9 INICIACIÓN A LAS INTEGRALES

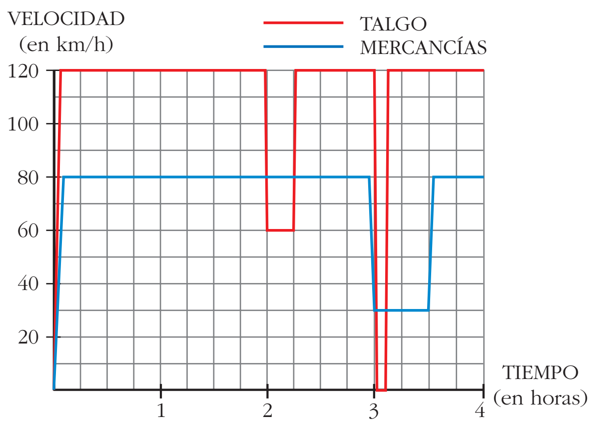
Página 209

REFLEXIONA Y RESUELVE

Dos trenes

Un Talgo y un tren de mercancías salen de la misma estación, por la misma vía y en idéntica dirección, uno tras otro, casi simultáneamente.

Estas son las gráficas TIEMPO - VELOCIDAD de ambos movimientos.



Como podemos ver en la gráfica, el Talgo, a las dos horas, reduce su velocidad:

¿A qué puede deberse?

¿Por qué no aminora la marcha también el otro tren en ese instante?

A las tres horas, ambos trenes modifican su marcha: el Talgo se detiene durante breves minutos, mientras que el tren de mercancías va muy despacio durante media hora.

- **Para hacernos una idea clara de estos movimientos, realicemos algunos cálculos:**

  a) El Talgo, durante 2 h, va a 120 km/h. ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

  b) De 2 a $2\frac{1}{4}$, el Talgo disminuye su velocidad.

  ¿Cuántos kilómetros recorre a esa velocidad?

c) El tren de mercancías aminora la marcha a las 3 h. ¿Qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

d) ¿Qué distancia recorre el tren de mercancías durante la media hora en que va a baja velocidad?

e) ¿A qué distancia de la estación de salida está esta otra en la que para el Talgo?

f) Observa que en todos los cálculos que has realizado hasta ahora se han obtenido áreas bajo las gráficas, roja o azul. Señala los recintos cuyas áreas has calculado y asigna a cada uno su área correspondiente.

a) $120 \cdot 2 = 240$ km.

b) A 60 km/h durante $\frac{1}{4}$ de hora, recorre $\frac{60}{4} = 15$ km.

c) Ha ido a 80 km/h durante 3 horas, luego ha recorrido $80 \cdot 3 = 240$ km.

d) Va a 30 km/h durante $\frac{1}{2}$ hora, luego recorre $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ km.

e) La parada la hace a las 3 horas; en este momento lleva recorrida una distancia de:

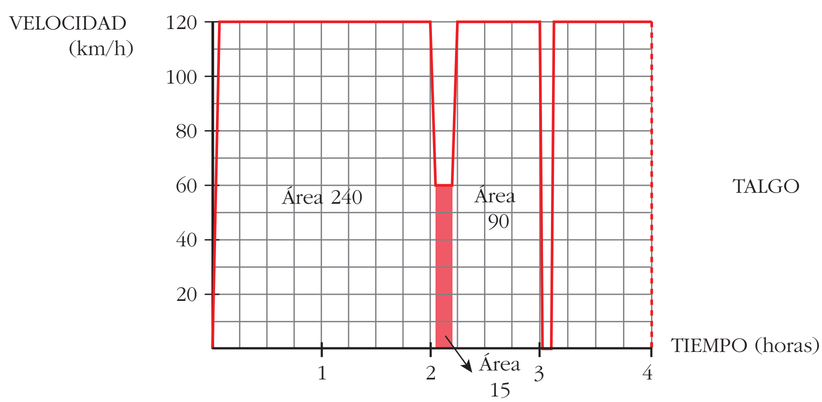
$120 \cdot 2 = 240$ km en las dos primeras horas

