$ b) $\left(5+\frac{1}{5x}\right)^{5x}$ c) $\left(5+\frac{1}{5x}\right)^{-5x}$

d) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5}$ e) $\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$ f) $\left(1+\frac{5}{x}\right)^{-x}$

g) $\left(5+\frac{5}{x}\right)^{5x}$ h) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x}$ i) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5+\frac{1}{5x}\right)^{5x} = (5)^{(+\infty)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5+\frac{1}{5x}\right)^{-5x} = (5)^{(-\infty)} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5} = 1^5 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = e^5$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{-x} = e^{-5}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5+\frac{5}{x}\right)^{5x} = e^{(+\infty)} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x} = e^{-5}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-5x} = e^{5}$

4 **Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ b) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x}$ c) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5}$ e) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x}$ f) $\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-2z}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5} = 1^5 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^{2} = e^{2}$

Página 217

5 Resuelve estos límites aplicando la regla anterior. Después, resuelve también uno de ellos dando todos los pasos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-1}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{3x-1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x-3) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1\right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{3x-1}\right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-4) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+2} - 1\right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

Resolución de los límites dando todos los pasos:

$$\text{a) } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3} = (1)^{(+\infty)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{6}{3x-1}\right)^{5x-3} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{5x-3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{\frac{3x-1}{6} \cdot \frac{6}{3x-1} \cdot (5x-3)} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{6}}\right)^{\frac{3x-1}{6}}\right]^{\frac{6}{3x-1} \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

$$\text{b) } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-1} = (1)^{(+\infty)} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+x^2}{-x^2-3x+2}}\right)^{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+x^2}{-x^2-3x+2}}\right)^{\frac{x^3+x^2}{-x^2-3x+2} \cdot \frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2} \cdot (2x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+x^2}{-x^2-3x+2}}\right)^{\frac{x^3+x^2}{-x^2-3x+2}}\right]^{\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2} \cdot (2x-1)} = e^{-2}$$

7 Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Página 219

1 Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x+1}) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^5 - 1} - 5^x)$ no existe

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x+2} - x^2) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2 Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

d) $2x + \sqrt{x^2+x}$

e) $\sqrt{x^2+2x} + x$

f) $\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h) $\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3+5}{-x+2} - \dfrac{-4x^3-x}{-x-2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x^3}{2x^2+1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x-1}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + \sqrt{x^2+x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + \sqrt{x^2-x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(-2x + \sqrt{x^2-x})(-2x - \sqrt{x^2-x})}{-2x - \sqrt{x^2-x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+x}{-2x - \sqrt{x^2-x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-2x} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-2x} - x)(\sqrt{x^2-2x} + x)}{\sqrt{x^2-2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} + x} = \dfrac{-2}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{5x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-5x+3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-x-1}{x^2+2}\right)^{-3x-1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+2} - 1\right) \cdot (-3x-1)\right]} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x-3}{x^2+2} \cdot (-3x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+10x+3}{x^2+2}} = e^3$

9 Cálculo de límites cuando $x \to c$

Página 221

1 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - sen\ 2x)$

d) $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3} = -7$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - sen\ 2x) = 3$

d) $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4} = e$

2 Halla el límite cuando $x \to 5$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+1, & x \le 5 \\ x-4, & x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 5 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & x \ge 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (x^2-5x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} (x-4) = 1 \end{array}\right\} \to$ Los límites laterales coinciden y $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (2^x) = 32 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{(x-1)^2}{2} = 8 \end{array}\right\} \to$ Los límites laterales no coinciden y no existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Página 222

3 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x-7)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x+5}{x-7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

4 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3(x+3)^3}{x^4(x+3)^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3(x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2(x-1)}} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

Página 223

5 **Calcula:** $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x + 2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

6 **Calcula:** $\lim_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x + 1}{x - 7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x + 1}{x - 7}} = e^{\lim_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x + 1}{x - 7} \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x + 1}{x - 7} \right)} = e^{\lim_{x \to 7} \frac{(x - 7)(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)(x - 7)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 7} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 3)}} = e^{12}$$

10 Una potente herramienta para el cálculo de límites

Página 225

1 Hallar los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (cos\, x + sen\, x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

g) $\lim\limits_{x \to 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{6x + 4}{6x + 2} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{-x} + 1}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x(1 + cos\, x) + sen\, x(-sen\, x)}{cos\, x + x(-sen\, x)} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{cos\, x} = 2$

e) Para poner $\lim\limits_{x \to 0} (cos\, x + sen\, x)^{1/x}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (cos\, x + sen\, x)^{1/x}$.

$$\lim_{x \to 0} (ln[f(x)]) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\, ln\,(cos\, x + sen\, x)\right) = \lim_{x \to 0} \frac{ln\,(cos\, x + sen\, x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(-sen\, x + cos\, x)\,/\,(cos\, x + sen\, x)}{1} = 1 \;\to\; \lim_{x \to 0} f(x) = e^1 = e$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 21/x)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot ln\, 2}{(-1/x^2)} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2^{1/x}) \cdot ln\, 2) = -ln\, 2 = ln\, \frac{1}{2}$$

g) Para poner $\lim\limits_{x \to 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$.

$$\lim_{x \to 2} (ln\,[f(x)]) = \lim_{x \to 2} \frac{2\;\, ln\,(3 - x)}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{\dfrac{-2}{3 - x}}{2x} = \frac{-1}{2}$$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}}}{1} = \dfrac{10}{2\sqrt{25 - 9}} = \dfrac{5}{4}$

11 Continuidad en un intervalo

Página 227

1 Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:

$$\mathbf{2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0}$$

Busca los intervalos entre –4 y 3. Comprueba que $f(1{,}5) < 0$ y tenlo en cuenta.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que:

$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array}\right\}$ Hay una raíz en $(-4, -3)$.

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\}$ Hay una raíz en $(0, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1{,}5) = -1{,}375 < 0 \end{array}\right\}$ Hay una raíz en $(1;\ 1{,}5)$.

$\left.\begin{array}{l} f(1{,}5) = -1{,}375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\}$ Hay una raíz en $(1{,}5;\ 2)$.

2 Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0{,}26 < 0 \end{array}\right\} \textit{ signo de } F(0) \neq \textit{ signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3 Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ **en** $[-1, 1]$ **b)** x^2 **en** $[-3, 4]$ **c)** $\dfrac{1}{x-1}$ **en** $[2, 5]$

d) $\dfrac{1}{x-1}$ **en** $[0, 2]$ **e)** $\dfrac{1}{1+x^2}$ **en** $[-5, 10]$ **f)** e^{-x} **en** $[0, 1]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni míminimo absolutos puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

f) La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$, luego lo es en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto, por el teorema de Weierstrass, alcanza su máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 228

1. Operaciones con límites

Hazlo tú. **Siendo f, g, h, u y v las funciones anteriores, calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $v(x)^{u(x)}$ **b)** $u(x)^{g(x)}$ **c)** $g(x) \cdot u(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x)^{u(x)} = (0{,}4)^{(+\infty)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{g(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) \cdot u(x)] = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

3. Comparación de infinitos

Hazlo tú. **Comparando los órdenes de infinito, asigna límite a estas expresiones:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5} = +\infty$ porque cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5} = +\infty$ porque el numerador tiene mayor grado que el denominador.

