4 PROGRAMACIÓN LINEAL

Página 99

REFLEXIONA Y RESUELVE

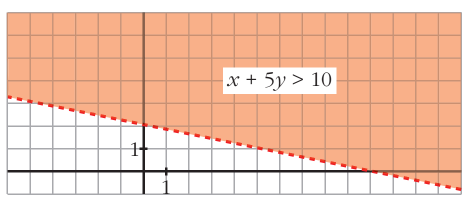
Resolución de inecuaciones lineales

■ **Para representar $y - x \leq 2$, representa la recta $y - x = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.**

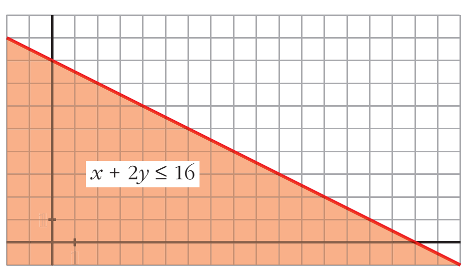
■ **Representa, de forma análoga, las siguientes inecuaciones:**

a) $x + 5y > 10$ **b)** $x + 2y \leq 16$ **c)** $2x + y \leq 20$

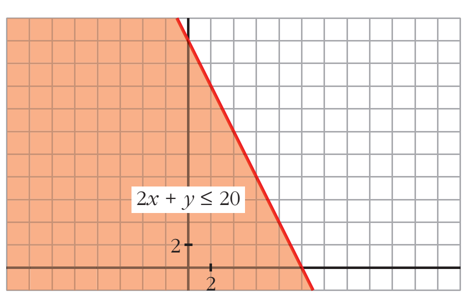
a)



b)



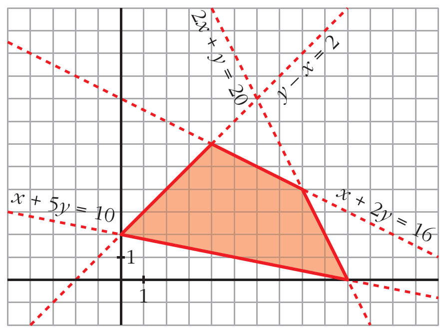
c)



Resolución de sistemas de inecuaciones

■ **Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:**

$$\begin{cases} y - x \leq 2 \\ x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$$



Inecuaciones en el mercado de frutas

Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. Dispone de 2 000 € y en su furgoneta caben 1 400 kg.

En el mercado disponen de naranjas de tipo A a 1,10 € y de tipo B a 1,60 €. Él las podrá vender a 1,20 € las de tipo A y a 1,75 € las de tipo B, y se cuestiona cuántos kilogramos de cada tipo debería comprar para conseguir que los beneficios sean lo más altos posible.

a) Si se gasta todo el dinero en naranjas de tipo B, ¿cuántos kilos le caben aún en su furgoneta?

b) Si llena la furgoneta con naranjas de tipo A, ¿cuánto dinero le sobra? ¿Cuál será el beneficio?

c) ¿Cuál será el beneficio si compra 400 kg de naranjas de tipo A y 300 kg de tipo B?

a) Puede comprar 2 000 : 1,60 = 1 250 kg de naranjas de tipo B.

En la furgoneta le caben aún 1 400 – 1 250 = 150 kg.

b) Se gasta 1 400 · 1,10 = 1 540 €.

Le sobran 2 000 – 1 540 = 460 €.

Beneficio = 1 400 · (1,20 – 1,10) = 140 €

c) Beneficio = 400 · (1,20 – 1,10) + 300 · (1,75 – 1,60) = 85 €

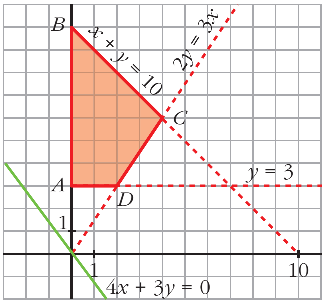
Página 108

1. Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\boldsymbol{x \ge 0, \quad y \ge 3, \quad x + y \le 10, \quad 2y \ge 3x}$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} A(0, 3)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} B(0, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2y = 3x \end{array}\right\} C(4, 6)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 2y = 3x \\ y = 3 \end{array}\right\} D(2, 3)$

$F(A) = F(0, 3) = 9$ $\qquad$ $F(B) = F(0, 10) = 30$

$F(C) = F(4, 6) = 34$ $\qquad$ $F(D) = F(2, 3) = 17$

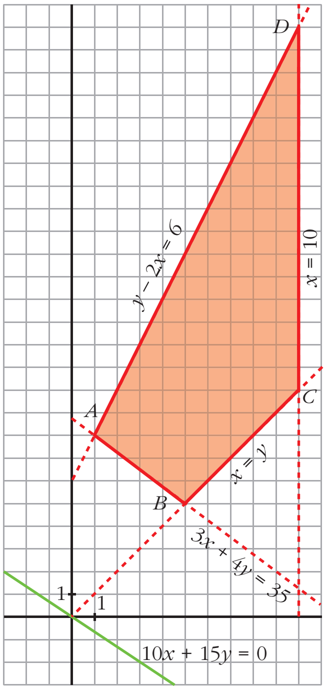
$F(x, y) = 4x + 3y$ se hace mínima en $A(0, 3)$ y máxima en $C(4, 6)$.

2. Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$$\boldsymbol{x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x \le 10, \quad x \le y, \quad y - 2x \le 6, \quad 3x + 4y \ge 35}$$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$\left.\begin{array}{l} y - 2x = 6 \\ 3x + 4y = 35 \end{array}\right\} A(1, 8)$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 35 \\ x = y \end{array}\right\} B(5, 5)$

$\left.\begin{array}{l} x = y \\ x = 10 \end{array}\right\} C(10, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y - 2x = 6 \end{array}\right\} D(10, 26)$

$F(A) = F(1, 8) = 130$ $\qquad$ $F(B) = F(5, 5) = 125$

$F(C) = F(10, 10) = 250$ $\qquad$ $F(D) = F(10, 26) = 490$

Representamos después la dirección de las rectas que son de la forma $10x + 15y = K$.

$F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo en el punto $D(10, 26)$.

3. **En una confitería se elaboran tartas de NATA y de MANZANA. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos.**

¿Cuántas tartas de cada tipo se deben hacer si pretendemos que los ingresos por su venta sean máximos?

Considera estos casos:

a) Sus precios son: nata, 12 €; manzana, 15 €.

b) Sus precios son: nata, 16 €; manzana, 12 €.

c) Sus precios son: nata, 15 €; manzana, 10 €.