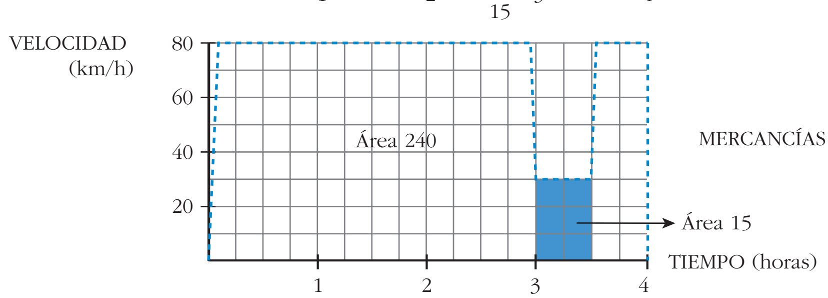
$60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km el siguiente cuarto de hora

$120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ km los siguientes tres cuartos de hora

Total: $240 + 15 + 90 = 345$ km hasta llegar a la parada.

f)





¿Cuál es la función cuya derivada es...?

La función cuya derivada es $2x$ es ... x^2.

La función cuya derivada es $cos\ x$ es ... $sen\ x$.

La función cuya derivada es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es ... $\sqrt{x}$.

■ **Di cuál es la función cuya derivada es:**

a) $2x$	**b)** x	**c)** $5x$	**d)** $3x^2$	**e)** x^2
f) $5x^2$	**g)** $4x^3$	**h)** x^3	**i)** $2x^3$	**j)** 1
k) 4	**l)** $\sqrt{2}$	**m)** $3x^2 + 4x^3$	**n)** $5x^2 + 7x^3$	**ñ)** $-sen\ x$
o) $sen\ x$	**p)** $5sen\ x$	**q)** $cos\ x$	**r)** e^x	**s)** $3e^x$
t) e^{-x}	**u)** $2^x\ ln2$	**v)** $2x$	**w)** $5 \cdot 2x$	

a) 2	b) 1	c) 5	d) $6x$	e) $2x$
f) $10x$	g) $12x^2$	h) $3x^2$	i) $6x^2$	j) 0
k) 0	l) 0	m) $6x + 12x^2$	n) $10x + 21x^2$	ñ) $-cos\ x$
o) $cos\ x$	p) $5cos\ x$	q) $-sen\ x$	r) e^x	s) $3e^x$
t) e^{-x}	u) $2^x (ln2)^2$	v) $2^x\ ln2$	w) $5 \cdot 2^x \cdot ln2$	

Página 211

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4\, dx$ **b)** $\int \frac{1}{x^2}\, dx$ **c)** $\int \sqrt{x}\, dx$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx$ **e)** $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx$ **f)** $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} dx$

a) $\int 7x^4\, dx = 7\frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

d) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3}\, dx = \sqrt[3]{5}\, \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\,dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\,dx + \int \frac{\sqrt{5}\,x^{3/2}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\,dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{5}\cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3}\cdot x^{1/3}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\,\frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

2. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int (5\cos x + 3^x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int (10^x - 5^x)\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x}\,dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\,ln|x| + k$

b) $\displaystyle\int (5\cos x + 3^x)\,dx = \int 5\cos x\,dx + \int 3^x\,dx = 5\,sen x + \frac{3^x}{ln 3} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right)dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right)dx + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right)dx - \int \left(\frac{4}{x^2}\right)dx =$

$$= \int 7x^2\,dx - \int 5\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{4}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\,ln|x| + \frac{4}{x} + k$$

d) $\displaystyle\int (10^x - 5^x)\,dx = \int 10^x\,dx - \int 5^x\,dx = \frac{10^x}{ln 10} - \frac{5^x}{ln 5} + k$

