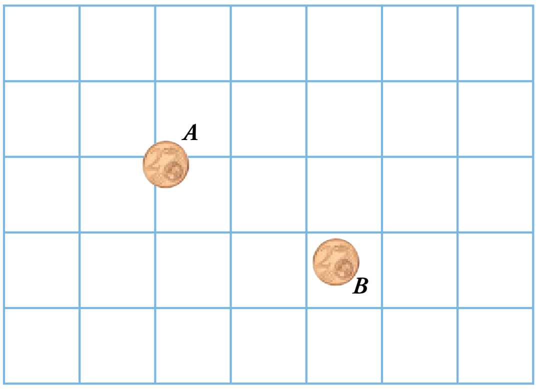
Resuelve

Página 247

Obtención experimental de la probabilidad

Cuadriculamos un folio con cuadrados de 3 cm × 3 cm.

Si dejamos caer sobre él una moneda de 2 céntimos de euro (19 mm de diámetro), puede caer "tocando raya", como *A*, o "sin tocar raya", como *B*.



Vamos a estimar la probabilidad del suceso *S*:

S = "LA MONEDA CAE SIN TOCAR RAYA"

Para ello, se realiza la experiencia muchas veces y se calcula la frecuencia relativa del suceso *S*.

Supongamos que 30 personas (los alumnos de una clase) lo realizan 100 veces cada una (un total de 3 000 experiencias), y que se contabiliza que el suceso *S* ha ocurrido 385 veces.

La frecuencia relativa y la probabilidad serán:

$$fr\,(S) = \frac{385}{3\,000} = 0{,}128 \rightarrow P[S] \approx 0{,}13$$

- **Estima tú la probabilidad de *S* lanzando 100 veces una moneda de 2 céntimos sobre una cuadrícula como la que se acaba de describir.**

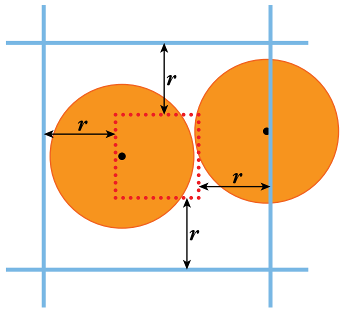
  Experiencia práctica para el alumno.

Cálculo matemático de la probabilidad

Resolvemos ahora el problema anterior de forma matemática.

La posición de la moneda queda determinada por su centro.

¿En qué puntos de la cuadrícula debe quedar el centro de la moneda para que esta no toque raya? Es claro que debe estar en el interior del cuadrado pequeño, es decir, su distancia a cada raya debe ser mayor que el radio de la moneda.



Área del cuadrado grande: $3^2 = 9$ cm²

Área del cuadrado pequeño: $(3 - 1{,}9)^2 = 1{,}21$ cm²

Probabilidad: $P[S] = \dfrac{1{,}21}{9} = 0{,}134$

La probabilidad obtenida por este método (0,134) ha sido sensiblemente igual a la obtenida por el método experimental (0,13).

- **Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que un botón de 1 cm de diámetro "no toque raya" en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm.**

  Área del cuadrado grande = $3^2 = 9$ cm²

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4$ cm²

  $$P = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

1 Experiencias aleatorias. Sucesos

Página 248

1 Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

b) Suceso elemental: $\{2\}$

Sucesos no elementales: $\{1, 2\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$

c) Esta experiencia tiene $2^4 = 16$ sucesos.

Página 249

2 Consideramos la experiencia "lanzar un dado". A partir de los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \ B = \{1, 3, 5\}, \ C = \{2, 4\}$$

a) Obtén los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, A', B'.

b) Obtén los conjuntos $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$, y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

c) Calcula $B \cup C$ y $B \cap C$, y razona los resultados.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cap B = \{1, 3\}$; $A' = \{5, 6\}$, $B' = \{2, 4, 6\}$

b) $(A \cup B)' = \{6\}$; $(A \cap B)' = \{2, 4, 5, 6\}$; $A' \cup B' = \{2, 4, 5, 6\}$, $A' \cap B' = \{6\}$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B \cap C = \varnothing$

Al ser B y C conjuntos disjuntos, la intersección es vacía.

2 Frecuencia y probabilidad

Página 250

1 ¿Verdadero o falso?

a) Estoy jugando con un dado correcto y en las últimas 20 jugadas no he conseguido ningún "5". Según la *ley de los grandes números*, en la siguiente jugada es muy muy probable que ya me salga "5".

b) Aunque en las últimas 20 tiradas no haya salido ningún "5", la probabilidad de que ahora salga "5" sigue siendo la misma que antes de la *racha*: 1/6 (el azar "no tiene memoria").

a) Falso. La ley de los grandes números solo dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a la probabilidad del mismo cuando se repite el experimento un número muy alto de veces. El resultado de la siguiente jugada apenas afecta a la correspondiente frecuencia relativa.

b) Verdadero. Los resultados de los diferentes lanzamientos del dado son independientes entre sí.

Página 251

2 Conocemos las siguientes probabilidades:

$$P[A] = 0{,}4 \qquad P[B] = 0{,}7 \qquad P[A' \cup B'] = 0{,}8$$

Calcula $P[(A \cap B)']$, $P[A \cap B]$, $P[A \cup B]$.

$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[B'] = 1 - P[B] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[(A \cap B)'] = P[A' \cup B'] = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$

3 Sabemos que:

$$P[M \cup N] = 0{,}6 \quad P[M \cap N] = 0{,}1 \quad P[M'] = 0{,}7$$

Calcula $P[M]$, $P[N]$, $P[N']$, $P[M' \cap N']$.

$P[M] = 1 - P[M'] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[M \cup N] = P[M] + P[N] - P[M \cap N] \;\rightarrow\; P[N] = P[M \cup N] + P[M \cap N] - P[M] =$

$= 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}4$

$P[N'] = 1 - P[N] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[M' \cap N'] = P[(M \cup N)'] = 1 - P[(M \cup N)] = 0{,}4$

3 Ley de Laplace

Página 252

Hazlo tú. Repite el problema con los datos siguientes:

P[COPA] = $\frac{1}{2}$, P[AS] = $\frac{1}{4}$, P[ni COPA ni AS] = $\frac{5}{16}$. Halla P[AS DE COPAS] y di cuántas cartas hay.

Llamamos A al suceso AS y C al suceso COPAS.

$$P[\text{AS DE COPAS}] = P[A \cap C] = P[A] + P[C] - P[A \cup C] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P[A \cup C] =$$

$$= \frac{3}{4} - P[A \cup C] = \frac{3}{4} - \left[1 - P[(A \cup C)']\right] = \frac{3}{4} - 1 + P[(A \cup C)'] =$$

$$= -\frac{1}{4} + P[A' \cap C'] = -\frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$$

Como el suceso AS DE COPAS es un suceso elemental y todas las demás cartas tienen la misma probabilidad de salir, en el mazo hay 16 cartas.

Página 253

1 Lanzamos un dado "chapucero" mil veces. Obtenemos:

$f(1) = 117$ $f(2) = 302$ $f(3) = 38$ $f(4) = 234$ $f(5) = 196$ $f(6) = 113$

Estima las probabilidades de las distintas caras y, basándote en ellas, calcula las probabilidades de estos sucesos: PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}.

$P[1] = \frac{117}{1\,000} = 0{,}117$ $P[2] = 0{,}302$ $P[3] = 0{,}038$

$P[4] = 0{,}234$ $P[5] = 0{,}196$ $P[6] = 0{,}113$

P[PAR] = 0,302 + 0,234 + 0,113 = 0,649

P[MENOR QUE 6] = 1 – P[6] = 1 – 0,113 = 0,887

P[{1, 2}] = 0,117 + 0,302 = 0,419

2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos? ¿Y la de obtener 9? ¿Y la de obtener 4?

Los casos favorables al primer suceso son: (2, 6); (3, 4); (4, 3) y (6, 2). Luego, $P[12] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

El segundo suceso solo tiene un caso favorable, (3, 3). Luego, $P[9] = \frac{1}{36}$.

Los casos favorables al tercer suceso son: (1, 4); (2, 2) y (4, 1). Luego, $P[4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2? ¿Y la probabilidad de que la diferencia sea 1?

Si suponemos que el orden en el que se restan las puntuaciones de los dados es indiferente, al no ser los dados distinguibles, las probabilidades serán:

- Los casos para que la diferencia sea 2 son: (1, 3); (2, 4); (3, 5); (4, 6) y los casos "simétricos". Por tanto:

$$P[2] = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

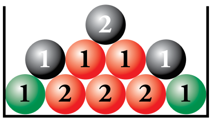
- Los casos en los que la diferencia es 1 son: (1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6) y los casos "simétricos". Por tanto:

$$P[1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

4 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Página 255

1 Observa las bolas que hay en la urna.



a) Completa el cuadro de doble entrada en el que se reparten las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

	V	R	N	TOTAL
1		2		
2		3		
TOTAL		5		

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las probabilidades condicionadas: P[1/ROJO], P[1/VERDE], P[1/NEGRO], P[2/ROJO], P[2/VERDE], P[2/NEGRO], P[ROJO/1], P[VERDE/1].

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

a)

	V	R	N	TOTAL
1	2	**2**	2	6
2	0	**3**	1	4
TOTAL	2	**5**	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$P[\text{N}] = \dfrac{3}{10} = 0,3$

$P[\text{V}] = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

$P[1] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

$P[2] = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

d) $P[1/\text{R}] = \dfrac{2}{5}$; $P[1/\text{V}] = 1$; $P[1/\text{N}] = \dfrac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \dfrac{3}{5}$; $P[2/\text{V}] = 0$; $P[2/\text{N}] = \dfrac{1}{3}$

$P[\text{R}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $P[\text{V}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

e) No son independientes.

5 Pruebas compuestas

Página 256

1 ¿Verdadero o falso?

a) En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. Las dos extracciones son independientes.