Anotamos los datos en una tabla:

	CANTIDAD (kg)	HUEVOS	AZÚCAR
NATA	x	$8x$	$(1/2)x$
MANZANA	y	$6y$	$1y$

Restricciones del problema:

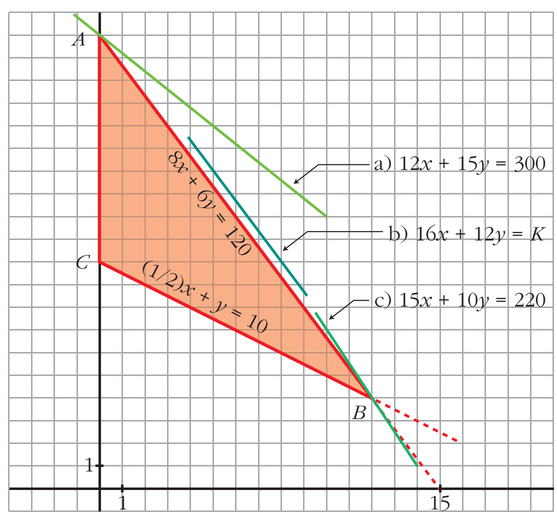
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ (1/2)x + y \leq 10 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x + 6y = 120 \end{array}\right\} A(0, 20)$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 120 \\ (1/2)x + y = 10 \end{array}\right\} B(12, 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1/2)x + y = 10 \\ x = 0 \end{array}\right\} C(0, 10)$$



a) Función objetivo: $F_1(x, y) = 12x + 15y$. Dibujamos la dirección de $12x + 15y = K$ trazando $12x + 15y = 300$. $F_1(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $A(0, 20)$. Es decir, hay que hacer 20 tartas de manzana y ninguna de nata.

b) Función objetivo: $F_2(x, y) = 16x + 12y$. Dibujamos la dirección de $16x + 12y = K$. El máximo para $F_2(x, y)$ se consigue en cualquier punto, de coordenadas enteras, del lado que pasa por los puntos $A(0, 20)$ y $B(12, 4)$. Además de estas dos, las soluciones son (3, 16), (6, 12) y (9, 8) (la primera coordenada indica las tartas de nata que habría que hacer y la segunda, las tartas de manzana).

c) Función objetivo: $F_3(x, y) = 15x + 10y$. Dibujamos la dirección de $15x + 10y = K$ trazando la recta $15x + 10y = 220$. El máximo de $F_3(x, y)$ está en $B(12, 4)$: 12 tartas de nata y 4 de manzana.

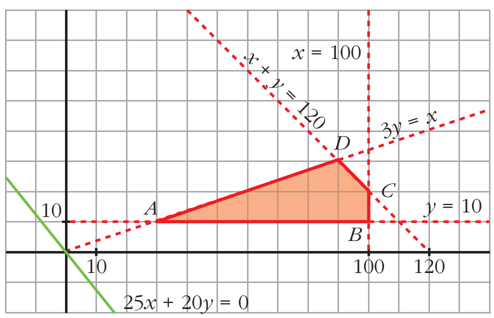
Página 114

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

s1 **Maximiza la función $F(x, y) = 25x + 20y$ sometida a las siguientes restricciones: $x + y \le 120$; $3y \le x$; $x \le 100$; $y \ge 10$.**

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de corte:



$$\left.\begin{array}{l} 3y = x \\ y = 10 \end{array}\right\} A(30, 10)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 10 \\ x = 100 \end{array}\right\} B(100, 10)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 100 \\ x + y = 120 \end{array}\right\} C(100, 20)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ 3y = x \end{array}\right\} D(90, 30)$$

$F(A) = F(30, 10) = 950$ $\quad$ $F(B) = F(100, 10) = 2\,700$

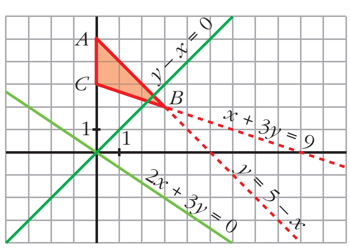
$F(C) = F(100, 20) = 2\,900$ $\quad$ $F(D) = F(90, 30) = 2\,850$

El máximo se alcanza en $C(100, 20)$ y vale $2\,900$.

s2 **a) Maximiza y minimiza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones: $x + y \le 5$; $x + 3y \ge 9$; $x \ge 0$, $y \ge 0$.**

b) Haz lo mismo con la función $G(x, y) = y - x$.

Representamos las rectas y la región que cumple las condiciones del problema:



$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 5 - x \end{array}\right\} A(0, 5) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 5 - x \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\} B(3, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ x = 0 \end{array}\right\} C(0, 3)$$

a) Dibujamos $2x + 3y = 0$ para ver la dirección de las rectas $2x + 3y = K$.

$F(A) = F(0, 5) = 15$; $F(B) = F(3, 2) = 12$; $F(C) = F(0, 3) = 9$.

El máximo de $F(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $C(0, 3)$.

b) Dibujamos $y - x = 0$ para ver la dirección de las rectas $y - x = K$.

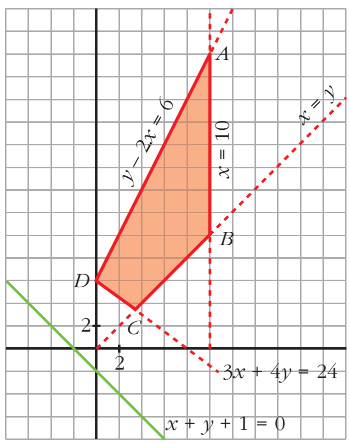
$G(A) = G(0, 5) = 5$; $G(B) = G(3, 2) = -1$; $G(C) = G(0, 3) = 3$.

El máximo de $G(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$ y el mínimo, en $B(3, 2)$.

s3 **Maximiza la función $z = x + y + 1$ sujeta a las siguientes restricciones:**

$$\begin{cases} 0 \le y \\ 0 \le x \le 10 \\ x \le y \\ y - 2x \le 6 \\ 3x + 4y \ge 24 \end{cases}$$

Representamos las rectas y la dirección de $x + y + 1 = K$. Obtenemos la región que cumple las condiciones del problema:



$\left.\begin{array}{l} y - 2x = 6 \\ x = 10 \end{array}\right\}\ A(10, 26)$

$\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ x = y \end{array}\right\}\ B(10, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x = y \\ 3x + 4y = 24 \end{array}\right\}\ C\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{24}{7}\right)$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 24 \\ y - 2x = 6 \end{array}\right\}\ D(0, 6)$

$z = F(x, y) = x + y + 1$

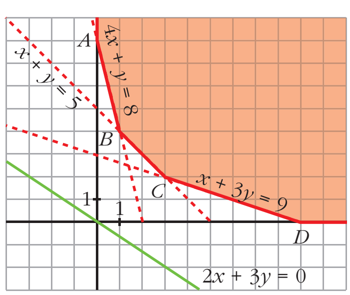
$F(A) = F(10, 26) = 37;\ \ F(B) = F(10, 10) = 21$

$F(C) = F\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{24}{7}\right) = \dfrac{55}{7};\ \ F(D) = F(0, 6) = 7$

El máximo se alcanza en el punto $A(10, 26)$ y vale 37.

s4 **En la región determinada por $x + y \ge 5$, $x + 3y \ge 9$, $4x + y \ge 8$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?**

Representamos las rectas, la dirección de $2x + 3y = K$ y la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \ge 0$ e $y \ge 0$.