Página 213

3. Halla las primitivas de estas funciones:

a) $f(x) = (x^3 - 5x + 3)^2(3x^2 - 5)$ **b)** $f(x) = (5x + 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x}$

e) $f(x) = \cos x\ sen^3 x$

a) $\displaystyle\int (x^3 - 5x + 3)^2(3x^2 - 5)\,dx = \frac{(x^3 - 5x + 3)^3}{3} + k$

b) $\displaystyle\int (5x + 1)^3\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x + 1)^4}{4} + k = \frac{(5x + 1)^4}{20} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x}\,dx = ln\,|x-3x| + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3-3x}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x^3-3x| + k$

e) $\displaystyle\int cos\,x\,sen^3\,x\,dx = \frac{sen^4\,x}{4} + k$

4. Busca las primitivas de:

a) $f(x) = x\,2^{x^2}\,ln\,2$ **b)** $f(x) = x\,2^{x^2}$

c) $f(x) = 2^{3x-5}$ **d)** $f(x) = sen\,3x$

e) $f(x) = sen\,(x^3-4x^2)(3x^2-8x)$ **f)** $f(x) = \dfrac{cos\,x}{sen\,x}$

a) $\displaystyle\int x\,2^{x^2}\,ln\,2\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2} + k$

b) $\displaystyle\int x\,2^{x^2}\,dx = \frac{1}{2\,ln\,2}\cdot 2^{x^2} + k = \frac{2^{x^2}}{2\,ln\,2} + k$

c) $\displaystyle\int 2^{3x-5}\,dx = \frac{1}{3\,ln\,2}\cdot 2^{3x-5} + k = \frac{2^{3x-5}}{3\,ln\,2} + k$

d) $\displaystyle\int sen\,3x\,dx = -\frac{1}{3}\,cos\,3x + k$

e) $\displaystyle\int sen\,(x^3-4x^2)(3x^2-8x)\,dx = -cos\,(x^3-4x^2) + k$

f) $\displaystyle\int \frac{cos\,x}{sen\,x}\,dx = ln\,|sen\,x| + k$

Página 217

1. Halla e interpreta estas integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{4\pi} sen\,x\,dx$

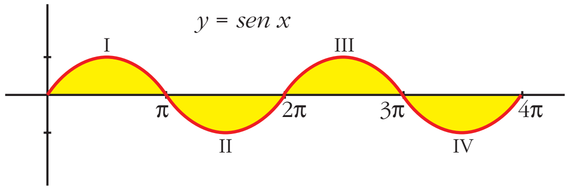
b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx$

a) $G(x) = \displaystyle\int sen\,x\,dx = -cos\,x$

$G(4\pi) = -1;\quad G(0) = -1$

$\displaystyle\int_0^{4\pi} sen\,x\,dx = -1-(-1) = -1+1 = 0$

Interpretación geométrica:



La parte positiva y la parte negativa son iguales; por eso da como resultado 0:

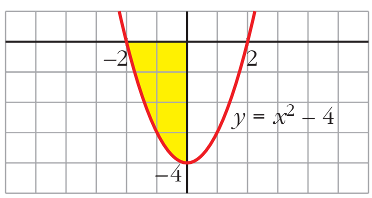
$$\text{Área de I} - \text{Área de II} + \text{Área de III} - \text{Área de IV} = 0$$

b) $G(x) = \int (x^2 - 4)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

$G(2) = -\dfrac{16}{3}$; $G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx = -\frac{16}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$

Interpretación geométrica:



Como queda por debajo del eje X, la integral es el área del recinto señalado con signo negativo, es decir:

$$-\text{Área del recinto} = -\frac{32}{3}$$

2. Halla la siguiente integral e interprétala geométricamente: $\displaystyle\int_0^2 e^x\, dx$

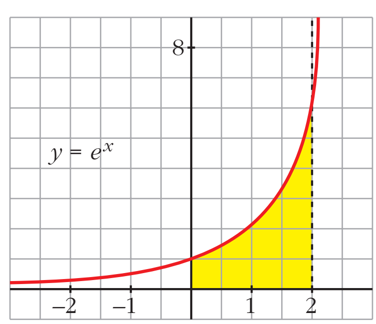
$G(x) = \displaystyle\int_0^2 e^x\, dx = e^x$

$G(2) = e^2$; $G(0) = 1$

$\displaystyle\int_0^2 e^x\, dx = e^2 - 1 \approx 6{,}39$

Interpretación geométrica:

Área del recinto $= e^2 - 1 \approx 6{,}39$



Página 219

1. Halla el área comprendida entre la función $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = 5$.

- Puntos de corte con el eje X:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = -1,\; x_3 = 1,\; x_4 = 2$$

Solo nos sirven $x = 1$, $x = 2$ (están entre 0 y 5).

- Hay tres recintos: I [0, 1]; II [1, 2]; III [2, 5]

- $G(x) = \int (x^2 - 1(x^2 - 4)\, dx = \int (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{5x^3}{3} + 4x$

- $G(0) = 0;\; G(1) = \dfrac{38}{15};\; G(2) = \dfrac{16}{15};\; G(5) = \dfrac{1310}{3}$

- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{38}{15}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \left|-\dfrac{22}{15}\right| = \dfrac{22}{15}$

Área del recinto III $= |G(5) - G(2)| = \dfrac{2178}{5}$

Área total $= \dfrac{38}{15} + \dfrac{22}{15} + \dfrac{2178}{5} = \dfrac{2198}{5} = 439{,}6\ \text{u}^2$

2. Halla el área comprendida entre $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje X.

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 0,\; x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 2]

- $G(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$

- $G(-1) = -\dfrac{5}{12};\; G(0) = 0;\; G(2) = -\dfrac{8}{3}$

- Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \dfrac{5}{12}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(0)| = \dfrac{8}{3}$

Área total $= \dfrac{5}{12} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{37}{12} \approx 3{,}08\ \text{u}^2$

Página 220

1. **Halla el área encerrada entre las gráficas de las funciones siguientes:**

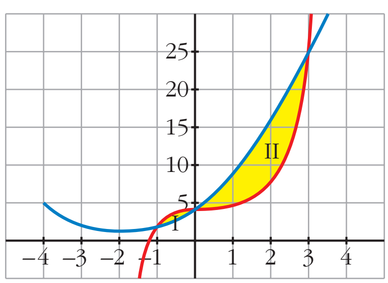
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x^2 + 4}$$

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 + 3x + 4}$$

- $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 + 4 - x^2 - 3x - 4 = x^3 - 2x^2 - 3x$
- $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \ \rightarrow \ x(x^2 - 2x - 3) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 3$
- Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 3]
- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{12}; \ \ G(0) = 0; \ \ G(3) = -\dfrac{45}{4}$
- Recinto I: Área $[-1, 0] = |G(0) - G(-1)| = \dfrac{7}{12}$

  Recinto II: Área $[0, 3] = |G(3) - G(0)| = \dfrac{45}{4}$

  Área total: $\dfrac{7}{12} + \dfrac{45}{4} = \dfrac{71}{6} \simeq 11,83 \text{ u}^2$



Página 226

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Cálculo de primitivas

1 **Halla una primitiva de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2$

d) $f(x) = -8x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{5x^4}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{3}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\displaystyle\int (x + 1)\, dx = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\displaystyle\int (2x - \sqrt{3})\, dx = x^2 - \sqrt{3}x$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{2} + x^2\right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}$

d) $\displaystyle\int (-8x^3 + 3x^2)\, dx = -2x^4 + x^3$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int (x^{-2} + x^{-3})\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$

f) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{5x^4}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + \frac{3}{5}x^{-4}\right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{5x^3}$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{3}\right) dx = \int \left(x^{-1/2} + \frac{1}{3}x\right) dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} = 2\sqrt{x} + \frac{x^2}{6}$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int x^2 \cdot x^{-1/3}\, dx = \int x^{5/3}\, dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$