Página 229

4. Cálculo de límites

Hazlo tú. **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x - 2}{3x}\right)^{2x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log x)^{1 - 3x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x - 3} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x + 2}{6}\right)^{\frac{1}{x - 4}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x - 2}{3x}\right)^{2x - 1} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{(+\infty)} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log x)^{1 - 3x} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\dfrac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x - 3} - 1} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + 2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x - 3}}} = \frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}} = (1)^{(\infty)}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+2}{6} - 1\right)\frac{1}{x-4} = \lim_{x \to 4} \left(\frac{x-4}{6}\,\frac{1}{x-4}\right) = \frac{1}{6}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}} = e^{1/6}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{-x+1} = +\infty \quad (\text{cuando } x \to -\infty,\ x-1<0).$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Página 230

5. Regla de L'Hôpital

Hazlo tú. Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)$

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \lim_{x \to 0} \frac{3\sin 3x}{2\sin 2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \lim_{x \to 0} \frac{9}{4}\frac{\cos 3x}{\cos 2x} = \frac{9}{4}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = (1)^{(\infty)}$

$$\lim_{x \to 0} \left[(\cos 2x - 1) \cdot \frac{3}{x^2}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{3(\cos 2x - 1)}{x^2} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3(-2\sin 2x)}{2x} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-12\ \cos 2x}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x} \cdot 2 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

c) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \to 1} \frac{ex - e^x}{(e^x - 3)(x-1)} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{e - e^x}{e^x(x-1) + e^x - e} = \lim_{x \to 1} \frac{e - e^x}{e^x\, x - e} = \frac{(0)}{(0)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-e^x}{e^x\, x + e^x} = -\frac{e}{2e} = -\frac{1}{2}$$

6. Continuidad en un punto

Hazlo tú. Estudia la continuidad de la función $f(x)$ y clasifica sus discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{-x} = x^2 - 1$ es una función continua.

Para $x > 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{x} = x^2 + 1$ es una función continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite porque los límites laterales son distintos.}$$

$f(0) = 1$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable de salto finito.

Página 231

7. Función continua

Hazlo tú. Determina los valores de a y de b para los que $f(x)$ es continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } -\infty < x \le 0 \\ sen\,(ax) & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \le x < +\infty \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ y $x \neq \pi$, la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

Comprobamos la continuidad en $x = 0$ y en $x = \pi$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} sen\,(ax) = 0 \end{array}\right\} \to \text{Para que sea continua en } x = 0 \text{ debe ser } b = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi) = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pi^-} sen\,(ax) = sen\,(a\pi) \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} [(x - \pi)^2 + 1] = 1 \end{array}\right\} \to \text{Para que sea continua en } x = \pi \text{ debe ser } sen\,(a\pi) = 1.$$

$$sen\,(a\pi) = 1 \to a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \to a = \frac{1}{2} + 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $a = \dfrac{1}{2} + 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $b = 0$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

8. Teorema de Bolzano

Hazlo tú. Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

Definimos la función $F(x) = f(x) - g(x) = sen\ x - \frac{1}{x}$ en $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

$F(x)$ es una función continua en el intervalo.

$F(2\pi) = sen\ 2\pi - \frac{1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} < 0$

$F\left(\frac{5\pi}{2}\right) = sen\ \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{5\pi} > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ tal que $F(c) = 0$, es decir:

$$f(c) - g(c) = 0 \ \to\ f(c) = g(c)$$

Las gráficas se cortan, al menos, en el punto de abscisa $x = c$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 232

1. Cálculo de límites

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\, x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right)^{25} = \left(\dfrac{(-\infty)}{(+\infty)}\right)^{25}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right)^{25} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{-8x^3}}{2x}\right)^{25} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x}{2x}\right)^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \to 0} (1+4x^3-1) \cdot \frac{2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{8x^3}{x^3} = 8$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1+4x^3)^{2/x^3} = e^8$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\, x} = (+\infty)^{(0)}$ Indeterminación.

Tomamos logaritmos:

$$ln \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\, x} = \lim_{x \to 0^+} tg\, x\, ln \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} [tg\, x[-ln\,(x^2)]] = \lim_{x \to 0^+} (-2tg\, x\, ln\, x) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\, ln\, x}{\dfrac{1}{tg\, x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{-2}{x}}{-\dfrac{1}{sen^2\, x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2sen^2\, x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{4sen\, x\, cos\, x}{1} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg\, x} = e^0 = 1$

2. Límite finito

Calcular el valor de a para que el siguiente límite sea finito y obtener ese límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{a}{2x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{a}{2x}\right) = (\infty) - (\infty)$ Indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{a}{2x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x-ae^x+a}{(e^x-1)\,2x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2-ae^x}{e^x\,2x+(e^x-1)\,2} = \lim_{x \to 0} \frac{2-ae^x}{e^x\,2x+2e^x-2}$$

Como el denominador tiende a 0, para poder seguir resolviendo el límite, el numerador también debe tender a 0 y, por tanto, $a = 2$.

Continuamos con $a = 2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2-2e^x}{e^x\,2x+2e^x-1} = \frac{(0)}{(0)} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2e^x}{e^x\,2x+e^x\,2+2e^x} = -\frac{1}{2}$$

3. Función continua

Estudiar la continuidad de esta función según los valores de a:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - ax + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \neq 1$ porque las funciones que intervienen son continuas al ser funciones polinómicas.

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} (-2x + a) = -2 + a$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 - ax + 5) = 6 - a$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$-2 + a = 6 - a \to a = 4$$

Para el valor obtenido de a la función es continua porque $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Si $a \neq 4$, entonces la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$ al existir los límites laterales en dicho punto y ser distintos.

4. Continuidad en un punto

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2 - 2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de k para el cual f (x) sea continua?

b) Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de la función.

a) Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x^2 - 2}{x}} = e^{(+\infty)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

No existe ningún valor de k ya que los límites laterales en el punto $x = 0$ no existen.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^2 - 2}{x}} = e^{(-\infty)} = 0$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 233

Para practicar

Límites cuando $x \to \pm\infty$

1 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7}) = +\infty$

2 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

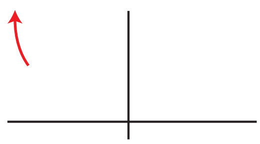
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

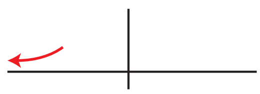
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$

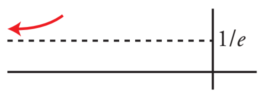


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

Sabemos que $2^{x+1} > 0$ para cualquier x.