$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\}\ A(0, 8)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}\ B(1, 4)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\}\ C(3, 2)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ y = 0 \end{array}\right\}\ D(9, 0)$

El mínimo de $F(x, y)$ se encuenta en uno de los vértices de la región factible:

$F(A) = F(0, 8) = 24 \qquad F(B) = F(1, 4) = 14$

$F(C) = F(3, 2) = 12 \qquad F(D) = F(9, 0) = 18$

El mínimo se alcanza en el punto $C(3, 2)$ y vale 12.

No tiene máximo, pues hay puntos en la región en los que $F(x, y)$ toma valores tan grandes como queramos.

5 **Calcula los puntos del recinto** $\begin{cases} \mathbf{2x + y \geq 20} \\ \mathbf{2x - y \leq 20} \\ \mathbf{0 \leq y \leq 20} \end{cases}$ **que hacen mínima o máxima la función** $\boldsymbol{z = 2x + y}$**. ¿Cuántas soluciones hay?**

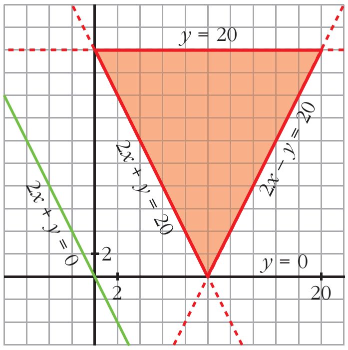
Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.

Representamos la dirección de las rectas $2x + y = K$ dibujando $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto.

Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $2x + y = 20$, con $0 \leq x \leq 10$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 20 \\ y = 20 \end{array}\right\} \text{ Punto } (20, 20)$$

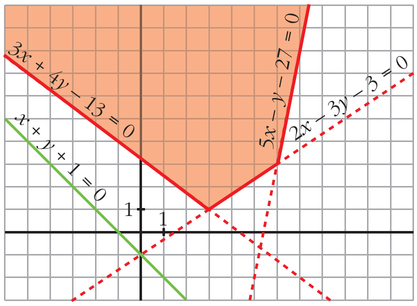


6 **¿Es posible maximizar y minimizar la función** $\boldsymbol{z = x + y + 1}$ **sujeta a estas restricciones?**

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y - 13 \geq 0} \\ \mathbf{2x - 3y - 3 \leq 0} \\ \mathbf{5x - y - 27 \leq 0} \end{cases}$$

Para obtener el recinto que cumple las restricciones del problema, representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{cases}$$



Para ver la dirección de $z = x + y + 1$, representamos la recta $x + y + 1 = 0$.

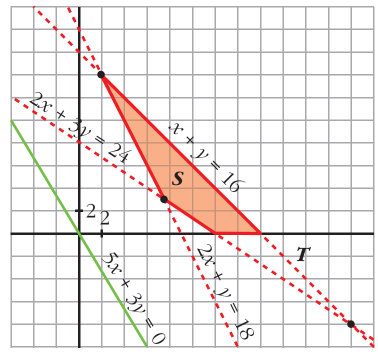
No existe máximo ni mínimo.

7 **Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S. Expresa el recinto mediante un sistema de inecuaciones.**

Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 24 \\ x + y = 16 \end{cases}$

para obtener el triángulo T y la región que hemos sombreado, S.

Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y = K$ dibujando $5x + 3y = 0$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X; es decir, en el punto (16, 0). El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$.

El sistema de inecuaciones que representa el recinto es:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + y \geq 18 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

8 **Dibuja el recinto determinado por: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x + 1 \geq 0$, $y - 4 \leq 0$, $y + 2x - 5 \leq 0$.**

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.

b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función $G(x, y) = 5x + y$.

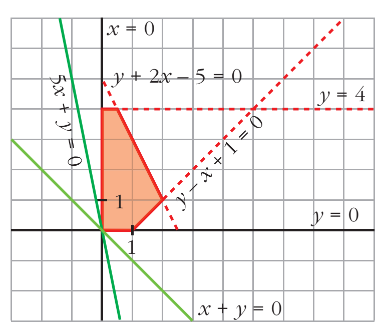
Representamos las rectas:

$$\begin{cases} x = 0, \quad y = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.

Representamos la dirección de las rectas $x + y = K$ dibujando la recta $x + y = 0$.

Representamos la dirección de las rectas $5x + y = K$ dibujando la recta $5x + y = 0$.



a) $F(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y \qquad\quad\; = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 4 \end{array}\right\} \text{Punto } \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$F(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto $(0, 0)$.

b) $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y - \;\; x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \text{Punto } (2, 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 11$

$G(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto $(0, 0)$ y vale $G(0, 0) = 0$.

s9 Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente:

a) El punto del triángulo donde la función $F(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $F(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

a) $F(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} F(0, 0) = 9 \\ F(2, 8) = 9 \\ F(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices $(0, 0)$ y $(2, 8)$.

b) $F(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} F(0, 0) = 12 \\ F(2, 8) = 28 \\ F(10, 3) = 55 \end{array}\right\}$$

La función alcanza el máximo en el punto $(10, 3)$.

PARA RESOLVER

10 Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal.

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B.

¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

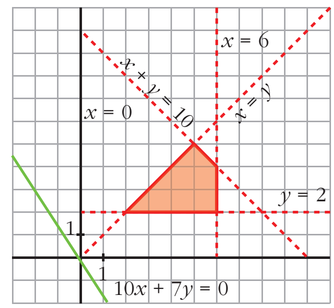
Llamamos x al dinero invertido en acciones de tipo A e y al dinero invertido en acciones de tipo B (x e y en decenas de miles de euros).

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 0 \le x \le 6 \\ y \ge 2 \\ x \ge y \end{cases}$$

La función $F(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$ da el beneficio anual y hemos de maximizarla, sujeta a las restricciones señaladas.