2 **Integra la función de cada apartado:**

a) $\sqrt{3x}$ **b)** $\sqrt[3]{5x^2}$ **c)** $\dfrac{x + x^2}{\sqrt{x}}$ **d)** $\dfrac{x^3 - 2}{x^2}$

e) $\dfrac{3}{x}$ **f)** $\dfrac{2}{x+1}$ **g)** $\dfrac{x - 2}{x^2}$ **h)** $\dfrac{3 - 2x}{x}$

a) $\displaystyle\int \sqrt{3x}\; dx = \int \sqrt{3}\; x^{1/2}\, dx = \sqrt{3}\; \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{3}\,\sqrt{x^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + k$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5x^2}\; dx = \int \sqrt[3]{5}\; x^{2/3}\, dx = \sqrt[3]{5}\; \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{x + x^2}{\sqrt{x}}\, dx = \int (x^{1/2} + x^{3/2})\; dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2}{x^2}\, dx = \int (x - 2x^{-2})\; dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + k = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\, dx = 3\; ln\; |x| + k$

f) $\displaystyle\int \frac{2}{x + 1}\, dx = 2\; ln\; |x + 1| + k$

g) $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = ln\; |x| + \frac{2}{x} + k$

h) $\displaystyle\int \frac{3 - 2x}{x}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} - 2\right) dx = 3\; ln\; |x| - 2x + k$

3 **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int sen\; 3x\; dx$ **b)** $\displaystyle\int cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{cos\; x}{sen\; x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \left(1 - sen\; \frac{x}{2}\right) dx$ **e)** $\displaystyle\int sen \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ **f)** $\displaystyle\int cos\; \frac{\pi}{2}\; x\; dx$

a) $\displaystyle\int sen\; 3x\; dx = -\frac{1}{3} \int -3\; sen\; 3x\; dx = -\frac{1}{3}\; cos\; 3x + k$

b) $\displaystyle\int cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = sen \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{cos\; x}{sen\; x}\, dx = ln\; |sen\; x| + k$

d) $\displaystyle\int \left(1 - sen\; \frac{x}{2}\right) dx = x + 2\; cos\; \frac{x}{2} + k$

e) $\int sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k$

f) $\int cos\,\frac{\pi}{2}\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\frac{\pi}{2}\,cos\,\frac{\pi}{2}\,x\,dx = \frac{2}{\pi}\,sen\,\frac{\pi}{2}x + k$

4 **Calcula:**

a) $\int e^{x+3}\,dx$ **b)** $\int e^{2x-1}\,dx$ **c)** $\int 2^{x-7}\,dx$ **d)** $\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx$

a) $\int e^{x+3}\,dx = e^{x+3} + k$

b) $\int e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + k$

c) $\int 2^{x-7}\,dx = \frac{1}{ln\,2}\int ln\,2 \cdot 2^{x-7}\,dx = \frac{1}{ln\,2}\cdot 2^{x-7} + k = \frac{2^{x-7}}{ln\,2} + k$

d) $\int 3^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int\frac{1}{2}\,3^{\frac{x}{2}}\,dx = \frac{2\cdot 3^{x/2}}{ln\,3} + k$