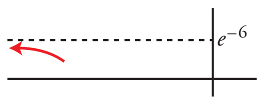
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



Comprobamos que $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x > \dfrac{1}{e}$ dando a x algún valor.

Por ejemplo, $x = -10$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$



$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1+3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Comprobamos que $\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$ dando a x algún valor negativo.

Por ejemplo, $x = -10$.

3 **Calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

f) $k(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

g) $l(x) = 2^x - 3^x$

h) $m(x) = \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2}} = 1$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x - 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} -3^x = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - x^3 - x^3 + 3x^2}{(x-3)(5-x)} = -\infty$

4 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1} = 0$ porque el numerador tiene menor grado que el denominador.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3) = +\infty$ porque el infinito de una exponencial con base mayor que 1 es de orden superior que el de una potencia.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x-3} = -3$ porque el numerador tiene el mismo grado que el denominador.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{-2x} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x+2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - \sqrt{x^4+2x})(x^2 + \sqrt{x^4+2x})}{x^2 + \sqrt{x^4+2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4+2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4+2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4+2x}} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1,2^x - \dfrac{3x^2}{x+1} \right) = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1} = \left(\dfrac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2} \right)^{3x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2} \right)^{x^2-5}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 \right) \cdot x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1 \right) \cdot (2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6$$

c) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+3} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} - 1 \right) \cdot (x+2)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

d) Sea $l = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-4}{3x-2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{3} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{3x-2} \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x-2}{9x-6}} = e^{-2/9}$$

e) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-2) = -\infty$, se trata de un límite del tipo $\frac{1}{(1)^{(+\infty)}}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{x^2} \cdot (3x-2)\right)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-5) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

6 Halla estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4})$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4}) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4})$:

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-4})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x^2+2x) - (x^2-4)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2-4}} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $(\sqrt{x^2+1} + x)$:

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

7 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2-1}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2+2x}{\log x^2}$ **c)** $h(x) = \sqrt{3x^2+2} - 5x$

d) $i(x) = x^2 - \sqrt{x^4-1}$ **e)** $j(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-1}}$ **f)** $k(x) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^3}{x^2+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2-1} = +\infty$

(El infinito de una función exponencial es de mayor orden que el de una función potencial).

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2-1} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{\log x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{\log x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{\log x^2} = +\infty$

(El infinito de una función potencial es de mayor orden que el de un logaritmo).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = (+\infty) - (+\infty)$ (Indeterminación).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{3x^2 + 2} - 5x)(\sqrt{3x^2 + 2} + 5x)}{\sqrt{3x^2 + 2} + 5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-22x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 + 2} + 5x} = -\infty$ ya que el numerador tiene mayor grado que el denominador.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} + 5x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = (+\infty) - (+\infty)$ (Indeterminación).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - \sqrt{x^4 - 1})(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{3}\,x} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = (+\infty) - (+\infty)$ (Indeterminación).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x - 1} + \dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 + x + 1} = 1$

8 Calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{x + 2} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \le 0 \\ e^x - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x}{x + 2} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -2$

Límites en un punto

9 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$

b) $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)|$

d) $\lim_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)|$

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)| = (0) \cdot (-\infty) \ \to$ Indeterminado.

d) $\lim_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)| = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

10 **Calcula estos límites. Si alguno es infinito, calcula los límites laterales:**

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)}$

c) $\lim_{x \to -2/3} \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-6)}{1-x} = \lim_{x \to 1} [-(x-6)] = 5$

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2 - 3x + 2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x - 2)} = 0$

c) $\lim_{x \to -2/3} \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -2/3} \dfrac{(x+1)(3x+2)}{(3x+2)(3x-2)} = \lim_{x \to -2/3} \dfrac{x+1}{3x-2} = -\dfrac{1}{12}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x^2 + x - 6)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{x+5}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(7)}{(0)}$

$\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x+5}{x^2 + x - 6} = -\infty$

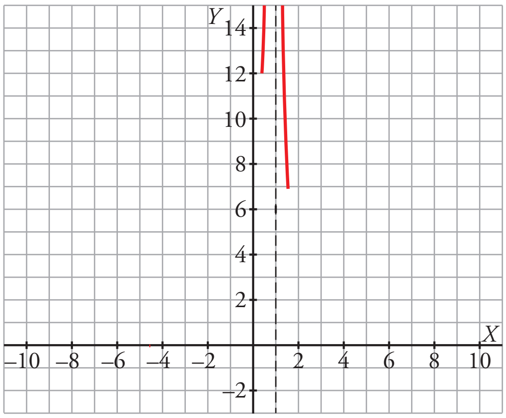
$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x+5}{x^2 + x - 6} = +\infty$

11 **Calcula y representa los resultados obtenidos.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2-5x+6} - \dfrac{4}{x-2} \right]$

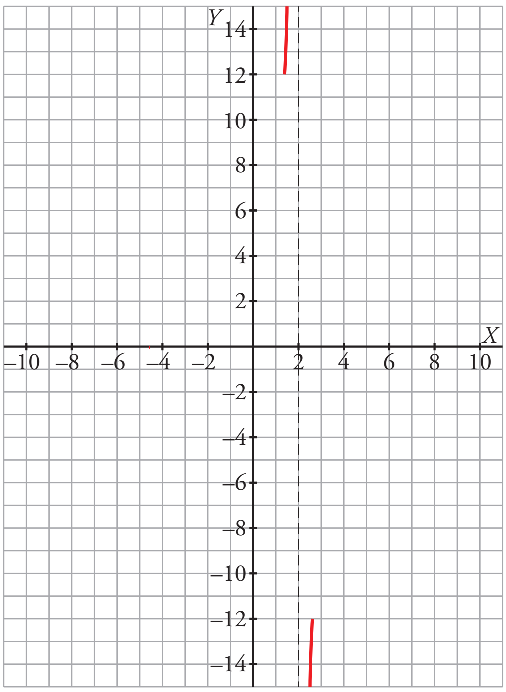
a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2-5x+6} - \dfrac{4}{x-2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = \dfrac{(7)}{(0)}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = -\infty$



12 **Calcula y estudia los límites laterales cuando sea necesario.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-(3-x)}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-3+x}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)-(1-x)}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+x-1+x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{3}$

Página 234

13 **Calcula.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{2x+1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$l = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{1/2}$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

Como $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-x-1}{7-x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$l = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2x^2-x-1}{7-x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5}$