Por tanto: $P[1.^{a}\ \text{ROJA y } 2.^{a}\ \text{VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^{a}] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^{a}] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

b) Tenemos dos bolsas, cada una de ellas con 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola de la primera bolsa y una bola de la segunda bolsa. Las dos extracciones son independientes. Por tanto: $P[1.^{a}\ \text{ROJA y } 2.^{a}\ \text{VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^{a}] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^{a}] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

a) Falso, porque la composición de la bolsa, cuando se va a extraer la segunda bola, depende de la primera bola extraída. En este caso las pruebas compuestas no son independientes.

b) Verdadero. Al extraer de dos bolsas distintas, las pruebas son independientes.

2 Calcula la probabilidad de obtener TRES CUATROS al lanzar tres dados.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0,0046$$

3 Calcula la probabilidad de que no nos salga el número 6 (NINGÚN SEIS) al lanzar cuatro dados (cuatro veces NO SEIS).

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,48$$

4 Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS).

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,48 = 0,52$

5 Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dados.

$$P[\text{NINGÚN } 6] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,335$$

$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,335 = 0,665$

Página 257

6 ¿Verdadero o falso?

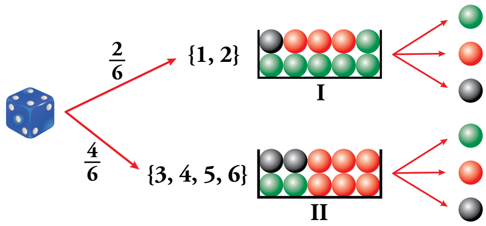
En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. La segunda extracción depende del resultado de la primera. Por tanto:

P[1.ª 🔴 y 2.ª 🟢] = P[🔴 en 1.ª] · P[🟢 en 2.ª/🔴 en 1.ª] = = $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

Verdadero, porque cuando se va a extraer la segunda bola, queda una bola menos en la urna y todavía están todas las bolas verdes dentro de ella. Las dos experiencias son dependientes.

7 Tenemos un dado y las dos urnas descritas en el dibujo que aparece a continuación.

Lanzamos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II. Extraemos una bola de la urna correspondiente.

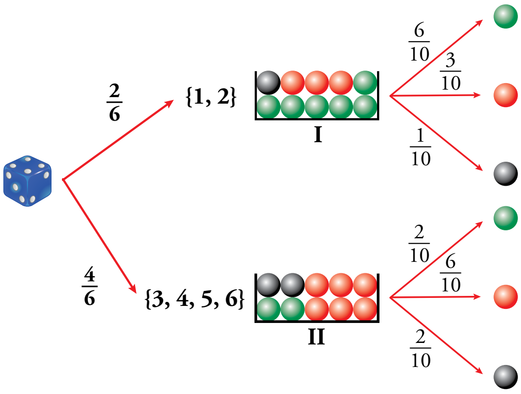


a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.

b) Halla:

***P*[{3, 4, 5, 6} y ]** **P[/1]** **P[/5]** **P[2 y ]**

a)



b) P[{3, 4, 5, 6} y ] $= \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$

P[/1] $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

P[/5] $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

P[2 y ] $= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$

6 Probabilidad total

Página 259

Hazlo tú. En el ejercicio anterior, calcula *P*[🟢] y *P*[⚫].

Comprueba que la suma *P*[🔴] + *P*[🟢] + *P*[⚫] es igual a 1.

P[🟢] = $\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{3}$

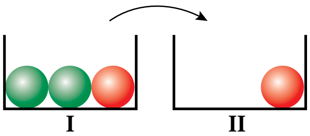
P[⚫] = $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{6}$

P[🔴] + *P*[🟢] + *P*[⚫] = $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

Hazlo tú. En el ejercicio anterior, si la probabilidad de que cace al ratón es 0,44, entonces la probabilidad de que escape ($\nearrow$) es 0,56 ($P[\nearrow] = 1 - P[+] = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$). Calcula dicha probabilidad, $P[\nearrow]$, siguiendo todo el proceso.

$P[\nearrow] = = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}56$

1 ¿Verdadero o falso?



Primero extraemos una bola de I y la introducimos en II. Después extraemos una bola de II.

a) *P*[2.ª 🔴/1.ª 🟢] = $\frac{1}{2}$

b) *P*[2.ª 🟢/1.ª 🟢] = $\frac{1}{2}$

c) *P*[2.ª 🔴/1.ª 🔴] = $\frac{1}{3}$

d) *P*[1.ª 🟢 y 2.ª 🔴] = $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Solo debemos fijarnos en la composición de la segunda urna después de haber pasado cada bola.

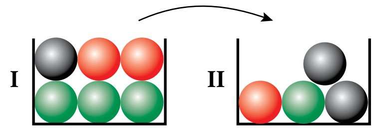
a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso. *P*[2.ª 🔴/1.ª 🔴] = $\frac{2}{2}=1$

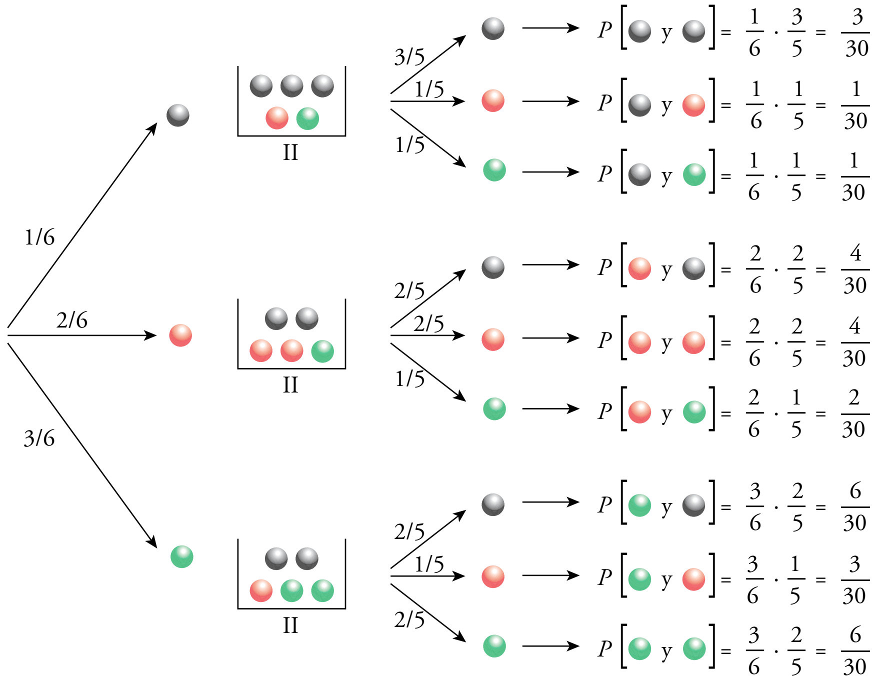
d) Falso. *P*[1.ª 🟢 y 2.ª 🔴] = $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

2 Tenemos dos urnas:



La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja **b) verde** **c) negra**



a) $P[2.^{a}$ 🔴$] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2.^{a}$ 🟢$] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2.^{a}$ ⚫$] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

7 Probabilidades "a posteriori". Fórmula de Bayes

Página 261

Hazlo tú. Si lo que se obtiene finalmente es bola roja, ¿qué probabilidad hay de que provenga de la URNA I? Es decir, calcula $P[\text{I}/\text{🔴}]$.

$$P[\text{I}/\text{🔴}] = \frac{P[\text{I}/\text{🔴}]}{P[\text{🔴}]} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}} = \frac{1}{5}$$

1 ¿Verdadero o falso?

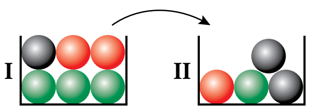
En el ejemplo de los teléfonos GUAY y PUAF visto anteriormente, sabemos de un teléfono que, pasado el tiempo prudencial, NO TIENE AVERÍAS. Ignoramos la marca pero podemos calcular sus probabilidades.

$$100 \begin{cases} \text{G, } 80 \xrightarrow{39/40} \text{G y NO AV, } 78 \\ \text{P, } 20 \xrightarrow{6/10} \text{P y NO AV, } 12 \end{cases} \rightarrow \text{NO AV, } 90$$

$$P[\text{GUAY}/\text{NO AV}] = \frac{78}{90} = 0{,}87$$

$$P[\text{PUAF}/\text{NO AV}] = \frac{12}{90} = 0{,}13$$

Verdadero. Este razonamiento es análogo al desarrollado en el ejemplo de la página anterior.

2 

Se extrae una bola de I y se introduce en II. Se remueve y se extrae una bola de II.

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? $P[1.^a\,\text{⚫}/2.^a\,\text{⚫}]$

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido negra? $P[1.^a\,\text{⚫}/2.^a\,\text{🔴}]$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde siendo verde la segunda? $P[1.^a\,\text{🟢}/2.^a\,\text{🟢}]$

a) $P[1.^a\,\text{⚫}/2.^a\,\text{⚫}] = \dfrac{P[\text{⚫ y ⚫}]}{P[2.^a\,\text{⚫}]} = \dfrac{3/30}{13/30} = \dfrac{3}{13}$

b) $P[1.^a\,\text{⚫}/2.^a\,\text{🔴}] = \dfrac{P[\text{⚫ y 🔴}]}{P[2.^a\,\text{🔴}]} = \dfrac{1/30}{8/30} = \dfrac{1}{8}$

c) $P[1.^a\,\text{🟢}/2.^a\,\text{🟢}] = \dfrac{P[\text{🟢 y 🟢}]}{P[2.^a\,\text{🟢}]} = \dfrac{6/30}{9/30} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 262

2. Propiedades de las probabilidades

Hazlo tú. Si $P[A] = 0{,}3$; $P[B'] = 0{,}4$; $P[A' \cup B'] = 0{,}8$; calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[A \cap B] = 1 - P[(A \cap B)'] = 1 - P[A' \cup B'] = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5$

3. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Hazlo tú. Si $P[A] = 0{,}3$; $P[B] = 0{,}6$; $P[A' \cup B'] = 0{,}82$; ¿son independientes A y B?

$P[A \cap B] = 1 - P[(A \cap B)'] = 1 - P[A' \cup B'] = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

$P[A] \cdot P[B] = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

Página 263

5. Probabilidades en tablas de contingencia

Hazlo tú. Calcula $P[\text{VID/MAY}]$.

$P[\text{VID/MAY}] = \dfrac{13}{120}$ (De los 120 mayores, 13 practican videojuegos).