5 **Calcula:**

a) $\int (x-3)^3\,dx$ **b)** $\int (2x+1)^5\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ **d)** $\int \sqrt{3x-5}\,dx$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\,dx$ **f)** $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$

g) $\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$ **h)** $\int \frac{x}{3x^2-4}\,dx$

a) $\int (x-3)^3\,dx = \frac{(x-3)^4}{4} + k$

b) $\int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^6}{6} + k = \frac{(2x+1)^6}{12} + k$

c) $\int\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = 2\int\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = 2\sqrt{x+2} + k$

d) $\int \sqrt{3x-5}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-5)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-5)^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{(3x-5)^3}}{9} + k$

e) $\int \sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\,dx = 2\int\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^{1/3} dx = 2\cdot\frac{[(x+3)/2]^{4/3}}{4/3} + k = \frac{3}{2}\left(\frac{x+3}{2}\right)^4 + k$

f) $\displaystyle\int \frac{3}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 3\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,|2x-1| + k$

g) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = ln\,|x^2+2| + k$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{3x^2-4}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2-4}\,dx = \frac{1}{6}\,ln\,|3x^2-4| + k$

6 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int x\sqrt{5x^2+1}\;dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+2}\,dx$

f) $\displaystyle\int sen^2\,x\;\cos x\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-4}\,dx$

h) $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx$

a) $\displaystyle\int x\sqrt{5x^2+1}\;dx = \frac{1}{10}\int 10x(5x^2+1)^{1/2}\,dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{(5x^2+1)^{3/2}}{3/2} + k =$

$$= \frac{\sqrt{(5x^2+1)^3}}{15} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = ln\,|x^2+x-3| + k$

d) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{5x}{3x^2+2}\,dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}\,dx = \frac{5}{6}\,ln\,|3x^2+2| + k$

f) $\displaystyle\int sen^2 x\;\cos x\,dx = \frac{sen^3\,x}{3} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-4}\,dx = \frac{1}{4}\,ln\,|x^4-4| + k$

h) $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,sen\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + k$

7 **Calcula:**

a) $\int 3e^{5x}\,dx$ **b)** $\int x^2 \cdot 2^{-x^3+5}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx$

e) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}\,dx$ **f)** $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}\,dx$

a) $\int 3e^{5x}\,dx = \frac{3}{5}e^{5x} + k$

b) $\int x^2 \cdot 2^{-x^3+5}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 \cdot 2^{-x^3+5}\,dx = \frac{-2^{-x^3+5}}{3\ ln\ 2} + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+2}}\,dx = \sqrt{x^2-6x+2} + k$

e) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{x+5}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+5}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+5}}\,dx = 2\sqrt{x+5} + k$

f) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{3x-2}}\,dx = \int \sqrt{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2} + k =$

$= \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$

8 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}\,dx$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\,dx$ **d)** $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\,dx$

☛ ***Divide y transforma la fracción así:*** $\frac{\textit{Dividendo}}{\textit{divisor}} = \textit{cociente} + \frac{\textit{resto}}{\textit{divisor}}$

a) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx = \int \left(x-2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ ln\,|x-1| + k$

b) $\int \frac{x^2+5x-7}{x+3}\,dx = \int \left(x+2-\frac{13}{x+3}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 13\ ln\,|x+3| + k$

c) $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + k$

d) $\int \frac{x^2+3x-1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1+\frac{3x}{x^2-1}\right)dx = x + \frac{3}{2}\ ln\,|x^2-1| + k$

9 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, sen \frac{1}{x}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int sen\, x\ \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1}\, dx$

e) $\displaystyle\int (2x^2 + 1)^2\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}\, dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\, \ln x\, dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\cos e^{-x}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, sen\, \frac{1}{x}\, dx = \cos \frac{1}{x} + k$

b) $\displaystyle\int sen\, x\ \cos x\, dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx = \int x^{3/4}\, dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} + k = \frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1}\, dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx = \frac{-1}{x + 1} + k$

e) $\displaystyle\int (2x^2 + 1)^2\, dx = \int (4x^4 + 4x^2 + 1)\, dx = \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + k$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x^2 - 2}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}}\, dx = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{3} + k$

g) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 2}\, dx = \int \left(3x + 8 + \frac{15}{x - 2}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 8x + 15 \ln |x - 2| + k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \ln |1 + e^x| + k$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\, \ln x\, dx = \ln^2 x + k$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x}\cos e^{-x}\, dx = -sen\, e^{-x} + k$