14 **Aplica la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-3x-4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x+x^3)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\ x - x}{x - sen\ x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-e^{sen\ x}}{1-\cos x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - sen\ x}{x\ sen\ x}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$

l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{tg\ x - 8}{\sec x + 10}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2}{2x-3} = \dfrac{3}{-5} = -\dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x+x^3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{sen\ x}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos x}{sen\ x} = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{sen\ x} = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\ x - x}{x - sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}}{sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-e^{sen\ x}}{1-\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-e^{sen\ x}\cdot \cos x}{sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-e^{sen\ x}\cos^2 x + e^{sen\ x}\ sen\ x}{\cos x} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-3sen\ 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3tg\ 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-9(1+tg^2\ 3x)}{2} = -\dfrac{9}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sqrt[4]{x}}{3(1+x)} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^2(2x)}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\ \cos(2x)\ sen(2x)\cdot 2}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2sen\ 4x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ 4x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\ \cos 4x}{3} = \dfrac{4}{3}$

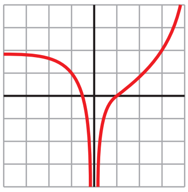
j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - sen\ x}{x\ sen\ x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{sen\ x + x\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{\cos x + \cos x - x\ sen\ x} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{e^x-1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{e^x} = 0$

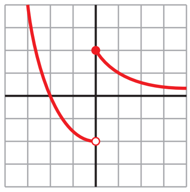
l) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{tg\ x - 8}{\sec x + 10} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{sen\ x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1}{sen\ x} = 1$

15 **Observa las gráficas y di, en cada caso, cuál es el límite cuando $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.**

a)



b)



a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Continuidad

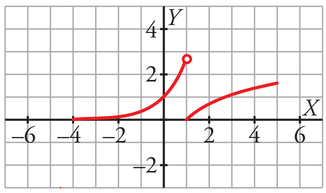
16 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y dibuja su gráfica:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La función es continua cuando $x \neq 1$ ya que está formada por funciones continuas.

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$

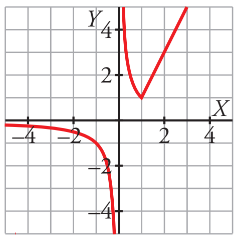


Como los límites laterales existen y son distintos, en $x = 1$ presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) Cuando $x \neq 0$ y $x \neq 1$ es continua porque las funciones que la forman lo son. La función es discontinua en $x = 0$ y presenta en este valor una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \end{array}\right\} \to \text{Existe } \lim\limits_{x \to 1} f(x).$$



En $x = 1$ es continua ya que $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

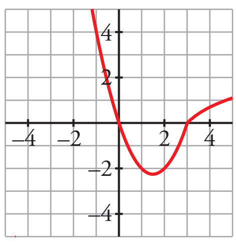
17 **Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio. Represéntalas para el valor de k obtenido:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x - 2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) La función es continua cuando $x \neq 3$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + kx) = 9 + 3k \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x - 2) = 0 \end{array}\right\} \to 9 + 3k = 0 \to k = -3$$



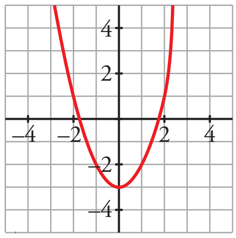
Cuando $k = -3$ la función también es continua en $x = 3$.

b) La función es continua cuando $x \neq 2$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (kx^2 - 3) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} e^{x^2 - 4} = 1 \end{array}\right\} \to 4k - 3 = 1 \to k = 1$$

Cuando $k = 1$ la función también es continua en $x = 2$.



18 **Calcula el valor de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq 1$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \to b = -1$$

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (ax - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \to a - 1 = 2 \to a = 3$$

Cuando $a = 2$ y $b = -1$ la función es continua en todo su dominio.

19 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \text{si } \pi \le x \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^{1 - x^2} & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = -2 \end{cases}$

a) La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq 1$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (3x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0) \to \text{Es continua en } x = 0.$$

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4 + \ln x) = 4 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1) \to \text{Es continua en } x = 1.$$

b) La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq \pi$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} sen\ x = 0 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0) \to \text{Es continua en } x = 0.$$

Veamos la continuidad en $x = \pi$:

$$\left.\begin{array}{l} g(\pi) = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pi^-} sen\ x = 0 \\ \lim\limits_{x \to \pi^+} [(x - \pi)^2 + 1] = 1 \end{array}\right\} \to \text{Los límites laterales existen y son distintos.}$$

El límite existe y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = \pi$.

c) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que no está definida cuando $x = 0$.

Cuando $x \neq 0$ y $x \neq -1$ la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En $x = 0$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} e^{1 - x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-1}{x} = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to -1} h(x) = 1 = h(-1) \to \text{Es continua en } x = -1.$$

d) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{2\}$ ya que no está definida cuando $x = 2$.

Cuando $x \neq -2$ y $x \neq 2$ la función es continua porque la función que interviene lo es.

En $x = 2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en $x = -2$:

$$f(-2) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{4}$$

Como existe el límite pero no coincide con el valor de la función, tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.

20 **Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

a) $x^2 - x - 2 = 0 \to x = -1,\ x = 2 \to$ El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

La función es continua cuando $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

En $x = -1$ y $x = 2$ no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor:

En $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(-6)}{(0)}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = +\infty$$

En este caso es inevitable de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

b) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 3 \rightarrow$ El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

La función es continua cuando $x \neq -2$ y $x \neq 3$.

En $x = -2$ y $x = 3$ no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor.

En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{(-10)}{(0)}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = +\infty$$

Se trata de una discontinuidad inevitable de salto infinito.

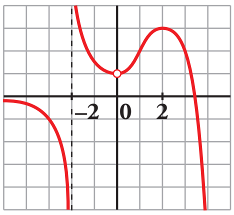
En $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+x)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{12}{5}$$

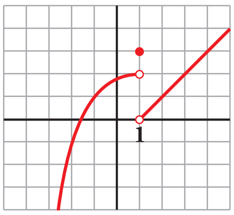
En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

21 **a) ¿En qué puntos son discontinuas las siguientes funciones?:**

I)



II)



b) Di cuál es el límite por la derecha y por la izquierda en los puntos de discontinuidad.

a) I) En $x = -2$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

II) Presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

b) I) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

II) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

Para resolver

22 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2}\right)^{1-x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$

f) $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x}$

g) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2}\right)^{1-x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-\infty)} = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{2}} = (1)^{(+\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3} - 1\right) \cdot \frac{x+1}{2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-8}{2x+3} \cdot \frac{x+1}{2}\right) = -2$$