Página 264

6. Experiencias compuestas. Probabilidad total y probabilidad "a posteriori"

Hazlo tú. Calcula P[🟢 en II] sin utilizar la probabilidad del suceso contrario y halla también P[🔴 en I / 🟢 en II].

P[🟢 en II] = P[🔴 en I] · P[🟢 en II/🔴 en I] + P[🟢 en I] · P[🟢 en II/P[🟢 en I] =

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{9}{25}$$

P[🔴 en I / 🟢 en II] = $\dfrac{P[\text{🔴 en I / 🟢 en II}]}{P[\text{🟢 en II}]} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{25}} = \dfrac{1}{3}$

7. Experiencias compuestas. Probabilidad total y probabilidad "a posteriori"

Hazlo tú. Calcula $P[\text{NO PREMIO}]$ sin utilizar la probabilidad del suceso contrario. Halla también $P[\text{A/NO PREMIO}]$.

$$P[\text{NO PREMIO}] = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$$

$$P[\text{A/NO PREMIO}] = P[\text{A y NO PREMIO}] : P[\text{NO PREMIO}] = \frac{10}{36} : \frac{25}{36} = \frac{2}{5}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 265

1. Conjuntos y tablas de contingencia

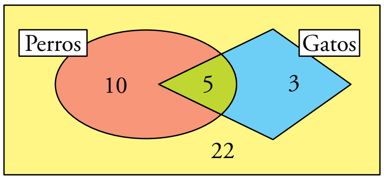
En una comunidad de 40 vecinos, 15 de ellos tienen perros, 8 tienen gatos y 5 tienen perros y gatos.

Se elige al azar un vecino de esta comunidad. Calcular las siguientes probabilidades:

a) P[PERRO o GATO]

b) P[ni PERRO ni GATO]

c) P[PERRO/GATO]



	PERROS	NO PERROS	TOTAL
GATOS	5	3	8
NO GATOS	10	22	32
TOTAL	15	25	40

a) $P[\text{PERRO o GATO}] = \dfrac{10+5+3}{40} = \dfrac{18}{40} = 0,45$

b) $P[\text{ni PERRO ni GATO}] = \dfrac{22}{40} = 0,55$

c) $P[\text{PERRO/GATO}] = \dfrac{5}{8} = 0,625$ (de los 8 que tienen gato, 5 también tienen perro).

2. Probabilidades en experiencias compuestas

Un dado está trucado de manera que son iguales las probabilidades de obtener 2, 4 o 6; también son iguales las probabilidades de sacar 1, 3 o 5, y la probabilidad de obtener 2 es el doble que la de sacar 1.

Deducir razonadamente cuál es la probabilidad de que, al lanzar el dado dos veces, se obtenga una suma de puntos igual a 7.

Llamamos:

$$p = P[1] = P[3] = P[5]$$

Entonces:

$$P[2] = P[4] = P[6] = 2p$$

Ahora bien:

$$1 = P[E] = P[1] + P[3] + P[5] + P[2] + P[4] + P[6] = p + p + p + 2p + 2p + 2p = 9p$$

Por tanto:

$$1 = 9p \;\rightarrow\; p = \frac{1}{9}$$

Las parejas cuya suma es 7 son: (1, 6); (2, 5), (3, 4) y sus "simétricas".

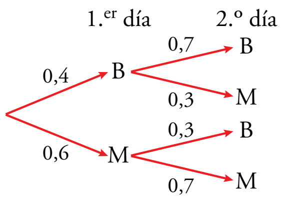
Cada pareja está formada por un número par y uno impar. Como los lanzamientos son independientes entre sí, la probabilidad de cada pareja es $\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{81}$.

Por tanto:

$$P[\text{SUMA } 7] = 6 \cdot \frac{2}{81} = \frac{12}{81} = 0,15$$

3. Probabilidad total

Suponemos que el tiempo (climatológico) solo se puede clasificar como bueno o malo y que, en cierta zona, la probabilidad de que se produzca, de un día para otro, un cambio de tiempo es de 0,3. Si la probabilidad de que haga buen tiempo (en esa zona) el 20 de junio es de 0,4; ¿qué probabilidad hay de que el 21 de junio haga buen tiempo?



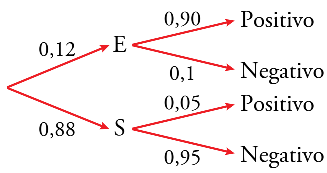
$P[2.° \text{ B}] = P[1.° \text{ B y } 2.° \text{ B}] + P[1.° \text{ M y } 2.° \text{ B}] = 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}46$

4. Probabilidad "a posteriori"

El 12 % de la población de un país padece cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable.

- ***Da positivo en el 90 % de los casos de personas realmente enfermas.***
- ***Da positivo en el 5 % de personas sanas.***

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positivo?



$P[\text{POSITIVO}] = 0{,}12 \cdot 0{,}9 + 0{,}88 \cdot 0{,}05 = 0{,}152$

$$P[\text{SANAS/POSITIVO}] = \frac{P[\text{SANAS y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0,88 \cdot 0,05}{0,152} = 0,29$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 266

Para practicar

Espacio muestral. Sucesos

1 Di cuál es el espacio muestral correspondiente a cada experiencia aleatoria:

a) Lanzar dos monedas y decir lo que sale en cada una.

b) Lanzar dos monedas y anotar el número de caras.

c) Lanzar una moneda y un dado.

d) Extraer una carta de una baraja y anotar el palo.

e) Lanzar una pelota a canasta (encestar o no).

f) Preguntar a una persona por el día de la semana en el que cae su cumpleaños este año.

a) E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}

b) E = {0, 1, 2}

c) E = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (+, 1), (+, 2), (+, 3), (+, 4), (+, 5), (+, 6)}

d) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

e) E = {ENCESTAR, NO ENCESTAR}

f) E = {LUNES, MARTES, MIÉRCOLES, JUEVES, VIERNES, SÁBADO, DOMINGO}

2 Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los sucesos *A*, FIGURA; *B*, BASTOS, y *C*, MENOR QUE 4.

a) Expresa en función de *A*, *B* y *C* estos sucesos:

- **Se realiza alguno de los tres.**
- **No se realiza ninguno de los tres.**
- **Se realizan los tres.**
- **Alguno no se realiza.**
- **Se realiza el *A* o el *B*, pero no el *C*.**

b) Describe los elementos correspondientes a cada uno de los sucesos del apartado a).

a)
- $A \cup B \cup C$
- $A' \cap B' \cap C'$
- $A \cap B \cap C$
- $A' \cup B' \cup C'$
- $(A \cup B) \cap C'$

b)
- Cualquier figura o basto o cualquier carta menor que 4.
- Oros, copas o espadas mayores o iguales que 4 que no sean figuras.
- Este suceso es imposible porque no hay figuras con numeración menor que 4.
- Este suceso es seguro porque entre las cartas que no son figuras y las que tienen numeración mayor o igual que 4 reunimos toda la baraja.
- Cualquier figura o cualquier basto con numeración mayor o igual que 4.

3 **Lanzamos tres monedas y anotamos el resultado, C y +, de cada una. Consideramos los sucesos A = "Sacar más caras que cruces" y B = "Sacar una o dos cruces". Halla todos los casos que integran los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.**

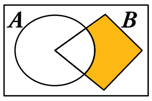
A = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C), (C, C, C)}

B = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +)}

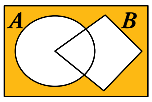
$A \cup B$ = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +), (C, C, C)}

$A \cap B$ = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C)}

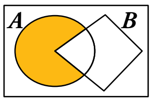
4 **Relaciona cada diagrama con un suceso.**

a) 

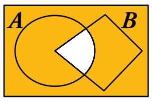
I. $A \cap B'$

b) 

II. $A' - B'$

c) 

III. $A' \cup B'$

d) 

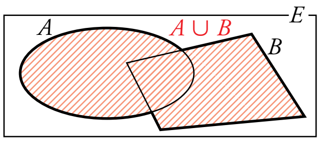
IV. $A' \cap B'$

a) → II b) → IV c) → I d) → III

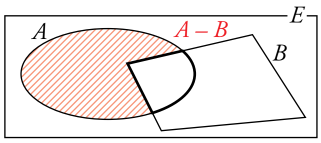
5 **Ayúdate de diagramas para resolver cada apartado.**

a) Expresa $A \cup B$ como unión de tres sucesos incompatibles. Puedes utilizar alguno de los siguientes: A', B', $A - B$, $B - A$, $A \cap B$.

b) El suceso $A - B$ es igual a algunos de los siguientes sucesos; di a cuáles: $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A - (A \cap B)$

a) 

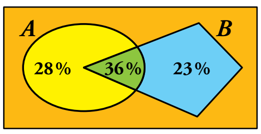
$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

b) 

$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

Propiedades de la probabilidad

6 **Observa los siguientes conjuntos:**



Calcula $P[A \cup B]$, $P[A'/B]$, $P[A/B']$ y $P[A \cap B']$.

$$P[A \cup B] = \frac{28}{100} + \frac{36}{100} + \frac{23}{100} = \frac{87}{100}$$

$$P[A'/B] = \frac{\frac{23}{100}}{\frac{36}{100} + \frac{23}{100}} = \frac{23}{51}$$

$$P[A/B'] = \frac{\frac{28}{100}}{1 - \left(\frac{36}{100} + \frac{23}{100}\right)} = \frac{28}{41}$$

$$P[A \cap B'] = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

7 **De los sucesos A y B se sabe lo siguiente:**

$$P[A] = \frac{2}{5} \qquad P[B] = \frac{1}{3} \qquad P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}$$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \;\rightarrow\; P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

8 **Sean A y B dos sucesos tales que:**

$$P[A \cup B] = \frac{3}{4} \qquad P[B'] = \frac{2}{3} \qquad P[A \cap B] = \frac{1}{4}$$

Calcula $P[A]$, $P[B]$ y $P[A' \cap B]$.

$$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \;\rightarrow\; P[A] = \frac{2}{3}$$

$$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

9 **Sean A y B dos sucesos de manera que $P[A] = 0{,}4$; $P[B] = 0{,}3$ y $P[A \cap B] = 0{,}1$. Halla razonadamente:**

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A' \cup B']$** **c) $P[A \cap B']$** **d) $P[A' \cap B']$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A \cap B'] = P[A] - P[A \cap B] = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

d) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

10 **Se sabe que $P[A] = \frac{1}{4}$, $P[B] = \frac{1}{2}$ y $P[A \cup B] = \frac{2}{3}$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles.**

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \;\rightarrow\; P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

Los sucesos A y B son compatibles.