Representamos el recinto de restricciones y la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 10x + 7y = 0$, que da la dirección de las rectas $0{,}1x + 0{,}07y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x = 6 \end{array}\right\} \text{ Punto } (6, 4)$$

Por tanto, debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.

11 **Un sastre tiene 80 m² de tela de algodón y 120 m² de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m² de algodón y 3 m² de lana y un vestido de señora necesita 2 m² de cada una de las telas. Halla el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.**

Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumimos la información en la tabla de la derecha.

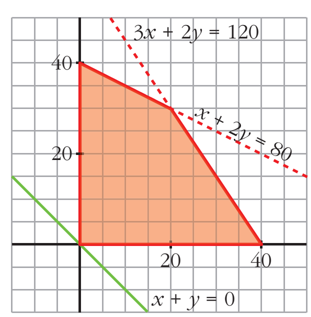
	N.º	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	x	$3x$
VESTIDO	y	$2y$	$2y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + 2y \le 80 \\ 3x + 2y \le 120 \end{cases}$$

Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $F(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $k(x + y) = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \text{ Punto } (20, 30)$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

Página 115

12 **Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas —de cortar, coser y teñir— se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas, y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora; la de coser, una hora, y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, once horas y la de cortar, siete horas.**

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

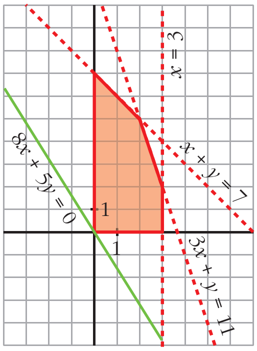
Llamamos x al n.º de chaquetas e y al n.º de pantalones.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x, \ y \ \text{enteros} \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 11 \end{cases}$$

$F(x, y) = 8x + 5y$ es la función que nos da el beneficio. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas que son de la forma $8x + 5y = K$.



El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.

s13 **Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso, P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los que aparecen en la tabla:**

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

El kilogramo de pienso P_1 vale 0,4 € y el del P_2 vale 0,6 €. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para suministrar a las reses las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

Si llamamos x a los kilos de pienso P_1 e y a los kilos de pienso P_2, las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \quad \to \quad x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \quad \to \quad 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

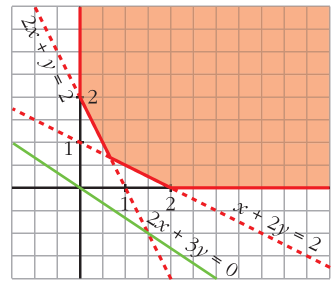
La función que nos da el coste es $F(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$.

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $0{,}4x + 0{,}6y = 0 \;\rightarrow\; 2x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $0{,}4x + 0{,}6y = K$.

El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2.

s14 Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos.

Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.

El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico.

¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

Llamamos x al número de electricistas e y al de mecánicos.

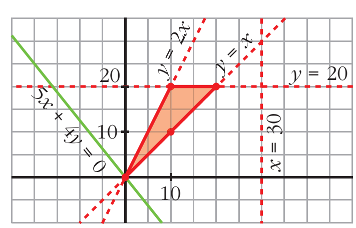
Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \;\; y \geq 0 \\ x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, y \;\; \text{enteros} \end{cases}$$

La función que nos da el beneficio es $F(x, y) = 150x + 120y$.

Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y $150x + 120y = 0 \;\rightarrow\; 5x + 4y = 0$, que da la dirección de las rectas $150x + 120y = K$.



El máximo se alcanza en el punto (20, 20). Por tanto, deben elegirse 20 electricistas y 20 mecánicos.

s15 **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.**

La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

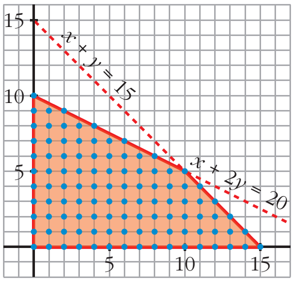
b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

a) Llamamos x al número de tartas de tipo Imperial e y al número de tartas de Lima.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}5x + y \leq 10 \quad \rightarrow \quad x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 15 \\ x, \; y \; \text{enteros} \end{cases}$$

Representamos el conjunto de restricciones:

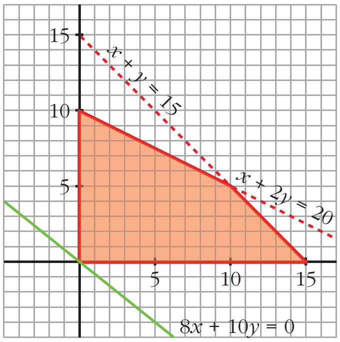


Las posibles combinaciones de especialidades que pueden hacer se corresponden con los puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto, incluida la frontera.

b) La función que da los ingresos por ventas es $F(x, y) = 8x + 10y$.

Tendremos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $8x + 10y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{ Punto } (10, 5)$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas Imperiales y 5 de Lima.

s16 **Un orfebre fabrica dos tipos de joyas.**

La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €.

La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Llamamos x al n.º de unidades de tipo A e y al n.º de unidades de tipo B.

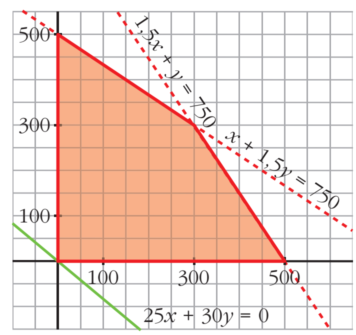
Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

La función que tenemos que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es:

$F(x, y) = 25x + 30y$

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $25x + 30y = 0 \;\rightarrow\; 5x + 6y = 0$, que da la dirección de las rectas $25x + 30y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5x + \phantom{1{,}5}y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{array}\right\} \text{Punto } (300, 300)$$

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.

s17 **Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos:**

TIPO A, con 3 refrescos con cafeína y 3 sin cafeína.

TIPO B, con 2 refrescos con cafeína y 4 sin cafeína.