Por tanto, $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-2}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 2} \frac{13 - x^2 - 9}{(x-2)(\sqrt{13 - x^2} + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{(x-2)(\sqrt{13 - x^2} + 3)} =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(2+x)(2-x)}{(x-2)(\sqrt{13 - x^2} + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(2+x)}{\sqrt{13 - x^2} + 3} = -\frac{2}{3}$$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2x(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2x(x-1)} = +\infty \end{cases}$

f) $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 e^x) = +\infty$

g) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - x + 1 - \cos x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2\operatorname{sen} x + x \cos x}{-\operatorname{sen} x + \cos x} = 1$

Página 235

23 Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(tg(x))$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x)^{1/x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\text{sen}\, x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \text{sen}\, 2x)^{\cot g\, 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(tg(x)) = (0) \cdot (+\infty) = \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\ln(tg\, x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \dfrac{(+\infty)}{(+\infty)} \overset{H}{=}$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x\; tg\, x}}{\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1}{\text{sen}\, x\; tg\, x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\cos x}{\text{sen}^2\, x} = 0$$

b) Al no estar definida la función a la izquierda de 0, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x} = 1 = (+\infty)^{(0)}$$

Tomamos logaritmos:

$$\ln \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x} = \lim_{x \to 0^+} \left[tg\, x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to 0^+} (-tg\, x \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln x}{\dfrac{1}{tg\, x}} = \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\text{sen}^2\, x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}^2\, x}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2\text{sen}\, x \cos x}{1} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\, x} = e^0 = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x)^{1/x} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \text{sen}\, x - 1}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}\, x + \cos x}{1} = 1$$

Por tanto $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \text{sen}\, x)^{1/x} = e$

d) Al no estar definida la función a la izquierda de 0, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\text{sen}\, x}\right)^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = \ln \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = \ln \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \text{sen}\, 2x)^{\cot g\, 3x} = (1)^{(\infty)}$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \text{sen}\, 2x - 1)\cot 3x = \lim_{x \to 0} (-\text{sen}\, 2x \cot 3x) = \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}\, x}{tg\, 3x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos 2x}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = -\frac{2}{3}$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \text{sen}\, 2x)^{\cot g\, 3x} = e^{-2/3}$

24 **Sabiendo que la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **es continua en** $(-1, +\infty)$, **halla el valor de** a.

La función es continua cuando $x \neq 0$ ya que está definida mediante funciones continuas en su dominio.

Comprobamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 4x + 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2 + a}{x + 1}\right) = a \end{array}\right\} \to a = 3$$

Cuando $a = 3$, la función es continua también en $x = 0$ ya que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y, por tanto, lo es en el intervalo $(-1, +\infty)$.

25 **El rendimiento físico de un deportista, durante 60 minutos, varía con el tiempo según esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -t(t - a) & \text{si } 0 \le t < 15 \\ 3,5a + 5 & \text{si } 15 \le t < 30 \\ 100 - bt & \text{si } 30 \le t \le 60 \end{cases}$$

Calcula a **y** b **para que la función rendimiento sea continua.**

La función es continua cuando $x \neq 15$ y $x \neq 30$ ya que está definida mediante funciones continuas.

Comprobamos la continuidad en $x = 15$:

$$\left.\begin{array}{l} f(15) = 3,5a + 5 \\ \lim\limits_{t \to 15^-} [-t(t - a)] = -225 + 15a \\ \lim\limits_{t \to 15^+} (3,5a + 5) = 3,5a + 5 \end{array}\right\} \to -225 + 15a = 3,5a + 5 \to a = 20$$

Cuando $a = 20$, la función es continua en $x = 15$, ya que $f(15) = \lim\limits_{x \to 15} f(x)$.

Comprobamos la continuidad en $x = 30$:

$$\left.\begin{array}{l} f(30) = 100 - 30b \\ \lim\limits_{t \to 30^-} 75 = 75 \\ \lim\limits_{t \to 30^+} (100 - bt) = 100 - 30b \end{array}\right\} \to 75 = 100 - 30b \to b = \frac{5}{6}$$

Cuando $b = \dfrac{5}{6}$ la función es continua en $x = 30$, ya que $f(30) = \lim\limits_{x \to 30} f(x)$.

26 **Sabemos que la función** $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^3 + bx^2 + 8x - 4}$ **es discontinua en** $x = 2$. **Calcula** b **y estudia el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de discontinuidad.**

Para que la función sea discontinua en $x = 2$, este valor debe ser una raíz del denominador. Por tanto,

$$2^3 + b \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 0 \to b = -5$$

De donde $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$.

Hallamos todas las raíces del denominador:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2$$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

La función no es continua en $x = 1$ y en $x = 2$. Veamos ahora el comportamiento de la función en las proximidades de estos puntos:

En $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(-1)}{(0)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = -\infty$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(2)}{(0)} = +\infty$$ ya que la fracción es un cociente de números positivos en las proximidades de $x = 2$.

27 **Dada la función** $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{a-x}$ **con** $a \neq 0$, **calcula los valores de** a **y** b **para que la función pase por el punto (2, 3) y el** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -4$.

f pasa por $(2, 3) \to f(2) = 3 \to \dfrac{4a+b}{a-2} = 3$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2+b}{ax-x^2} = -a$$

$-a = -4 \to a = 4 \to \dfrac{16+b}{2} = 3 \to b = -10$

28 **Calcula el valor de** k **para que cada una de las siguientes funciones sea continua. ¿Alguna es continua en todo** $\mathbb{R}$**?:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \ln k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+x^2+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+x^2+1) = 3$$

$f(1) = \ln k$

Para que sea continua $\ln k = 3 \to k = e^3$.

Además, es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que el cociente de polinomios solo se anula cuando $x = 1$.

b) Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$g(1) = 2^k$

Para que sea continua $2^k = \dfrac{1}{2} \to k = -1$.

Esta función también es continua en todo $\mathbb{R}$ porque el cociente solo se anula cuando $x = 1$.

29 **Halla el valor de b para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \neq 0$ porque está definida por intervalos mediante funciones continuas en los mismos.

Comprobamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} = \dfrac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Cuando $b = \dfrac{1}{2}$ la función es continua en $\mathbb{R}$.

30 **Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 0$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^x - 1} - \dfrac{k}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Supongamos que $k \neq 0$ ya que, en otro caso, el problema no tendría sentido.

$$f(0) = -1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{e^x - 1} - \frac{k}{x} \right) = (\infty) - (\infty) = \lim_{x \to 0} \frac{2x - ke^x + k}{(e^x - 1)x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 - ke^x}{e^x x + e^x - 1}$$

Como el denominador tiende a 0, para poder seguir calculando el límite, el numerador también debe tender a 0, luego $2 - k = 0 \to k = 2$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2e^x}{e^x x + e^x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2e^x}{e^x x + 2e^x} = -1$$

Por tanto, para $k = 2$ la función es continua en $x = 0$ ya que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

31 **¿Existe algún valor de k para el que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$?**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = k$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1$$

No puede existir ningún valor ya que el límite no existe porque los límites laterales son distintos.