11 **Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral con $P[A] = 0{,}7$; $P[B] = 0{,}6$ y $P[A \cup B] = 0{,}9$.**

a) Justifica si A y B son independientes.

b) Calcula $P[A/B']$ y $P[B/A']$.

a) $P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$

$P[A] \cdot P[B] = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Por no ser los resultados iguales, los sucesos no son independientes.

b) $P[A/B'] = \dfrac{P[A \cap B']}{P[B']} = \dfrac{0{,}7 - 0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}75$

$P[B/A'] = \dfrac{P[B \cap A']}{P[A']} = \dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{1 - 0{,}7} = 0{,}67$

Probabilidades en experiencias compuestas

12 **Lanzamos cuatro monedas. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Ninguna cara.

b) Alguna cara.

a) $P[\text{NINGUNA CARA}] = P[\text{CUATRO CRUCES}] = P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

b) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

13 **De una baraja se extraen dos cartas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Dos sean copas.

b) Al menos una sea copas.

c) Una sea copas y la otra espadas.

Considera dos procesos distintos:

I. Después de extraer una se devuelve al mazo.

II. Se extraen las dos a la vez.

I. Se devuelve la primera al mazo

a) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA y } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{16}$

b) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA o } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = P[(\text{NINGUNA COPA})'] = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{30}{40} = \dfrac{7}{16}$

c) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA y } 2.^{\text{a}}\ \text{ESPADA}] + P[1.^{\text{a}}\ \text{ESPADA y } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{8}$

II. Se extraen las dos a la vez.

a) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA y } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{3}{52}$

b) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA o } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = P[(\text{NINGUNA COPA})'] = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{23}{52}$

c) $P[1.^{\text{a}}\ \text{COPA y } 2.^{\text{a}}\ \text{ESPADA}] + P[1.^{\text{a}}\ \text{ESPADA y } 2.^{\text{a}}\ \text{COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{5}{39}$

14 **Se extraen dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?**

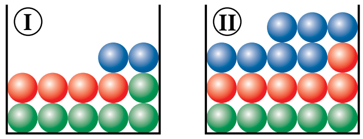
$P[\text{DOS SOTAS y PAR}] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{260}$

Ya que hay independencia entre las extracciones de las cartas y el lanzamiento del dado.

Página 267

Probabilidades total y "a posteriori"

15 **Extraemos una bola de cada una de estas urnas:**



¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y de distinto color?

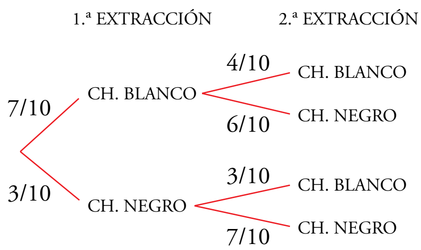
$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12}\cdot\frac{5}{18}+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{18}+\frac{2}{12}\cdot\frac{7}{18}=\frac{30}{216}+\frac{24}{216}+\frac{14}{216}=\frac{68}{216}=\frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1-\frac{17}{54}=\frac{37}{54}$$

16 **Hay dos cajas de bombones; la primera tiene 7 bombones de chocolate blanco y 3 de chocolate negro y la segunda, 3 de chocolate blanco y 6 de chocolate negro.**

Se extrae sin mirar un bombón de la primera caja y se pone en la segunda. ¿Qué probabilidad hay de que al coger un bombón de la segunda caja sea de chocolate blanco?

Para resolver el ejercicio construimos el siguiente diagrama en árbol:



$$P[2.^{a}\text{ chocolate blanco}] = \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{37}{100}$$

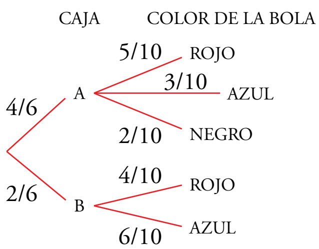
17 **Observa estas cajas con bolas de colores:**

Tenemos un dado que tiene cuatro caras marcadas con la letra A y las otras dos, con la letra B. Tiramos el dado, elegimos la caja que indica y sacamos, al azar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y negra?

b) La bola extraída ha resultado ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Describimos el experimento en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{ROJA}] = \frac{4}{6}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{15}$

$P[\text{NEGRA}] = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{2}{15}$

b) $P[\text{CAJA B}/\text{ROJA}] = \dfrac{P[\text{CAJA B y ROJA}]}{P[\text{ROJA}]}=\dfrac{\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{7}{15}}=\dfrac{2}{7}$

18 **Un bote A contiene 6 clips blancos y 4 negros. Otro bote B tiene 5 clips blancos y 9 negros. Elegimos al azar un bote, extraemos dos clips y resultan ser blancos. Halla la probabilidad de que el bote elegido haya sido el A.**

La probabilidad de elegir cualquiera de los dos botes es $\frac{1}{2}$.

Como las extracciones se realizan simultáneamente, tenemos:

$$P[\text{dos blancos}] = P[\text{caja A y dos blancos}] + P[\text{caja B y dos blancos}] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{121}{546}$$

$$P[\text{caja A/dos blancos}] = \frac{P[\text{caja A y dos blancos}]}{P[\text{dos blancos}]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{121}{546}} = \frac{91}{121}$$

Para resolver

19 **Un estuche contiene 2 lápices azules y 3 rojos. Se extraen dos lápices del estuche.**

a) Escribe los resultados elementales que definen los sucesos M = "Solo ha salido un lápiz rojo" y N = "El segundo lápiz extraído es azul".

b) Halla las probabilidades de M, N y $M \cap N$.

c) ¿Son los sucesos M y N independientes?

a) M = {(rojo, azul), (azul, rojo)}

N = {(rojo, azul), (azul, azul)}

b) $P[M] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P[N] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P[M \cap N] = \frac{1}{4}$

c) Sí lo son porque verifican la relación: $P[M \cap N] = P[M] \cdot P[N]$

20 **A unas elecciones se presentan seis candidatos: A, B, C, D, E y F. Se estima que B, C y D tienen la misma probabilidad de ganar, que es la mitad de la probabilidad de que gane A. Además, E y F tienen la misma probabilidad de ganar, que es el triple de la probabilidad de que gane A. Calcula:**

a) La probabilidad que tiene de ganar cada candidato.

b) La probabilidad de que gane A o F.

a) Llamemos $p = P[\text{A}]$. Entonces:

$$P[\text{B}] = P[\text{C}] = P[\text{D}] = \frac{p}{2} \qquad P[\text{E}] = P[\text{F}] = 3p$$

Como los sucesos A, B, C, D y E forman el espacio muestral, se tiene que:

$$p + 3 \cdot \frac{p}{2} + 2 \cdot 3p = 1 \rightarrow \frac{17}{2}p = 1 \rightarrow p = \frac{2}{17}$$

Por tanto:

$$P[\text{A}] = \frac{2}{17}$$

$$P[\text{B}] = P[\text{C}] = P[\text{D}] = \frac{1}{17}$$

$$P[\text{E}] = P[\text{F}] = \frac{6}{17}$$

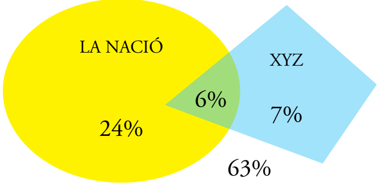
b) $P[\text{A} \cup \text{F}] = \frac{2}{17} + \frac{6}{17} = \frac{8}{17}$

21 **El 30 % de los habitantes de una ciudad lee el diario *La Nació*; el 13 %, el diario *XYZ* y el 6 % lee los dos.**

a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esa ciudad no lee ninguno de los dos diarios?

b) De entre los habitantes de esta ciudad que no leen el diario *XYZ*, se elige uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que lea el diario *La Nació*?

Organizamos los datos en un gráfico:



a) P[NO LEE NINGÚN PERIÓDICO] = 63 %

b) P[LEE LA NACIÓ/NO LEE *XYZ*] $= \dfrac{24/100}{87/100} = \dfrac{8}{29} = 27{,}6\,\%$

22 **En una encuesta a pie de calle, el 80 % de los entrevistados dice que ve la televisión o lee; el 35 % realiza ambas cosas y el 60 %, no lee. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:**

a) Vea la televisión y no lea.

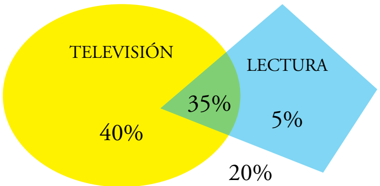
b) Lea y no vea la televisión.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) No haga ninguna de las dos cosas.

e) ¿Son independientes los sucesos "ver la tele" y "leer"?

Como el 60 % no lee, sí lo hace el 40 %. Así, podemos construir el gráfico:



a) P[VER TELEVISIÓN Y NO LEER] $= \dfrac{40}{100} = 40\,\%$

b) P[LEER Y NO VER TELEVISIÓN] $= \dfrac{5}{100} = 5\,\%$

c) P[HACER SOLO UNA DE LAS DOS] $= \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{9}{20} = 45\,\%$

d) P[NO HACER NINGUNA DE LAS DOS] $= \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5} = 20\,\%$

e) Por una parte:

P[VER TELEVISIÓN Y LEER] $= \dfrac{35}{100} = \dfrac{7}{20} = 35\,\%$

Por otra:

P[VER TELEVISIÓN] · P[LEER] $= \dfrac{75}{100} \cdot \dfrac{40}{100} = \dfrac{3}{10} = 30\,\%$

Luego los sucesos no son independientes.

23 **En una ciudad, el 40 % de la población es rubia, el 25 % tiene ojos azules y el 15 % es rubia de ojos azules. Se escoge una persona al azar:**

a) Si es rubia, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos azules?

b) Si tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea rubia ni tenga los ojos azules?