Página 227

Integral definida

10 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_4^6 (2x-1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3+x)\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{x-2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^\pi (sen\ x - cos\ x)\,dx$ **h)** $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi sen\ 2x\,dx$

a) $G(x) = \displaystyle\int (-3x^2)\,dx = -x^3$

$G(5) = -125; \quad G(2) = -8$

$\displaystyle\int_2^5 (-3x^2)\,dx = G(5) - G(2) = -125 - (-8) = -117$

b) $G(x) = \displaystyle\int (2x-1)\,dx = x^2 - x$

$G(6) = 30; \quad G(4) = 12$

$\displaystyle\int_4^6 (2x-1)\,dx = G(6) - G(4) = 30 - 12 = 18$

c) $G(x) = \displaystyle\int (x^3+x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

$G(2) = G(-2) = 6$

$\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3+x)\,dx = G(2) - G(-2) = 0$

d) $G(x) = \displaystyle\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^{1/2}\,dx = \frac{\sqrt{3}\,x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

$G(4) = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}; \quad G(1) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{3x}\,dx = G(4) - G(1) = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$

e) $G(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ln\ |x|$

$G(e) = 1; \quad G(1) = 0$

$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = G(e) - G(1) = 1$

f) $G(x) = \int e^{x-2}\, dx = e^{x-2}$

$G(3) = e; \quad G(-1) = e^{-3}$

$$\int_{-1}^{3} e^{x-2}\, dx = G(3) - G(-1) = e - e^{-3} = e - \frac{1}{e^3} = \frac{e^4 - 1}{e^3}$$

g) $G(x) = \int (sen\ x - cos\ x)\, dx = -cos\ x - sen\ x$

$G(\pi) = 1; \quad G(0) = -1$

$$\int_{0}^{\pi} (sen\ x - cos\ x)\, dx = G(\pi) - G(0) = 1 - (-1) = 2$$

h) $G(x) = \int sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2}\ cos\ 2x$

$G(\pi) = -\frac{1}{2}; \quad G(-\pi) = -\frac{1}{2}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\ 2x\ dx = G(\pi) - G(-\pi) = 0$$

11 **Halla las integrales de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:**

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ **en** $[0, 2]$

b) $f(x) = 2\ cos\ x$ **en** $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$ **en** $[-1, 2]$

d) $f(x) = sen\ \frac{x}{4}$ **en** $[0, \pi]$

a) • $G(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2$

• $G(0) = 0; \quad G(2) = -4$

• $\int_{0}^{2} (3x^2 - 6x)\, dx = G(2) - G(0) = -4$

b) • $G(x) = \int 2\ cos\ x\ dx = 2\ sen\ x$

• $G(0) = 0; \quad G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

• $\int_{0}^{\pi/2} 2\ cos\ x\ dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = 2$

c) • $G(x) = \int (x + 1)(x^2 - 2)\, dx = \int (x^3 + x^2 - 2x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x$

• $G(-1) = \frac{11}{12}; \quad G(2) = -\frac{4}{3}$

• $\int_{-1}^{2} (x + 1)(x^2 - 2) = G(2) - G(-1) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{12} = -\frac{9}{4}$

d) • $G(x) = \int sen\ \frac{x}{4} = -4\ cos\ \frac{x}{4}$

• $G(0) = -4;\ \ G(\pi) = -\frac{4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

• $\int_0^{\pi} sen\ \frac{x}{4} = G(\pi) - G(0) = -2\sqrt{2} + 4$

Cálculo de áreas

s12 Halla, en cada caso, el área limitada por:

a) $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) $f(x) = 2x - x^2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje X.

d) $f(x) = 1 - x^2$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

e) $f(x) = e^x$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

f) $f(x) = x^2 + 1$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

a) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

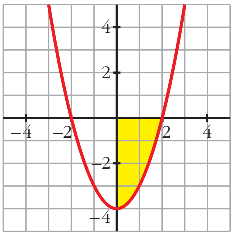
Solo nos sirve $x_2 = 2$.