32 Determina dónde son continuas las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x-2)}$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x - 6}}$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{1}{1-\cos^2 x}$

a) El dominio de definición es $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ y en él la función es continua.

Para $x = 3$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que $f(3) = \dfrac{3}{\ln 1} = \dfrac{3}{0}$.

b) Calculamos el dominio de definición:

$x^3 - x - 6 > 0 \rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) > 0 \rightarrow x > 2$ ya que el factor cuadrático es siempre positivo.

La función es continua en el intervalo $(2, +\infty)$.

c) Calculamos el dominio de definición:

$\dfrac{x-1}{x+2} \ge 0$

x		–2		1	
$\dfrac{x-1}{x+2}$	+	No existe	–	0	+

La función es continua en su dominio, $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$.

d) Calculamos el dominio de definición:

$$1 - \cos^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0 + 2k\pi \\ \cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

La función es continua en su dominio, $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

33 Estudia la continuidad de $f(x)$ según los distintos valores de m.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \ne 1$ al estar definida mediante funciones continuas.

Comprobamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 - m \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - mx^2) = 3 - m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{mx} = \dfrac{2}{m} \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$ debe ser $3 - m = \dfrac{2}{m} \rightarrow m = 1, 2$.

Cuando $m = 1$ o $m = 2$ la función es continua en $x = 1$.

Si $m \ne 1$ y $m \ne 2$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

34 a) Calcula el valor de a para que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - a \operatorname{sen} x}{x^2}$ sea finito.

b) Halla el límite para ese valor de a.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - a \operatorname{sen} x}{x^2} = \dfrac{(0)}{(0)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - a\cos x}{2x}$

Para poder continuar el límite, el numerador debe tender a 0 porque el denominador tiende a 0.

$1 - a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2x} = \dfrac{(0)}{(0)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$

35 Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{2-|x|}$ y clasifica sus discontinuidades.

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La función es continua en él.

En $x = -2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2+x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2+x} = +\infty \end{cases}$$

Presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty \end{cases}$$

Tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

NOTA: Podríamos haber usado la simetría de la función respecto del eje Y (es una función par) para haber deducido el comportamiento en $x = 2$ a partir del estudio en $x = -2$.

36 Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1 \to$ la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \to$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.

  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

37 Halla el valor de t para que la siguiente función sea continua en $x = 2$. Represéntala en el caso $t = 2$ y di qué tipo de discontinuidad tiene:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - t & \text{si } x \le 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

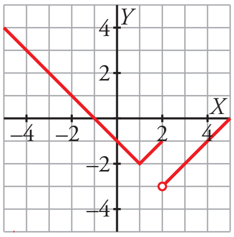
Estudiamos la continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (|x-1| - t) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-5) = -3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 2$ debe ser $1 - t = -3 \to t = 4$.

Supongamos ahora que $t = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1) - 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 - 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



38 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ **b)** $g(x) = |x-3| - |x|$ **c)** $h(x) = |2x-1| + x$ **d)** $i(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

b) $|x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$g(x) = |x-3| - |x| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x + 3) = +\infty$$

c) $|2x-1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$h(x) = |2x-1| + x = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x + 1) = +\infty$$

d) $i(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1$$

39 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de esta función:**

$$f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

Página 236

40 **Se define la función f del modo siguiente:** $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$.
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array}\right\} \text{Han de ser iguales, es decir: } 2 + a = -1 \to a = -3$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

41 **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln (x + 1) - \ln (x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x [\ln (x + 1) - \ln (x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\ln (x + 1) - \ln (x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = \ln 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x [\ln (x + 1) - \ln (x)] = (+\infty) \cdot (0) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left[\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$$= \ln \lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$$

42 **Al estudiar el tamaño de una bacteria, los investigadores han comprobado que su diámetro (en micras) varía con el tiempo según esta función:**

$$D(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

a) Analiza si es posible encontrar un valor de a para el cual el crecimiento se mantenga continuo.

b) Estudia cuál será el diámetro de una bacteria si la observamos al cabo de varias semanas.

a) Para que la función sea continua en $t = 8$, debe cumplirse que $\lim\limits_{t \to 8} T(t) = T(8)$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{t \to 8^-} T(t) = \lim_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{(\sqrt{3t - 15} - 3)(\sqrt{3t - 15} + 3)}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)(\sqrt{3t - 15} + 3)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15 + 3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \to 8 + a = \frac{1}{4} \to a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \frac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t + \frac{-31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \le \frac{31}{4} = 7{,}75$ horas.

Por tanto, no hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim_{t \to \infty} T(t) = 0$ porque el grado del denominador es mayor.

43 **El precio de compra de un producto varía según el número de unidades encargadas y esto queda reflejado en la siguiente función:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compra un número muy grande de unidades?

a) $\lim_{x \to 10^-} C(x) = \lim_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim_{x \to 10^+} C(x) = \lim_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \to 100a + 500 = 2\,500 \to 100a = 2\,000 \to a = 20$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

Cuestiones teóricas

44 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Según el teorema de Bolzano, si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y *signo de* $f(a) \neq$ *signo de* $f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Veamos si se cumplen las hipótesis. Estudiamos la continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/2)^-} \frac{x-4}{4} = \frac{-7}{8} \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array}\right\} \text{Como } \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x), \text{ no existe } \lim\limits_{x \to (1/2)} f(x).$$

$f(x)$ no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

45 **Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.**

Interpretación geométrica:

Si una función continua toma valores con distinto signo en los extremos del intervalo $[a, b]$, su gráfica "atravesará" el eje X cortándolo por lo menos en un punto.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$.

$h(x)$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ y lo será en particular en cualquier intervalo real.

En el intervalo [1, 2] se cumple:

$$h(1) = -1 - \cos 1 < 0$$

$$h(2) = 9 - \cos 2 > 0$$

Por el teorema de Bolzano existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ tal que:

$$h(c) = 0 \to f(c) - g(c) = 0 \to f(c) = g(c)$$

Es decir, existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ en el que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan (ya que las dos funciones toman el mismo valor).

46 **Sea la función $f(x) = x^2 + 1$. ¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.**

Consideremos la función $f(x)$ definida en el intervalo [0, 2]. La función es continua en todo $\mathbb{R}$, (y, en particular, en el intervalo estudiado).

$$f(0) = 1$$

$$f(2) = 5$$

Por el teorema de los valores intermedios o teorema de Darboux, la función toma todos los valores comprendidos entre 1 y 5, es decir, toma todos los valores del intervalo [1, 5].

47 **Si $f(x)$ es continua en [1, 9], $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9]?**

- Si $f(x)$ es continua en [1, 9], entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en [1, 9] (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, *signo de* $g(1) \neq$ *signo de* $g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9].