Construimos la tabla:

	OJOS AZULES	OJOS NO AZULES	TOTAL
CABELLO RUBIO	**15**	25	**40**
CABELLO NO RUBIO	10	50	60
TOTAL	**25**	75	**100**

a) P[OJOS AZULES/RUBIO] $= \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

b) P[RUBIO/OJOS AZULES] $= \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

c) P[NI RUBIO NI OJOS AZULES] $= \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

24 **Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase y un 65 % de los que sí lo utilizan, también hacen uso del comedor universitario.**

Halla la probabilidad de que, seleccionado al azar un estudiante de esa universidad, resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

El 80 % de los estudiantes sí usan el transporte público. Por tanto:

$P[\text{TRANSPORTE PÚBLICO Y COMEDOR UNIVERSITARIO}] =$

$= P[\text{TRANSPORTE PÚBLICO}] \cdot P[\text{COMEDOR UNIVERSITARIO/TRANSPORTE PÚBLICO}] = \dfrac{80}{100} \cdot \dfrac{65}{100} = \dfrac{13}{25}$

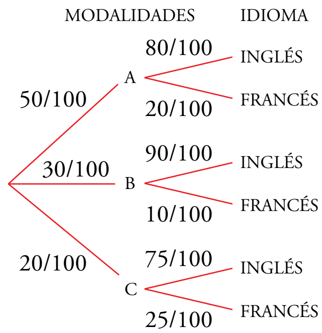
25 **En un centro se ofertan tres modalidades excluyentes, A, B y C, y dos idiomas excluyentes, inglés y francés. La modalidad A es elegida por un 50 % de los alumnos; la B, por un 30 % y la C, por un 20 %.**

Se sabe que ha elegido inglés el 80 % de los alumnos de la modalidad A, el 90 % de la B y el 75 % de la C, habiendo elegido francés el resto.

a) ¿Qué porcentaje de los alumnos ha elegido francés?

b) Si se elige al azar un estudiante de francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

El siguiente diagrama en árbol describe la situación:



a) $P[\text{FRANCÉS}] = \dfrac{50}{100} \cdot \dfrac{20}{100} + \dfrac{30}{100} \cdot \dfrac{10}{100} + \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{25}{100} = \dfrac{18}{100}$

El 18 % de los estudiantes ha elegido francés.

b) $P[\text{MODALIDAD A/FRANCÉS}] = \dfrac{P[\text{MODALIDAD A y FRANCÉS}]}{P[\text{FRANCÉS}]} = \dfrac{\frac{50}{100} \cdot \frac{20}{100}}{\frac{18}{100}} = \dfrac{5}{9}$

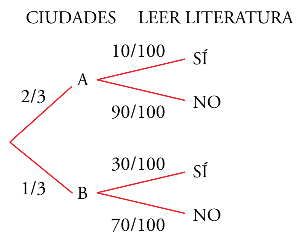
Página 268

26 **La ciudad A tiene el doble de habitantes que la B. Un 30 % de ciudadanos de B lee literatura, y solo un 10 % de ciudadanos de A lee literatura.**

a) Si sabemos que un ciudadano vive en la ciudad A o en la B, ¿qué probabilidad hay de que lea literatura?

b) Si nos presentan a un ciudadano de alguna de las dos ciudades que lee literatura, ¿qué probabilidad hay de que sea de la ciudad B?

Como la ciudad A tiene el doble de habitantes que la B, un ciudadano elegido al azar entre las ciudades A o B tiene doble probabilidad de pertenecer a A que a B. Por tanto:



a) $P[\text{LEER LITERATURA}] = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{10}{100} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{30}{100} = \dfrac{1}{6}$

b) $P[\text{B/LEER LITERATURA}] = \dfrac{P[\text{B y LEER LITERATURA}]}{P[\text{LEER LITERATURA}]} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{3}{5}$

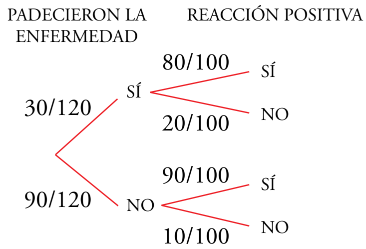
27 **Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento sobre 120 personas con cierta enfermedad. Se sabe que 30 de ellas ya habían padecido esta enfermedad con anterioridad. Entre las que la habían padecido, el 80 % ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre aquellas que no la habían padecido, ha sido el 90 % el que reaccionó positivamente.**

a) Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan padecido la enfermedad?

b) Determina la probabilidad de que al elegir un paciente al azar, no reaccione positivamente al nuevo tratamiento.

c) Si un paciente ha reaccionado positivamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

Nos basamos en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{LOS DOS PADECIERON LA ENFERMEDAD}] = \dfrac{30}{120} \cdot \dfrac{29}{119} = \dfrac{29}{476}$

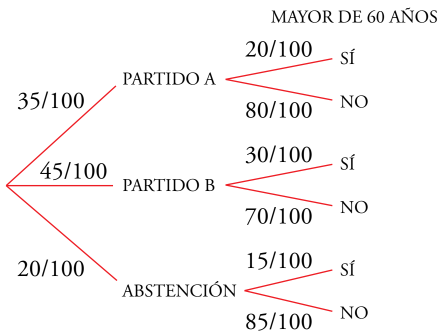
b) $P[\text{NO REACCIONAR POSITIVAMENTE}] = \dfrac{30}{120} \cdot \dfrac{20}{120} + \dfrac{90}{120} \cdot \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{8}$

c) $P[\text{NO HABER PADECIDO LA ENFERMEDAD/NO REACCIONAR POSITIVAMENTE}] = \dfrac{\dfrac{90}{120} \cdot \dfrac{10}{100}}{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{3}{5}$

28 **En una ciudad, el 35 % de los censados vota al partido A; el 45 %, al partido B y el 20 % se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes de A, el 30 % de los de B y el 15 % de los que se abstienen, son mayores de 60 años. Elegimos una persona al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

b) Si es menor de 60 años, ¿qué probabilidad hay de que haya votado al partido B?



a) $P[\text{MAYOR DE } 60] = \dfrac{35}{100} \cdot \dfrac{20}{100} + \dfrac{45}{100} \cdot \dfrac{30}{100} + \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{15}{100} = \dfrac{47}{200}$

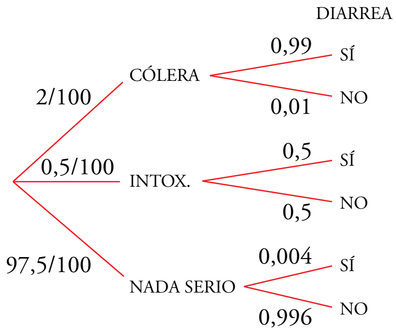
b) $P[\text{MENOR DE } 60] = 1 - \dfrac{47}{200} = \dfrac{153}{200}$

$$P[\text{B/MENOR DE } 60] = \dfrac{P[\text{B y MENOR DE } 60]}{P[\text{MENOR DE } 60]} = \dfrac{\dfrac{45}{100} \cdot \dfrac{70}{100}}{\dfrac{153}{200}} = \dfrac{7}{17}$$

29 **Hay una epidemia de cólera (*C*). Se considera como uno de los síntomas la diarrea (*D*), pero el síntoma se presenta también en personas con intoxicación (*I*), e incluso en algunas que no tienen nada serio (*N*). Las probabilidades son:**

$$P[D/C] = 0{,}99 \qquad P[D/I] = 0{,}5 \qquad P[D/N] = 0{,}004$$

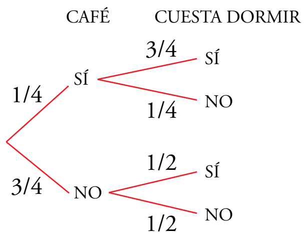
Se dan los siguientes porcentajes: el 2 % de la población tiene cólera; el 0,5 %, intoxicación, y el resto, 97,5 %, nada serio. Si una persona tiene diarrea, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cólera?



$$P[D] = \frac{2}{100} \cdot 0{,}99 + \frac{0{,}5}{100} \cdot 0{,}5 + \frac{97{,}5}{100} \cdot 0{,}004 = 0{,}0262$$

$$P[C/D] = \frac{P[C \cap D]}{P[D]} = \frac{(2/100) \cdot 0{,}99}{0{,}0262} = 0{,}76$$

30 **Una de cada cuatro veces me tomo un café después de comer. Por la noche me cuesta dormir las tres cuartas partes de los días que he tomado café y la mitad de los que no tomé nada. No me acuerdo bien si me tomé un café al mediodía, pero si hoy tengo mucho sueño, ¿cuánto más probable es no haberme tomado café que habérmelo tomado?**



$$P[\text{NO CUESTA DORMIR}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

$$P[\text{TOMAR CAFÉ/NO CUERTA DORMIR}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7}$$

$$P[\text{NO TOMAR CAFÉ/NO CUESTA DORMIR}] = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

Por tanto, es 6 veces más probable no haber tomado café que haberlo hecho.

31 **En una ciudad, los ascensos de barrendero a jefe de grupo son muy disputados. Se puede acceder por tres conductos: por oposición, por concurso de méritos o por enchufe. La probabilidad de que un barrendero alcance la plaza si oposita es de 0,2; si concursa, es de 0,8 y si tiene enchufe, seguro que la consigue. Los aspirantes a jefes de grupo se reparten de este modo:**

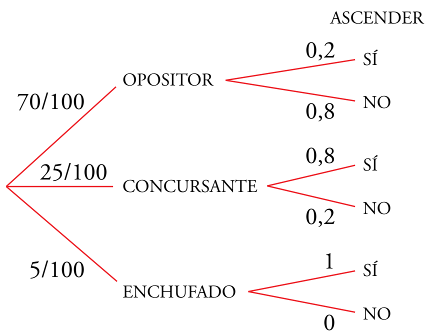
- **70 % son opositores**
- **25 % concursan**
- **5% tienen enchufe**

Calcula:

a) ¿Cuántos de los 120 jefes de grupo consiguieron el ascenso por enchufe?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto jefe de grupo haya alcanzado la plaza por concurso?

c) ¿Qué probabilidad tiene un jefe de grupo escogido al azar, de haber obtenido la plaza opositando?



a) $P[\text{ASCENDER POR ENCHUFE}] = \frac{5}{100} \cdot 1 = \frac{1}{20} = 0{,}05$

El número de jefes que ascendieron por enchufe fue:

$120 \cdot 0{,}05 = 6$

b) $P[\text{HABER CONCURSADO Y ASCENDER}] = \frac{25}{100} \cdot 0{,}2 = 0{,}05$

c) $P[\text{ASCENDER}] = \frac{70}{100} \cdot 0{,}2 + \frac{25}{100} \cdot 0{,}8 + \frac{5}{100} \cdot 1 = 0{,}39$

$P[\text{HABER OPOSITADO/ASCENDER}] = \frac{0{,}14}{0{,}39} = 0{,}39$

Cuestiones teóricas

32 **¿Se puede asegurar que $P[\{1, 2\}] < P[\{1, 2, 7\}]$?**

Como $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 7\}$, podemos afirmar que $P[\{1, 2\}] \le P[\{1, 2, 7\}]$ pero no tiene por qué darse la desigualdad estricta.