El vendedor gana 6 € por cada paquete que vende de tipo A y 5 € por cada paquete de tipo B. Calcula de forma razonada cuántos paquetes ha de vender de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

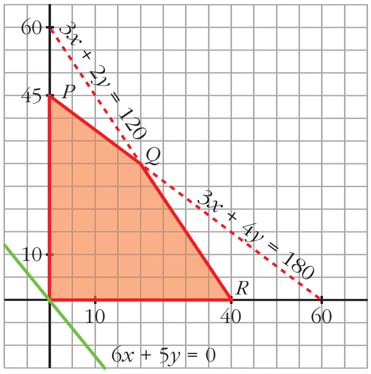
Llamamos x al número de paquetes de tipo A e y al número de paquetes de tipo B. Resumimos la información en una tabla:

	A	B	REF. DISPONIBLES
CON CAFEÍNA	$3x$	$2y$	120
SIN CAFEÍNA	$3x$	$4y$	180
GANANCIA (€)	$6x$	$5y$	

Las restricciones del problema son: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \end{cases}$

La función objetivo es la de ganancias, $G(x, y) = 6x + 5y$. Hemos de maximizar esta función, sometiéndola a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $6x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $6x + 5y = K$.



El máximo se alcanza en uno de los vértices de la región factible (zona sombreada).

$P(0, 45)$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{array}\right\} \quad Q(20, 30)$$

$R(40, 0)$

$G(P) = G(0, 45) = 225$; $G(Q) = G(20, 30) = 270$; $G(R) = G(40, 0) = 240$

El máximo beneficio es de 270 €, y se alcanza vendiendo 20 paquetes de tipo A y 30 paquetes de tipo B.

18 **Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,50 € el kilo y las de tipo B a 0,80 € el kilo.Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,90 €.**

¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

Si llamamos x a los kilos de naranjas del tipo A e y a los kilos de naranjas del tipo B, las restricciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \leq 700 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \leq 500 \quad \to \quad 5x + 8y \leq 5\,000 \end{array}\right.$$

La función que nos da el beneficio es $F(x, y) = 0{,}08x + 0{,}1y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}08x + 0{,}1y = 0 \to 8x + 10y = 0 \to$ $\to 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $0{,}08x + 0{,}1y = K$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 700 \\ 5x + 8y = 5\,000 \end{array}\right\} \quad \text{Punto } (200, 500)$$

Por tanto, deberá comprar 200 kg de naranjas del tipo A y 500 kg del tipo B.

Página 116

s19 **Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1 200 socios a ver un partido de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 1 260 €, y el de cada microbús, de 900 €. La empresa solo dispone, ese día, de 28 conductores.**

¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible? ¿Cuál es ese coste?

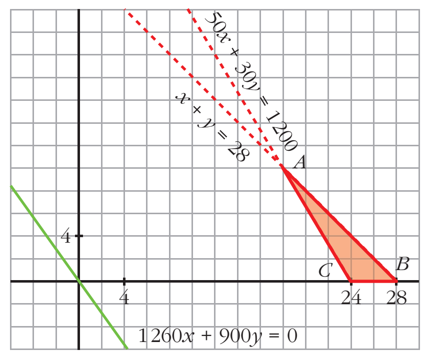
a) Llamamos x al número de autobuses e y al de microbuses.

Las restricciones del problema son las siguientes: $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \leq 28 \\ 50x + 30y \geq 1200 \\ x, y \text{ enteros} \end{cases}$

La función que nos da el coste, función objetivo, es $F(x, y) = 1\,260x + 900y$.

Hemos de minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representado el conjunto de restricciones, la región factible es la zona coloreada. El mínimo se alcanzará en uno de los vértices de esta zona (representamos, también, $1\,260x + 900y = 0$).



$\left.\begin{array}{l} x + y = 28 \\ 5x + 3y = 120 \end{array}\right\} A(18, 10) \quad \to \quad F(A) = F(18, 10) = 6\,336$ €

$B(28, 0) \;\to\; F(B) = F(28, 0) = 7\,056$ €

$C(24, 0) \;\to\; F(C) = F(24, 0) = 6\,048$ €

El mínimo se alcanza en el punto (24, 0). Es decir, deben contratarse 24 autobuses y ningún microbús.

b) El valor del coste mínimo es 6 048 €.

Otra resolución

Este problema se puede resolver de forma trivial sin programación lineal.

Precio por persona en autobús $\to$ 1 260 : 50 = 25,20 €

Precio por persona en microbús $\to$ 900 : 30 = 30 €

Por tanto, es más barato ubicar en autobuses a tantos viajeros como sea posible, y si pueden ser todos, mejor.

1 200 viajeros : 50 plazas/autobús = 24 autobuses

En 24 autobuses caben los 1 200 forofos.

s20 **Una persona tiene 15 000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9%, y el tipo B, del 5%.**

Decide invertir, como máximo, 9 000 € en A, y como mínimo, 3 000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

a) Dibuja la región factible.

b) ¿Cómo debe invertir los 15 000 € para que el beneficio sea máximo?

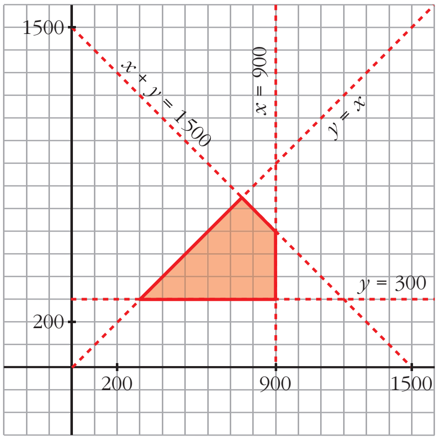
c) ¿Cuál es ese beneficio anual máximo?

a) Llamamos x a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo A e y a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo B.

Las restricciones del problema son:

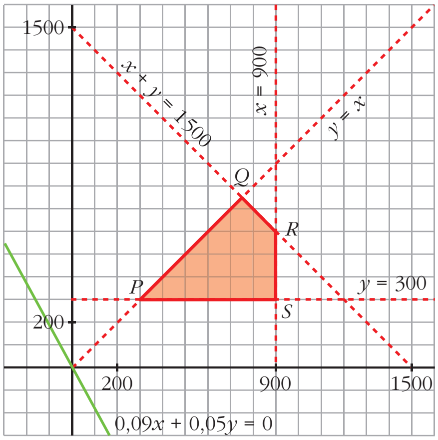
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 900 \\ y \geq 300 \\ x \geq y \\ x + y \leq 1500 \end{cases}$$

Representamos las rectas y obtenemos la región factible, que es la zona sombreada.



b) La función objetivo es $F(x, y) = 0{,}09x + 0{,}05y$.