48 **De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

Como la función es continua en $x = 0$ se cumple que $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x)$.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

Luego $g(0) = 1$.

49 **¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.**

a) Si una función no está definida en $x = 3$, puede ocurrir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

b) Si $f(x)$ es una función continua tal que $f(x) < 0$ si $x < 3$ y $f(x) > 0$ si $x > 3$, no es posible que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

c) La ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real.

d) Si sabemos que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$, podemos asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ se cumple que $f(c) = 7$.

e) La ecuación $sen\, x + 2x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz real.

f) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$, $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un punto c de dicho intervalo en el que se cortan las gráficas de f y g.

g) Si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas en un punto x_0 de su dominio, la función $f(x) + g(x)$ puede ser continua en ese punto.

h) La función $y = tg\, x$ no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

a) Verdadero. La función puede tener en $x = 3$ una discontinuidad evitable y comportarse de esa forma.

b) Verdadero.

$$x < 3,\ f(x) < 0 \ \to\ \lim_{x \to 3^-} f(x) \le 0$$

$$x > 3,\ f(x) > 0 \ \to\ \lim_{x \to 3^+} f(x) \ge 0$$

Como la función es continua, el límite cuando $x \to 3$ existe y, por tanto, los límites laterales deben ser iguales. En consecuencia, $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$.

c) Falso. En los extremos del intervalo [–1, 0] la función $f(x) = x^5 + x + 1$ toma valores con distinto signo. Al ser continua podemos aplicar el teorema de Bolzano y existe al menos un punto $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

El valor c es una raíz real de la ecuación dada.

d) Falso. No podemos asegurarlo porque $7 \notin [3, 5]$.

e) Verdadero. Consideremos la función $f(x) = sen\, x + 2x - 1$ en el intervalo [0, 1].

La función es continua. Además:

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = sen\ 1 + 1 > 0$$

Como toma valores con distinto signo, podemos aplicar el teorema de Bolzano y existe al menos un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

El valor c es una raíz real de la ecuación dada.

f) Verdadero. El resultado se obtiene aplicando el teorema de Bolzano a la función $h(x) = f(x) - g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

$h(x)$ es una función continua en $[a, b]$ por ser una diferencia de funciones continuas.

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Por tanto, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que:

$$h(c) = 0 \to f(c) - g(c) = 0 \to f(c) = g(c)$$

Las funciones se cortan al menos en el punto de abscisa $x = c$.

g) Verdadero. Las siguientes funciones no son continuas en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Sin embargo, la suma $f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ sí es continua en $x = 0$.

h) Verdadero. La función $y = tg\, x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

50 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -$h, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

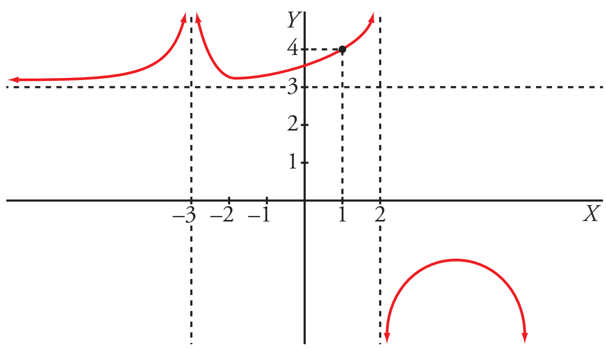
b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x >$ h, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.

e) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $f(x) > k$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1 + \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



51 **Estudia los valores que pueden tomar a y b para que la función $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 - 2x}$ tenga una discontinuidad evitable.**

Primero calculamos su dominio:

$$x^2 - 2x = 0 \to x = 0,\ x = 2$$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

La función puede tener discontinuidades evitables en $x = 0$ o $x = 2$.

Si $b = 0$ y $a \neq 0$ la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$, ya que existe el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{x-2} = -\frac{a}{2}$$

Si $b \neq 0$, solo puede tener una discontinuidad evitable en $x = 2$. Para ello, $x = 2$ debe ser una raíz del numerador de la fracción, es decir:

$$2a + b = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

En tal caso,

$$\lim_{x \to 2} \frac{-\frac{b}{2}x + b}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-bx + 2b}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{b(-x+2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-b}{2x} = -\frac{b}{4}$$

La discontinuidad es evitable ya que existe el límite.

En conclusión:

- Si $b = 0$ y $a \neq 0$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.
- Si $b \neq 0$ y $a = -\frac{b}{2}$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Página 237

Para profundizar

52 Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando $x \to +\infty$:

a) $f(x) = x^3 - \text{sen } x$

b) $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{Ent(x)}{x}$

d) $i(x) = \dfrac{3x + \text{sen } x}{x}$

** Ent (x) es la función parte entera de x.*

a) Como $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - \text{sen } x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

b) Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$$

c) Como $x - 1 < E[x] < x$,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E[x]}{x} < \frac{x}{x} \rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1 < \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} < \lim_{x \to +\infty} 1 \rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} = 1$$

d) Como $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \text{sen } x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\text{sen } x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\pm 1}{x}\right) = 3 + 0 = 3$$

53 **Calcula, si es posible, el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua en $x = 0$:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $f(0) = k$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2e^x(e^x-1)} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2e^x(e^x-1)+2e^{2x}} = \frac{1}{2}$$

Si $k = \dfrac{1}{2}$, entonces la función es continua en $x = 0$.

b) $g(0) = k$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{-x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{-x} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la función es discontinua en $x = 0$ para cualquier valor de k ya que no existe el límite en $x = 0$.

c) $h(0) = k$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x^2} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x^2 (\operatorname{sen} x + x \cos x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\cos^2 x^2 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2x} + \frac{\cos x}{2}\right)\right] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$$

Si $k = 1$, entonces la función es continua en $x = 0$.

54 **Halla el valor de a y de b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$ y pase por el punto $(1, -2)$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| \le 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

La función es par, ya que está definida mediante dos funciones pares en intervalos de definición simétricos respecto del origen. Por tanto, la continuidad en $x = 2$ garantiza la continuidad en $x = -2$.

Como pasa por el punto $(1, -2)$, se cumple que $f(1) = -2 \to a + b = -2$.

Comprobamos la continuidad en $x = 2$:

$f(2) = 4a + b$

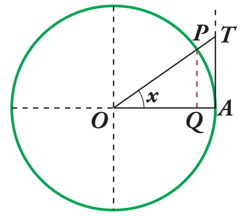
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea continua en $x = 2$, deben coincidir $4a + b = \dfrac{1}{4}$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 4a + b = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \to a = \frac{3}{4},\ b = -\frac{11}{4}$$

55 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo $\widehat{AOP}$ de x radianes. Observa que: $\overline{PQ} = sen\ x$, $\overline{TA} = tg\ x$ y arco $\widehat{PA} = x$.**



Como $\overline{PQ} < \widehat{PA} < \overline{TA} \rightarrow sen\ x < x < tg\ x$

A partir de esa desigualdad, prueba que $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.