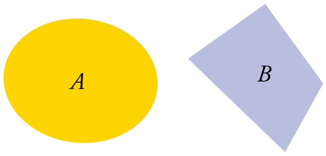
33 **Sírvete de un diagrama para verificar estas afirmaciones y, si no fueran ciertas, pon un ejemplo:**

a) Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $A' \cap B = B$.

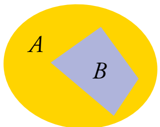
b) Si $A \cup B' = E$, entonces $P[B] = 0$.

c) Si A y B son incompatibles, entonces A' y B' son incompatibles.

a) Verdadero. Podemos comprobarlo en el siguiente diagrama:



b) Falso. Si B es un suceso no vacío contenido en A, se cumple la hipótesis y $P[B]$ no es 0.

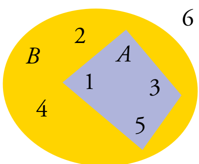


c) Falso. Usando el primer diagrama, en el que los sucesos son incompatibles, vemos que:

$A' \cap B' = (A \cup B)'$ puede ser no vacío.

34 **El siguiente enunciado es falso: "Si A' y B son compatibles, entonces A y B' son compatibles". Pon un ejemplo de un experimento y dos sucesos A y B de forma que A' y B sean compatibles, pero A y B' sean incompatibles.**

Consideramos el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado y los sucesos del siguiente diagrama:



$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Entonces: $A' = \{2, 4, 6\}$ $\quad B' = \{6\}$ $\quad A' \cap B = \{2, 4\}$ $\quad A \cap B' = \varnothing$

35 **Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es p, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razónalo.**

Si $P[A \cap B] = p$, entonces:

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - p$$

36 **Al tirar tres dados podemos obtener SUMA 9 de seis formas distintas:**

1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3

Y hay otras seis de obtener SUMA 10:

1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener SUMA 10 que SUMA 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir: $3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$

1, 4, 4; 2, 2, 5 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

18 + 6 + 1 = 25 formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 $\to$ $6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 $\to$ $3 \cdot 3 = 9$ formas

$18 + 9 = 27$ formas distintas de obtener suma 10

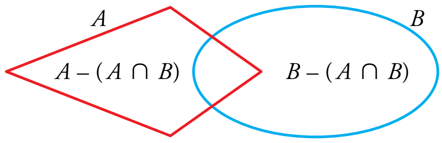
$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

37 **Demuestra la siguiente propiedad:**

$$\boldsymbol{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]}$$

descomponiendo $A \cup B$ en tres sucesos distintos.



$$P[A \cup B] = P[A - (A \cap B)] + P[A \cap B] + P[B - (A \cap B)] =$$
$$= P[A] - P[A \cap B] + P[A \cap B] + P[B] - P[A \cap B] =$$
$$= P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Página 269

Para profundizar

38 **Tenemos una urna con tres bolas blancas y tres negras. Tiramos un dado y extraemos de la urna tantas bolas como indica el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que sean todas blancas?**

P[TODAS LAS BOLAS SON BLANCAS] = P[1 Y UNA BLANCA] + P[2 Y DOS BLANCAS] + P[3 Y TRES BLANCAS] =

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

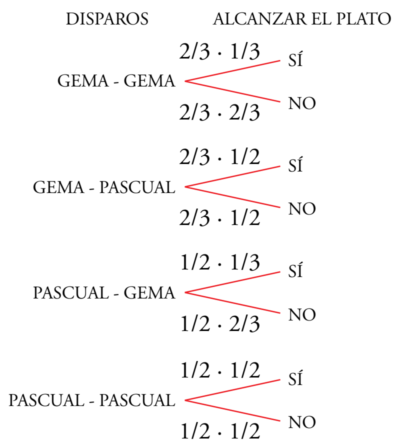
39 **Gema y Pascual juegan al tiro al plato. Gema acierta 1 de cada 3 disparos y Pascual, 1 de cada 2. Al lanzar un plato al aire, se oyen dos disparos consecutivos; que de forma equiprobable fueron hechos ambos por Gema, ambos por Pascual, o uno por cada uno. Observamos que el plato no ha sido alcanzado.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que haya sido Gema la que hizo los dos disparos? ¿Y de que fuera Pascual?

b) ¿Y de que haya hecho un disparo cada uno de los dos?

Puesto que se oyen dos disparos consecutivos, podemos suponer que el primer disparo no acierta en el plato. Hay 4 secuencias posibles de disparos y cada una tiene probabilidad $\frac{1}{4}$.

El siguiente diagrama en árbol recoge las probabilidades:



$$P[\text{NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{144}$$

a) $$P[\text{GEMA 2 DISPAROS/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{49}{144}}=\frac{16}{49}$$

$$P[\text{PASCUAL 2 DISPAROS/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{49}{144}}=\frac{9}{49}$$

b) $$P[\text{1 DISPARO CADA UNO/NO ALCANZAR EL PLATO}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{49}{144}}=\frac{24}{49}$$

40 **Una moneda se arroja repetidamente. Calcula la probabilidad de que salga dos veces consecutivas el mismo lado si el experimento consta:**

a) Exactamente de 4 lanzamientos.

b) Exactamente de n lanzamientos, $n \ge 2$.

c) Como máximo, de 10 lanzamientos.

a) Consta de cuatro lanzamientos si ocure:

C + C C o bien + C + +

Por tanto:

$$P[\text{cuatro lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

b) $P[n \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $P[\text{10 o menos lanzamientos}] = P[\text{2 lanzamientos}] + P[\text{3 lanzamientos}] +$

$+\, P[\text{4 lanzamientos}] + \ldots + P[\text{10 lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^9$

Nos queda la suma de 9 términos de una progresión geométrica con:

$a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$

Por tanto:

$$P[\text{10 o menos lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^9=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^9=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}=0{,}998$$

41 **De una urna en la que hay 2 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras, se extraen 3 bolas simultáneamente. Halla la probabilidad de que dos de ellas (y solo dos) sean del mismo color.**

Calculamos:

$$P[\text{2 blancas y 1 de otro color}] = 3\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{36}$$

teniendo en cuenta que la bola de otro color puede salir en primer, segundo o tercer lugar.

$$P[\text{2 rojas y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{14}$$

$$P[\text{2 negras y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{42}$$

Por tanto:

$$P[\text{SOLO 2 BOLAS DEL MISMO COLOR}] = \frac{1}{36} + \frac{1}{14} + \frac{5}{42} = \frac{55}{252}$$

42 **Lanzamos 3 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor intermedio sea 5? ¿Y 2? ¿Y 1?**

* ***Ten en cuenta que, por ejemplo, el valor intermedio del resultado 5-1-4 es 4; el de 2-1-2 es 2 y el de 4-4-4 es 4.***

Para que el valor intermedio sea 5, los resultados pueden ser:

- (5, 5, 5)
- Desde (5, 5, 1) hasta (5, 5, 4), (5, 5, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (c, 5, 6) y sus reordenaciones, donde c puede ser 1, 2, 3, 4: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO 5}] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 2, los resultados pueden ser:

- (2, 2, 2)
- (2, 2, 1), desde (2, 2, 3) hasta (2, 2, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (1, 2, c) y sus reordenaciones, donde c puede ser 3, 4, 5, 6: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO 2}] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 1, los resultados pueden ser:

- (1, 1, 1)
- Desde (1, 1, 2) hasta (1, 1, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO 1}] = \frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$$

Autoevaluación

Página 269

1 En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A = "Sacar al menos una cara y una cruz"

B = "Sacar a lo sumo una cara"

a) Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

a) E = {(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

A = {(C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

B = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

b) $A \cap B$ = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

$$P[A] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[A \cap B] = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P[A] \cdot P[B],$$ luego son independientes.

2 Dados dos sucesos R y S de un mismo experimento aleatorio tales que:

$$P[R] = 0{,}27 \qquad P[S'] = 0{,}82 \qquad P[R \cup S] = 0{,}4$$

Calcula las siguientes probabilidades:

$$P[S],\ P[R \cap S],\ P[(R \cup S)'] \text{ y } P[R' \cup S']$$

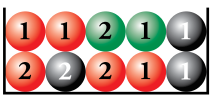
$P[S] = 1 - P[S'] = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

$P[R \cap S] = P[R] + P[S] - P[R \cup S] = 0{,}27 + 0{,}18 - 0{,}4 = 0{,}05$

$P[(R \cup S)'] = 1 - P[R \cup S] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[R' \cup S'] = P[(R \cap S)'] = 1 - P[R \cap S] = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

3 Dadas esta urna y la siguiente tabla, copia en tu cuaderno y completa la tabla:



	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1				
2				
TOTAL				

Calcula:

a) P[🔴], P[🟢], P[⚫], P[1], P[2]

b) P[🔴 ∩ 1], P[🔴/1], P[1/🔴]. Explica el significado de estas probabilidades.

c) P[🟢/1], P[⚫/1]

d) El suceso "1" es independiente con uno de los sucesos 🔴, 🟢 o ⚫. ¿Con cuál? Explica por qué.