Vemos cuál es el valor de esta función en los vértices de la región factible:



$P(300, 300)$ $\quad S(900, 300)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = y \end{array}\right\} Q(750, 750)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = 900 \end{array}\right\} R(900, 600)$

$F(P) = F(300, 300) = 42$

$F(Q) = F(750, 750) = 105$

$F(R) = F(900, 600) = 111$

$F(S) = F(900, 300) = 96$

Para que el beneficio sea máximo, se deben invertir 900 € en acciones de tipo A y 600 € en acciones de tipo B.

c) El beneficio máximo anual es de 111 €.

s21 **Un taller de confección hace chaquetas y pantalones para niños. Para hacer una chaqueta, se necesitan 1 m de tela y 2 botones; y para hacer unos pantalones, hacen falta 2 m de tela, 1 botón y 1 cremallera. El taller dispone de 500 m de tela, 400 botones y 225 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una chaqueta es de 20 €, y por la de unos pantalones, 30 €. Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcula el número de chaquetas y de pantalones que se tienen que hacer para obtener un beneficio máximo.**

Llamamos x al número de chaquetas e y al número de pantalones.

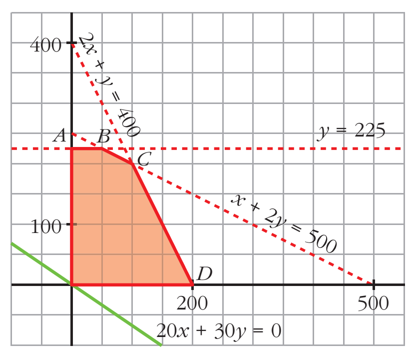
Resumimos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema:

	CHAQUETAS	PANTALONES	DISPONIBLE
TELA	$1x$	$2y$	500
BOTONES	$2x$	$1y$	400
CREMALLERAS		$1y$	225
BENEFICIO (€)	$20x$	$30y$	

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + 2y \le 500 \\ 2x + y \le 400 \\ y \le 225 \end{cases}$$

La función objetivo es la función de beneficios, $F(x, y) = 20x + 30y$.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $20x + 30y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $20x + 30y = K$.



El máximo se alcanza en uno de los vértices de la región factible (zona sombreada).

$A(0, 225)$ $\quad\quad$ $B(50, 225)$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{array}\right\} C(100, 200)$$

$D(200, 0)$

$F(A) = F(0, 225) = 6\,750$ $\quad\quad$ $F(B) = F(50, 225) = 7\,750$

$F(C) = F(100, 200) = 8\,000$ $\quad\quad$ $F(D) = F(200, 0) = 4\,000$

El máximo beneficio es de 8 000 €, y se alcanza fabricando 100 chaquetas y 200 pantalones.

s22 **Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos, A y B. Tiene dos factorías, F_1 y F_2. En F_1 se producen diariamente 6 coches tipo A y 4 tipo B, con un coste de 32 000 € diarios. F_1 no funciona más de 50 días. En F_2 se producen 4 de A y 4 de B, con un coste de 24 000 € diarios. Para abastecer el mercado, se han de poner a la venta al menos 360 coches de tipo A y al menos 300 de tipo B.**

¿Cuántos días debe funcionar cada factoría para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

Llamamos x al número de días que debe funcionar F_1 e y al número de días que debe funcionar F_2.

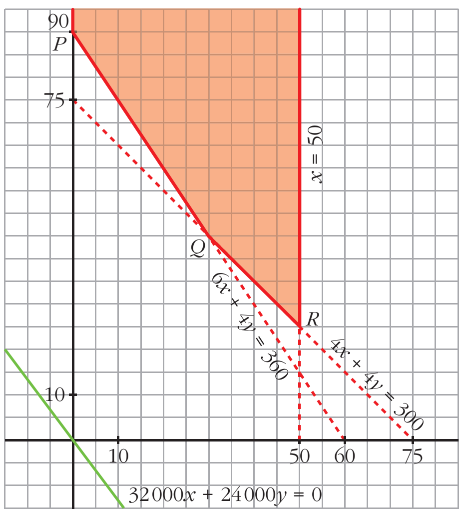
Colocamos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema:

	FACTORÍA F_1	FACTORÍA F_2	N.º DE COCHES
MODELO A	$6x$	$4y$	360
MODELO B	$4x$	$4y$	300
COSTE	$32\,000x$	$24\,000y$	

$$\begin{cases} 0 \le x \le 50 \\ y \ge 0 \\ 6x + 4y \ge 360 \\ 4x + 4y \ge 300 \end{cases}$$

Hemos de minimizar la función objetivo, $F(x, y) = 32\,000x + 24\,000y$.

Representamos las restricciones del problema y la dirección de la función objetivo. La región factible es la zona sombreada:



$P(0, 90)$

$\left.\begin{aligned} 6x + 4y &= 360 \\ 4x + 4y &= 300 \end{aligned}\right\} Q(30, 45)$

$\left.\begin{aligned} 4x + 4y &= 300 \\ x &= 50 \end{aligned}\right\} R(50, 25)$

$F(P) = F(0, 90) = 2\,160\,000$

$F(Q) = F(30, 45) = 2\,040\,000$

$F(R) = F(50, 25) = 2\,200\,000$

El coste mínimo, 2 040 000 €, se obtiene cuando la factoría F_1 funciona 30 días y la F_2 funciona 45 días.

s23 **Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. Sus sueldos anuales son, respectivamente, 8 000 € y 15 000 €. La empresa tiene un tope máximo de 480 000 € para los sueldos de estos nuevos empleados. El número de empleados fijos ha de estar entre 10 y 24. Los eventuales no pueden ser más de 14.**

Si el objetivo es contratar al mayor número de empleados, ¿cuántos ha de contratar de cada tipo?

¿Y si el objetivo fuera contratar al mayor número de eventuales?

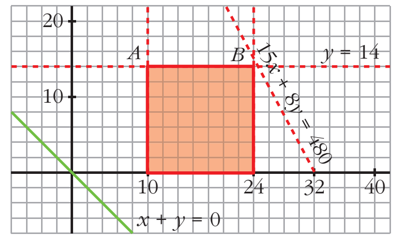
Llamamos x al número de empleados fijos e y al número de empleados eventuales. Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} 15x + 8y \le 480 \\ 10 \le x \le 24 \\ 0 \le y \le 14 \end{cases}$$

Si se quiere contratar al mayor número de empleados, la función objetivo viene definida por $F(x, y) = x + y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones descritas.

Representamos el recinto de restricciones, y la recta $x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $x + y = K$.

El máximo se alcanza en un vértice de la región factible, en $B(24, 14)$. Habría que emplear a 24 fijos y a 14 eventuales.



Si el objetivo fuese contratar al mayor número de eventuales (el máximo se alcanza en los puntos de coordenadas enteras del segmento AB), habría que contratar a 14 eventuales, y el número de fijos podría variar entre 10 y 24, ambos incluidos.

s24 **Un fabricante de muebles produce dos tipos de mesas: clásicas y modernas. Cada mesa del modelo clásico requiere 4 horas de lijado y 3 horas de barnizado, y deja un beneficio de 200 €. No deben fabricarse más de 9 de estas mesas. Cada mesa moderna necesita 3 horas de lijado y 4 horas de barnizado, y su beneficio es de 100 €. Se dispone de 48 horas para lijado y de 60 horas para barnizado.**

¿Cuántas mesas de cada tipo ha de fabricar para que sus beneficios sean máximos?