Tenemos que $sen\ x < x < tg\ x$. Dividiendo entre $sen\ x$, queda: $1 < \frac{x}{sen\ x} < \frac{1}{cos\ x} \rightarrow 1 > \frac{sen\ x}{x} > cos\ x$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda: $1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} \ge 1$; es decir: $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$.

56 **Aplica el resultado anterior para calcular los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital:**

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{2x}$ **b)** $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x}$ **c)** $\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x}$ **d)** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{x^2}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\ x}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{sen\ x}{x}\right) = 1 - \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1 - 1 = 0$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\ x}{cos\ x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x} \cdot \frac{1}{cos\ x}\right) = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos\ x} = 1 \cdot 1 = 1$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\ x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - cos\ x)(1 + cos\ x)}{x^2 (1 + cos\ x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos^2\ x}{x^2 (1 + cos\ x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{sen^2\ x}{x^2 (1 + cos\ x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + cos\ x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

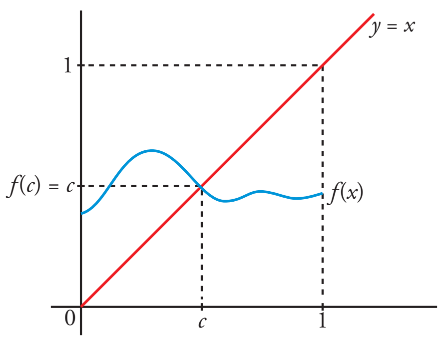
57 **Supongamos que f es continua en [0, 1] y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de [0, 1]. Prueba que existe un número c de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en [0, 1], pues es la diferencia de dos funciones continuas en [0, 1].
- $g(0) = f(0) > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de [0, 1].
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de [0, 1].

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



Autoevaluación

Página 237

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2+1)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{\frac{1}{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1-\sqrt{4x^2+1})$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4-(1/3)x^3}{x - tg\, x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\log(x^2+1)} = \dfrac{(0)}{(+\infty)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} \to$ Como es del tipo $(1)^{(+\infty)}$, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left((x-1)\cdot\frac{1}{1-x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1-\sqrt{4x^2+1}) = (\infty)-(\infty)$

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por $2x+1+\sqrt{4x^2+1}$:

$$\frac{(2x+1-\sqrt{4x^2+1})(2x+1+\sqrt{4x^2+1})}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{(2x+1)^2-(4x^2+1)}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{4x}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2}{2+\sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^4-(1/3)x^3}{x-tg\, x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{4x^3-x^2}{1-(1+tg^2\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3-x^2}{-tg^2\, x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{12x^2-2x}{-2tg\, x\,(1+tg^2\, x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x^2-x}{-tg\, x - tg^3\, x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{12x-1}{-(1+tg^2\, x)-3tg^2\, x\,(1+tg^2\, x)} = 1$$

2 a) Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{9-x^2}{x^2+3x}$ y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.

b) Halla sus límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

c) Representa la información obtenida en a) y en b).

a) La función es discontinua en los puntos en los que no está definida. En este caso, en los puntos que anulan su denominador.

$x^2+3x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Estudiamos el tipo de discontinuidad:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9-x^2}{x^2+3x} = \dfrac{(9)}{(0)} = \pm\infty$ $\begin{cases} \text{Si } x \to 0^-, \ f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to 0^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9-x^2}{x^2+3x} = \dfrac{(0)}{(0)} \to \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{(x+3)}(3-x)}{x\cancel{(x+3)}} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3-x}{x} = -2$

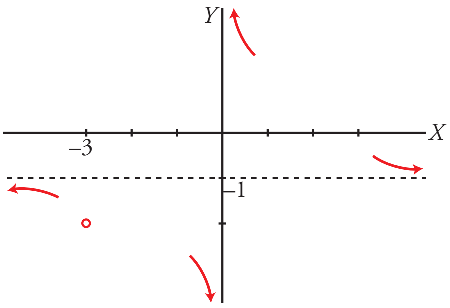
En $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

En $x = -3$, tiene una discontinuidad evitable.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

c)



3 **a) Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) La función no está definida en $x = -2$. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Cuando $x \neq -2$ y $x \neq 0$ la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En $x = -2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito porque:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x}{x+2} = \frac{(-2)}{(0)}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$$

Veamos ahora qué ocurre cuando $x = 0$:

$f(0) = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{x+2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{cases} \to \text{No existe el límite.}$$

Al ser los límites laterales distintos y finitos, en $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$

4 **Determina** a **y** b **para que la siguiente función sea continua en** $x = 0$**:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x - a}{b \text{ sen } x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por una parte, $b \neq 0$ para que la función esté bien definida.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - a}{b \text{ sen } x^2}$$

Para que el límite pueda existir, el numerador debe tender a 0 cuando $x \to 0$, ya que eso es lo que ocurre con el denominador. Por tanto:

$$e^0 - 0 - a = 0 \to a = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{b\ sen\ x^2} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2bx\ cos\ x^2} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2b(cos\ x^2 - 2x^2\ sen\ x^2)} = \frac{1}{2b}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Para que sea continua en $x = 0$, se debe cumplir que $\frac{1}{2} = \frac{1}{2b} \to b = 1$.

Si $a = 1$ y $b = 1$, la función es continua en $x = 0$.

5 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = sen\ \frac{\pi}{4}x$$

demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.

Construimos la función $g(x) = f(x + 1) - f(x) = sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} - sen\ \frac{\pi x}{4}$.

Demostrar que $f(c + 1) = f(c)$ para algún $c \in (0, 4)$, es lo mismo que demostrar que existe $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$.

$$g(0) = sen\ \frac{\pi(0+1)}{4} - sen\ \frac{\pi \cdot 0}{4} = sen\ \frac{\pi}{4} - sen\ 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = sen\ \frac{5\pi}{4} - sen\ \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La función g es continua en $[0, 4]$ y *signo de* $g(0) \neq$ *signo de* $g(4)$.

Según el teorema de Bolzano, existirá un $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c + 1) = f(c)$.

6 **Sea la función definida por esta expresión:**

$$f(x) = x + e^{-x}$$

Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

$f(x) = x + e^{-x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Calculamos algunos valores de f

$$f(0) = 0 + e^0 = 1 \qquad f(5) = 5 + e^{-5} = 5{,}007$$

Por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores del intervalo $[1; 5{,}007]$.

Por tanto, existirá un $0 < c < 5$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, $c + e^{-c} = 4$.