	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1	3	1	2	6
2	2	1	1	4
TOTAL	5	2	3	10

a) P[🔴] $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, P[🟢] $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, P[⚫] $= \frac{3}{10}$, $P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) • *P*[🔴 ∩ 1] = $\frac{3}{10}$. Significa *P*[bola roja con el número 1].

• *P*[🔴/1] = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sabemos que la bola tiene un 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

• *P*[1/🔴] = $\frac{3}{5}$. Sabemos que la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un 1?

c) *P*[🟢/1] = $\frac{1}{6}$, *P*[⚫/1] = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) El suceso “1” es independiente respecto a 🔴 porque *P*[🔴/1] = *P*[🔴] = $\frac{1}{2}$.

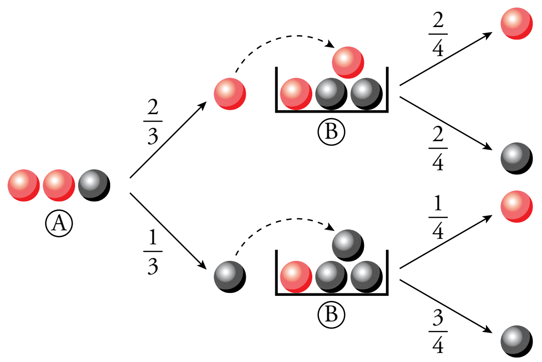
No es independiente respecto a 🟢 porque *P*[🟢/1) ≠ *P*[🟢], ni es independiente respecto a ⚫ porque *P*[⚫/1) ≠ *P*[⚫].

4 **Extraemos al azar una bola de la urna A y la metemos en B. Removemos y volvemos a extraer al azar una bola, pero esta vez de la urna B. Calcula las siguientes probabilidades:**

a) *P*[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴], *P*[2.ª 🔴/1.ª 🔴]

b) *P*[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴], *P*[2.ª 🔴/1.ª ⚫], *P*[2.ª 🔴]

c) *P*[2.ª ⚫], *P*[1.ª ⚫/2.ª 🔴]



P[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª 🔴 y 2.ª ⚫] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª ⚫] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$

a) *P*[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

P[2.ª 🔴/1.ª 🔴] = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) *P*[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

P[2.ª 🔴/1.ª ⚫] = $\frac{1}{4}$

P[2.ª 🔴] = *P*[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴] + *P*[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴] = $\frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

c) *P*[2.ª ⚫] = *P*[1.ª 🔴 y 2.ª ⚫] + *P*[1.ª ⚫ y 2.ª ⚫] = $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

P[1.ª ⚫/2.ª 🔴] = $\dfrac{P[1.ª ⚫ \text{ y } 2.ª 🔴]}{P[2.ª 🔴]}$ = $\frac{1/12}{5/12} = \frac{1}{5}$

5 **Un grupo de 15 personas van a ver una película, 9 de las cuales quieren ver una de miedo, y 10, una de acción. Hay tres parejas que no soportan las películas de miedo; entre ellas, Marcos y Lidia, que tampoco les gustan las de acción. Al final han comprado entradas para la de acción.**

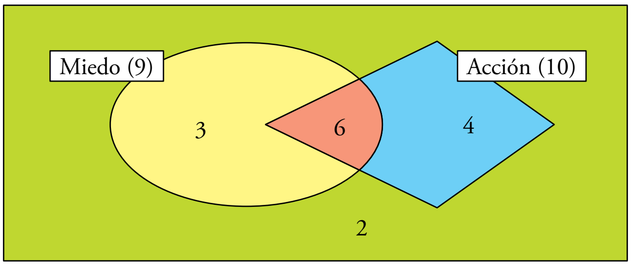
a) Si se pregunta a uno del grupo al azar, ¿qué probabilidad hay de que le haya gustado la elección?

b) Y si le ha gustado, ¿qué probabilidad hay de que no le hubiera importado ir a la de miedo?

c) Si se pregunta a uno de los que les gustan las películas de miedo, ¿qué probabilidad hay de que esté conforme con la elección?

Como hay 2 personas que no soportan ni un tipo ni otro de películas, en total son 13 las personas que quieren ver películas de miedo o de acción. Por tanto, hay 6 personas a las que les gustan ambos tipos de películas.

Teniendo en cuenta el resto de los datos, tenemos:

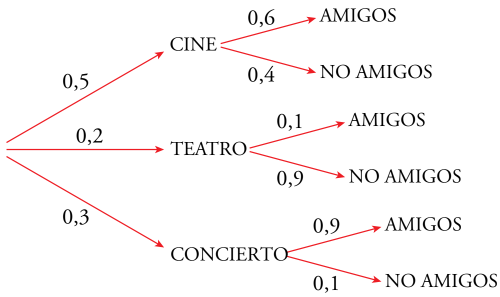


a) $P[\text{ACCIÓN}] = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ b) $P[\text{MIEDO/ACCIÓN}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ c) $P[\text{ACCIÓN/MIEDO}] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

6 **Berta ha ido al cine, al teatro o de concierto con probabilidades 0,5; 0,2 y 0,3, respectivamente. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de marcha con ellos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que se quede de marcha?

b) Si después del espectáculo ha vuelto a casa, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al teatro?



$P[\text{CINE y AM}] = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}30$

$P[\text{CINE y no AM}] = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}20$

$P[\text{TEATRO y AM}] = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

$P[\text{TEATRO y no AM}] = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$

$P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$

$P[\text{CONCIERTO y no AM}] = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

a) $P[\text{AM}] = P[\text{CINE y AM}] + P[\text{TEATRO y AM}] + P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0{,}30 + 0{,}02 + 0{,}27 = 0{,}59$

b) $P[\text{TEATRO/no AM}] = \dfrac{P[\text{TEATRO y no AM}]}{P[\text{no AM}]}$. Calculemos:

$P[\text{TEATRO/no AM}] = 0{,}18$

$P[\text{no AM}] = 1 - P[\text{AM}] = 1 - 0{,}59 = 0{,}41$

(También se podría haber calculado sumando $P[\text{CINE y no AM}] + P[\text{TEATRO y no AM}] + P[\text{CONCIERTO y no AM}]$).

$P[\text{TEATRO/no AM}] = \dfrac{0{,}18}{0{,}41} \approx 0{,}44$

Esto significa, dicho de forma ingenua, que de cada 100 veces que vuelva a casa pronto, en 44 de ellas ha ido al TEATRO.

Autoevaluación

Página 241

1 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\displaystyle\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1-x^3}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3-5x}{2}\right)^2 dx$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+1}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{x-1}\, dx$

a) $\displaystyle\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{3}\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{2}x + k = \frac{7}{9}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + k$

b) $\displaystyle\int \frac{1-x^3}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^2\, dx = ln\,|x| - \frac{x^3}{3} + k$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3-5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\int -\frac{5}{2}\left(\frac{3-5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3-5x}{2}\right)^3 + k = \frac{-2}{15}\left(\frac{3-5x}{2}\right)^3 + k$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx = \int 2x^{-2}\, dx + \int \sqrt{2}\, x^{1/2} = 2\frac{x^{-1}}{-1} + \sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = -\frac{2}{x} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + k$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+1)^3} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{x-1}\, dx$

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ \hline
 & -x^2 + \;\; x & x + 4 \\ \hline
 & 4x - 2 & \\
 & -4x + 4 & \\ \hline
 & 2 &
\end{array}$$

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{x^2+3x-2}{x-1} = x + 4 + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x-1}\, dx = \int \left(x + 4 + \frac{2}{x-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln\,|x-1| + k$$

2 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x+2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x-1}\, dx$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x+2}\, dx = \Big[2ln\,|x+2|\Big]_{-1}^{3} = 2\,[ln\,5 - ln\,1] = 2ln\,5$

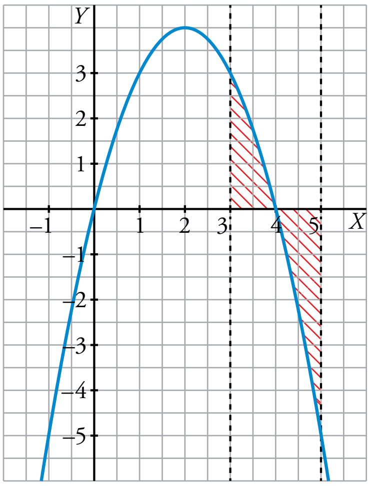
b) $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x-1}\, dx = \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2} 3e^{3x-1} = \frac{1}{3}\Big[e^{3x-1}\Big]_{1/3}^{2} = \frac{1}{3}(e^5 - e^0) = \frac{e^5-1}{3}$

3 **Representa el recinto limitado por $f(x) = 4x - x^2$, el eje X y las rectas $x = 3$ y $x = 5$. Después, calcula su área.**

Representamos la parábola teniendo en cuenta sus puntos notables.

Cortes con los ejes: (0, 0) y (4, 0)

Vértice: (2, 4)



Primitiva de la función:

$$G(x) = \int (4x - x^2)\, dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$G(3) = 9; \quad G(4) = \frac{32}{3}; \quad G(5) = \frac{25}{3}$$

Por tanto:

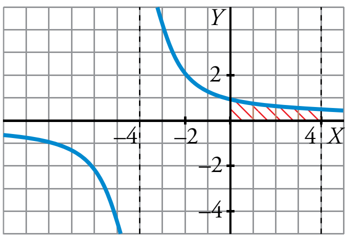
$$\int_3^4 (4x - x^2)\, dx = G(4) - G(3) = \frac{32}{3} - 9 = \frac{5}{3}$$

$$\int_4^5 (4x - x^2)\, dx = G(5) - G(4) = \frac{25}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{7}{3}$$

Área total $= \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4\ u^2$

4 **La curva $y = \frac{4}{x+4}$, el eje X, el eje Y y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Represéntala y calcula su área.**

Representamos $y = \frac{4}{x+4}$. Sus asíntotas son $x = -4$ e $y = 0$.



$$\text{Área} = \int_0^4 \frac{4}{x+4}\, dx = 4\Big[\ln|x+4|\Big]_0^4 = 4(\ln 8 - \ln 4) = 4\ln\frac{8}{4} = 4\ln 2 \approx 2{,}77\ u^2$$

5 El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión $c(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo t el tiempo en horas, $0 \le t \le 6$.