Llamamos x al número de mesas clásicas e y al número de mesas modernas. Disponemos los datos en una tabla y definimos las restricciones del problema:

	MESA CLÁSICA	MESA MODERNA	DISPONIBLE
LIJADO (h)	$4x$	$3y$	48
BARNIZADO (h)	$3x$	$4y$	60
BENEFICIO (€)	$200x$	$100y$	

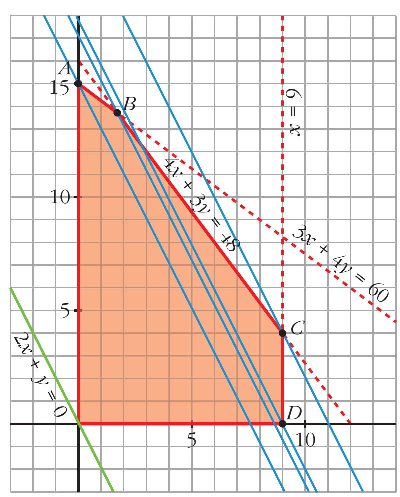
$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ y \ge 0 \\ 4x + 3y \le 48 \\ 3x + 4y \le 60 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es $F(x, y) = 200x + 100y$.

Representamos el recinto y la recta de ecuación $2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $200x + 100y = K$.

El máximo se alcanza en un punto de coordenadas enteras de la región factible.

Trazamos paralelas a la recta $2x + y = 0$ por cada vértice de esta región: $A(0, 15)$, $B(12/7, 96/7)$, $C(9, 4)$, $D(9, 0)$. De estas rectas, la que pasa por $C(9, 4)$ es la de mayor ordenada en el origen. En ese punto se alcanza el máximo de la función objetivo.



Por tanto, hay que fabricar 9 mesas clásicas y 4 mesas modernas.

PARA PROFUNDIZAR

25 **Un pastelero fabrica dos tipos de tartas, T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C.**

Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1, debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2, necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 €, y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

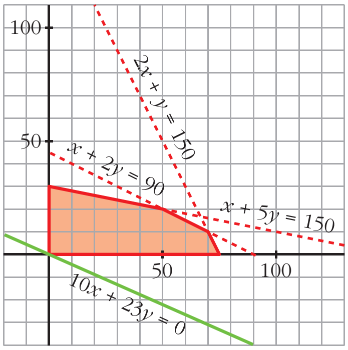
b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

Llamamos x al número de tartas de tipo T_1 e y al número de tartas de tipo T_2. Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

a) La función que nos da los ingresos es $F(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones, y la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $10x + 23y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{array}\right\} \text{ Punto } (50, 20)$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2.

b) Si llamamos p al precio de la tarta de tipo T_2, los ingresos vendrían dados por la función $G(x, y) = 15x + py$.

Si la función $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto (60, 15), que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + py = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + py = 0 \;\rightarrow\; \text{pendiente} = -\dfrac{15}{p} \\ x + 2y = 90 \;\rightarrow\; \text{pendiente} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \; -\frac{15}{p} = -\frac{1}{2} \;\rightarrow\; p = 30$$

Así, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

Página 117

26 **Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C.**

Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros).

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

Resumimos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema (tendremos en cuenta que todos los datos de la tabla deben ser positivos o cero y que x e y deben ser enteros):

	A	B	C	
N	x	y	$11 - x - y$	11
S	$9 - x$	$10 - y$	$x + y - 4$	15
	9	10	7	26

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 11 \\ x \leq 9 \\ y \leq 10 \end{cases}$$

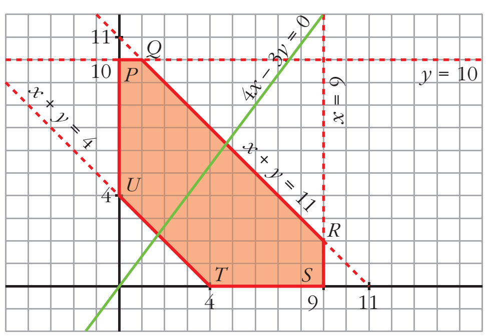
La función que nos da el coste (en miles de euros) es:

$$F(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) =$$

$$= 4x - 3y + 249$$

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones:



Los vértices del recinto son:

$P(0, 10)$ $\quad$ $Q(1, 10)$

$R(9, 2)$ $\quad$ $S(9, 0)$

$T(4, 0)$ $\quad$ $U(0, 4)$

Hallamos $F(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$F(P) = F(0, 10) = 219$ $\qquad$ $F(Q) = F(1, 10) = 223$ $\qquad$ $F(R) = F(9, 2) = 279$

$F(S) = F(9, 0) = 285$ $\qquad$ $F(T) = F(4, 0) = 265$ $\qquad$ $F(U) = F(0, 4) = 237$

El coste mínimo, 219 miles de euros, se alcanza en el punto $P(0, 10)$.

Por tanto, el reparto de locomotoras debe efectuarse como se indica en la tabla de la derecha.

	A	B	C	TOTAL
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
TOTAL	9	10	7	26

27 **Don Elpidio decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA.**

El precio de cada acción es de 10 € cada una, y en ambos casos.

BLL dedica el 35% de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y el 20% al industrial.

ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25% al inmobiliario y el 45% al industrial.

D. Elpidio no quiere invertir más del 40% de su capital en el sector industrial ni más del 35% en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,20 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

Llamamos x al número de acciones que adquiere de BLL e y al número de acciones que adquiere de ISSA.