¿Cuánto consume el motor durante las 6 horas que dura dicho trabajo?

El consumo equivale al área encerrada por la función $c(t)$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 6$.

$$c = \int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\, dx = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{8t^2}{2} + 20t\right]_0^6 = -\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 192$$

6 Para cerrar una vidriera, se ha de colocar un cristal cuya superficie está limitada por las funciones $y = 2$ e $y = -(x-2)^2 + 6$.

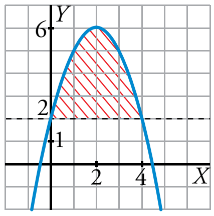
Dibuja el cristal y calcula su área (x e y en dm).

$y = -(x-2)^2 + 6$ es una parábola de vértice (2, 6).

Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 2$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \begin{cases} x = -0,45 \\ x = 4,45 \end{cases}$



Puntos de corte de la curva con $y = 2$:

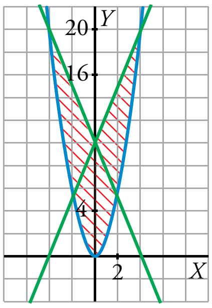
$2 = -(x-2)^2 + 6 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0, \ y = 2 \\ x = 4, \ y = 2 \end{cases}$

Área del cristal $= \displaystyle\int_0^4 [-(x-2)^2 + 6 - 2]\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$ dm²

7 Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones siguientes y calcula su área:

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \qquad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

Representamos la parábola $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $h(x)$.



- Cortes de $f(x)$ y $g(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x + 20) \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2, \ y = 5 \\ x = 4, \ y = 20 \end{cases}$

- Cortes de $f(x)$ y $h(x)$:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x + 20) \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -4, \ y = 20 \\ x = 2, \ y = 5 \end{cases}$

Área $= 2\left[\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}(5x + 20) - \frac{5}{4}x^2\right] dx = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} + 20x\right) - \frac{5}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\left(60 - \frac{80}{3}\right) = \frac{200}{3}$ u²

Autoevaluación

Página 269

1 En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A = "Sacar al menos una cara y una cruz"

B = "Sacar a lo sumo una cara"

a) Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

a) E = {(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

A = {(C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

B = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

b) $A \cap B$ = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

$$P[A] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[A \cap B] = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P[A] \cdot P[B],$$ luego son independientes.

2 Dados dos sucesos R y S de un mismo experimento aleatorio tales que:

$$P[R] = 0{,}27 \qquad P[S'] = 0{,}82 \qquad P[R \cup S] = 0{,}4$$

Calcula las siguientes probabilidades:

$$P[S],\ P[R \cap S],\ P[(R \cup S)'] \text{ y } P[R' \cup S']$$

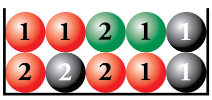
$P[S] = 1 - P[S'] = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

$P[R \cap S] = P[R] + P[S] - P[R \cup S] = 0{,}27 + 0{,}18 - 0{,}4 = 0{,}05$

$P[(R \cup S)'] = 1 - P[R \cup S] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[R' \cup S'] = P[(R \cap S)'] = 1 - P[R \cap S] = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

3 Dadas esta urna y la siguiente tabla, copia en tu cuaderno y completa la tabla:



	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1				
2				
TOTAL				

Calcula:

a) P[🔴], P[🟢], P[⚫], $P[1]$, $P[2]$

b) P[🔴 $\cap$ 1], P[🔴/1], P[1/🔴]. Explica el significado de estas probabilidades.

c) P[🟢/1], P[⚫/1]

d) El suceso "1" es independiente con uno de los sucesos 🔴, 🟢 o ⚫. ¿Con cuál? Explica por qué.

	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1	3	1	2	6
2	2	1	1	4
TOTAL	5	2	3	10

a) P[🔴] $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, P[🟢] $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, P[⚫] $= \frac{3}{10}$, $P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) • P[🔴 ∩ 1] = $\frac{3}{10}$. Significa P[bola roja con el número 1].

• P[🔴/1] = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sabemos que la bola tiene un 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

• P[1/🔴] = $\frac{3}{5}$. Sabemos que la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un 1?

c) P[🟢/1] = $\frac{1}{6}$, P[⚫/1] = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) El suceso "1" es independiente respecto a 🔴 porque P[🔴/1] = P[🔴] = $\frac{1}{2}$.

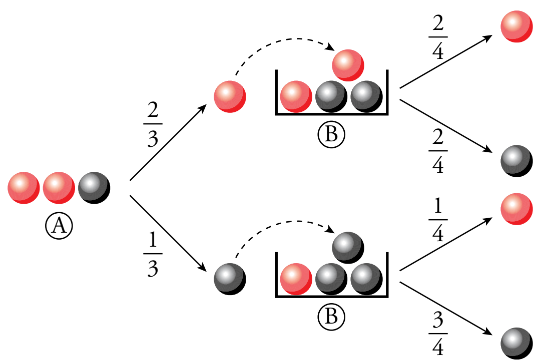
No es independiente respecto a 🟢 porque P[🟢/1) ≠ P[🟢], ni es independiente respecto a ⚫ porque P[⚫/1) ≠ P[⚫].

4 **Extraemos al azar una bola de la urna A y la metemos en B. Removemos y volvemos a extraer al azar una bola, pero esta vez de la urna B. Calcula las siguientes probabilidades:**

a) *P*[1.ª🔴 y 2.ª🔴], *P*[2.ª🔴/1.ª🔴]

b) *P*[1.ª⚫ y 2.ª🔴], *P*[2.ª🔴/1.ª⚫], *P*[2.ª 🔴]

c) *P*[2.ª ⚫], *P*[1.ª⚫/2.ª🔴]



P[1.ª 🔴 y 2.ª 🔴] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª 🔴 y 2.ª ⚫] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª 🔴] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

P[1.ª ⚫ y 2.ª ⚫] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$

a) P[1.ª🔴 y 2.ª🔴] = $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

P[2.ª🔴/1.ª🔴] = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) P[1.ª⚫ y 2.ª🔴] = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

P[2.ª🔴/1.ª⚫] = $\frac{1}{4}$

P[2.ª 🔴] = P[1.ª🔴 y 2.ª🔴] + P[1.ª⚫ y 2.ª🔴] = $\frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

c) P[2.ª ⚫] = P[1.ª🔴 y 2.ª⚫] + P[1.ª⚫ y 2.ª⚫] = $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

P[1.ª⚫/2.ª🔴] = $\dfrac{P[1.ª⚫ \text{ y } 2.ª🔴]}{P[2.ª 🔴]} = \dfrac{1/12}{5/12} = \dfrac{1}{5}$

5 Un grupo de 15 personas van a ver una película, 9 de las cuales quieren ver una de miedo, y 10, una de acción. Hay tres parejas que no soportan las películas de miedo; entre ellas, Marcos y Lidia, que tampoco les gustan las de acción. Al final han comprado entradas para la de acción.

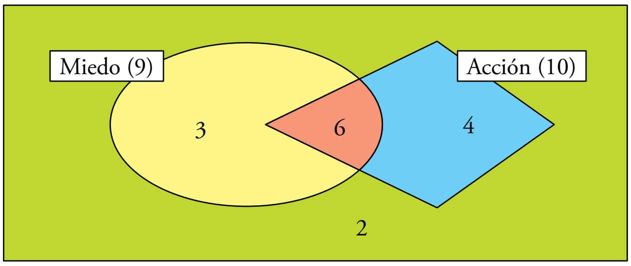
a) Si se pregunta a uno del grupo al azar, ¿qué probabilidad hay de que le haya gustado la elección?

b) Y si le ha gustado, ¿qué probabilidad hay de que no le hubiera importado ir a la de miedo?

c) Si se pregunta a uno de los que les gustan las películas de miedo, ¿qué probabilidad hay de que esté conforme con la elección?

Como hay 2 personas que no soportan ni un tipo ni otro de películas, en total son 13 las personas que quieren ver películas de miedo o de acción. Por tanto, hay 6 personas a las que les gustan ambos tipos de películas.

Teniendo en cuenta el resto de los datos, tenemos:

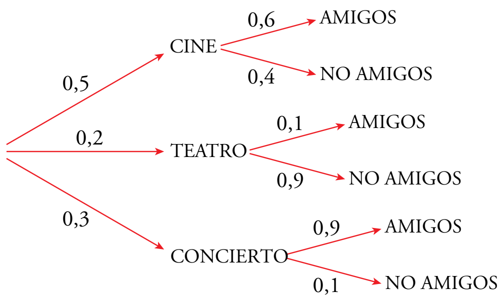


a) $P[\text{ACCIÓN}] = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ b) $P[\text{MIEDO/ACCIÓN}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ c) $P[\text{ACCIÓN/MIEDO}] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

6 Berta ha ido al cine, al teatro o de concierto con probabilidades 0,5; 0,2 y 0,3, respectivamente. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de marcha con ellos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se quede de marcha?

b) Si después del espectáculo ha vuelto a casa, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al teatro?



$P[\text{CINE y AM}] = 0,5 \cdot 0,6 = 0,30$

$P[\text{CINE y no AM}] = 0,5 \cdot 0,4 = 0,20$

$P[\text{TEATRO y AM}] = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$

$P[\text{TEATRO y no AM}] = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18$

$P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27$

$P[\text{CONCIERTO y no AM}] = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$

a) $P[\text{AM}] = P[\text{CINE y AM}] + P[\text{TEATRO y AM}] + P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0,30 + 0,02 + 0,27 = 0,59$

b) $P[\text{TEATRO/no AM}] = \frac{P[\text{TEATRO y no AM}]}{P[\text{no AM}]}$. Calculemos:

$P[\text{TEATRO/no AM}] = 0,18$

$P[\text{no AM}] = 1 - P[\text{AM}] = 1 - 0,59 = 0,41$

(También se podría haber calculado sumando $P[\text{CINE y no AM}] + P[\text{TEATRO y no AM}] + P[\text{CONCIERTO y no AM}]$).

$P[\text{TEATRO/no AM}] = \frac{0,18}{0,41} \approx 0,44$

Esto significa, dicho de forma ingenua, que de cada 100 veces que vuelva a casa pronto, en 44 de ellas ha ido al TEATRO.