Hagamos una tabla que resuma la información que nos dan:

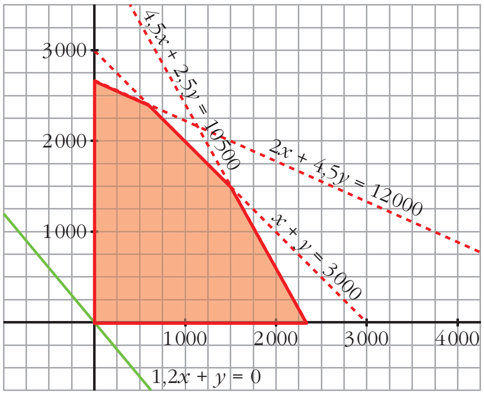
	N.°	PRECIO	SEGUROS	INMOBILIARIA	INDUSTRIAL
ACCIONES BBL	x	$10x$	$3,5x$	$4,5x$	$2x$
ACCIONES ISSA	y	$10y$	$3y$	$2,5y$	$4,5y$
TOTAL		$10x + 10y$	$3,5x + 3y$	$4,5x + 2,5y$	$2x + 4,5y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 3\,000 \\ 2x + 4,5y \leq 12\,000 \\ 4,5x + 2,5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

La función que nos da los beneficios es $F(x, y) = 1,2x + y$. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $1,2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $1,2x + y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = \ \ 3\,000 \\ 4,5x + 2,5y = 10\,500 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Punto} \\ (1\,500, 1\,500) \end{array}$$

Debe adquirir 1 500 acciones de cada una de las dos sociedades.

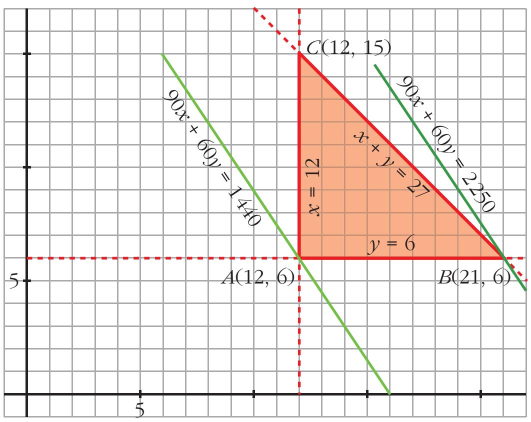
Página 117

AUTOEVALUACIÓN

1. **Representa el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

Halla los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 90x + 60y$ en ese recinto.



$F(x, y)$ toma el valor máximo en $B(21, 6)$.

$F(21, 6) = 90 \cdot 21 + 60 \cdot 6 = 2\,250$

$F(x, y)$ toma el valor mínimo en $A(12, 6)$.

$F(12, 6) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 6 = 1\,440$

2. **Representa el recinto descrito por las siguientes inecuaciones:**

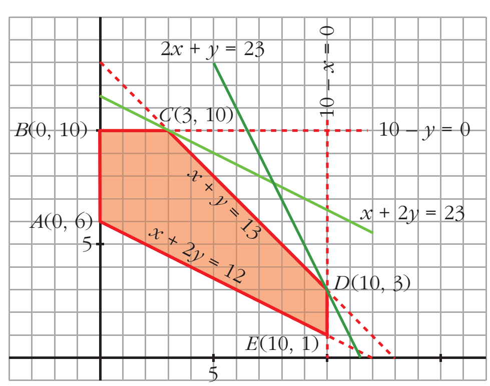
$$\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 10 - y \geq 0 \\ x + y \leq 13 \\ x + 2y \geq 12 \end{cases}$$

Halla el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a) $F(x, y) = 2x + y$ **b)** $G(x, y) = x + 2y$

La región factible es la zona sombreada de la siguiente figura:

$$\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 & \rightarrow \ x \leq 10 \\ 10 - y \geq 0 & \rightarrow \ y \leq 10 \\ x + y \leq 13 & \rightarrow \ y \leq 13 - x \\ x + 2y \geq 12 & \rightarrow \ y \geq \dfrac{12 - x}{2} \end{cases}$$



a) $F(x, y) = 2x + y$ toma el valor máximo en el vértice $D(10, 3)$.

$F(10, 3) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$ es máximo de F.

$F(x, y) = 2x + y$ toma el valor mínimo en el vértice $A(0, 6)$.

$F(0, 6) = 6$ es el valor mínimo de F en el recinto.

b) $G(x, y) = x + 2y$ toma el valor máximo en $C(3, 10)$.

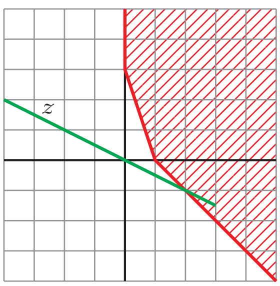
$G(3, 10) = 3 + 2 \cdot 10 = 23$ es máximo de G.

$G(x, y)$ toma el valor mínimo en cualquier punto del segmento AE. Por ejemplo:

En el vértice A su valor es $G(0, 6) = 0 + 2 \cdot 6 = 12$

En el vértice E su valor es $G(10, 1) = 10 + 2 \cdot 1 = 12$

3. ¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?



No tiene ni máximo ni mínimo.

4. Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio.

Para fabricar 100 m de cable de tipo A, se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene de él un beneficio de 1 500 €.

Para fabricar 100 m de cable de tipo B, se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene un beneficio de 1 000 €.

Calcula cuántos metros de cable hay que fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

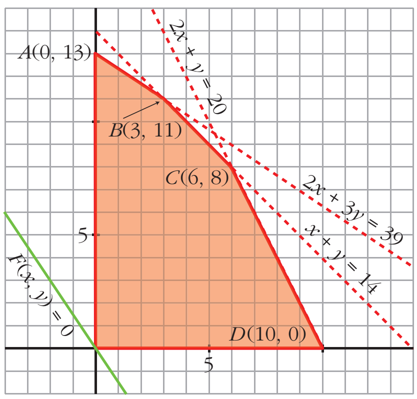
Llamamos: $x \rightarrow$ metros de cable de tipo A

$y \rightarrow$ metros de cable de tipo B

	CABLE TIPO A	CABLE TIPO B	DISPONIBLE
COBRE (kg)	$10x$	$15y$	195
TITANIO (kg)	$2x$	$1y$	20
ALUMINIO (kg)	$1x$	$1y$	14
BENEFICIO (€)	1 500	1 000	

Las restricciones del problema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 15y \leq 195 \;\rightarrow\; 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \end{cases}$

La región factible es la zona sombreada:



Calculamos las coordenadas de los vértices B y C:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 39 \\ x + y = 14 \end{array}\right\} \; 39 - 2x = 42 - 3x \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; B(3, 11)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ x + y = 14 \end{array}\right\} \; 20 - 2x = 14 - x \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; C(6, 8)$$

La función objetivo que hay que maximizar es:

$F(x, y) = 1\,500x + 1\,000y$

$F(A) = F(0, 13) = 13\,000$

$F(B) = F(3, 11) = 15\,500$

$F(C) = F(6, 8) = 17\,000$

$F(D) = F(10, 0) = 15\,000$

El beneficio máximo, que es de 17 000 euros, se obtiene en el punto $C(6, 8)$.

Es decir, para obtener el beneficio máximo será necesario fabricar 600 metros de cable del tipo A y 800 metros de cable del tipo B.