• Hay un recinto: [0, 2]

• $G(x) = \int (x^2 - 4)\ dx = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(2) = -\frac{16}{3};\ \ G(0) = 0$

• Área $= |G(2) - G(0)| = \frac{16}{3}$ u^2



b) • Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

Hay dos recintos: I [–1, 0]; II [0, 1]

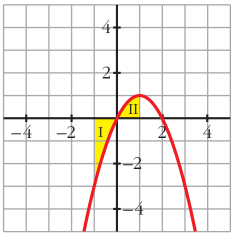
• $G(x) = \int (2x - x^2)\ dx = x^2 - \frac{x^3}{3}$

• $G(-1) = \frac{4}{3};\ \ G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{2}{3}$

• Área del recinto I $= |G(0) - G(-1)| = \frac{4}{3}$

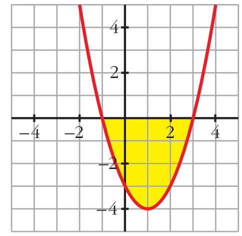
Área del recinto II $= |G(1) - G(0)| = \frac{2}{3}$

Área total $= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$ u^2



c) • Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

• Hay un recinto: [–1, 3]



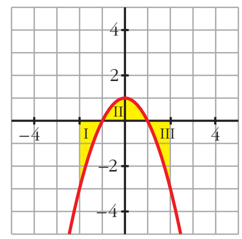
• $G(x) = \int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$

• $G(-1) = \dfrac{5}{3};\ \ G(3) = -9$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = \left|-9 - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$

d) • Puntos de corte con el eje X: $1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

• Hay tres recintos: I [–2, –1]; II [–1, 1]; III [1, 2]



• $G(x) = \int (1 - x^2)\, dx = x - \dfrac{x^3}{3}$

• $G(-2) = \dfrac{2}{3};\ \ G(-1) = -\dfrac{2}{3};$

$G(1) = \dfrac{2}{3};\ \ G(2) = -\dfrac{2}{3}$

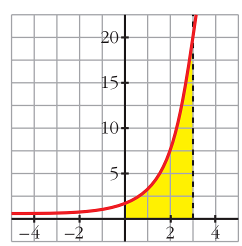
• Área del recinto I $= |G(-1) - G(-2)| = \left|-\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto II $= |G(1) - G(-1)| = \left|\dfrac{2}{3} - -\left(\dfrac{2}{3}\right)\right| = \dfrac{4}{3}$

Área del recinto III $= |G(2) - G(1)| = \dfrac{4}{3}$

Área total $= 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4\ \text{u}^2$

e) • No corta al eje X.



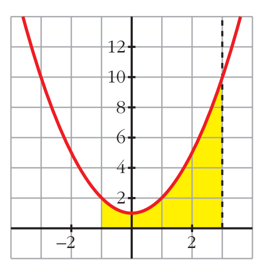
• $G(x) = \int e^x\, dx = e^x$

• $G(-1) = e^{-1};\ \ G(3) = e^3$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = e^3 - e^{-1} =$

$= e^3 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e^4 - 1}{e} \approx 19{,}7\ \text{u}^2$

f) • No corta al eje X.



• $G(x) = \int (x^2 + 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + x$

• $G(-1) = -\dfrac{4}{3};\ \ G(3) = 12$

• Área $= |G(3) - G(-1)| = \dfrac{40}{3}\ \text{u}^2$

s13 **Calcula el área comprendida entre las curvas:**

a) $y = x^2$; $y = x$ **b)** $y = x^2$; $y = 1$

c) $y = x^2$; $y = x^3$ **d)** $y = x^2$; $y = -x^2 + 2x$

e) $y = 2x^2 + 5x - 3$; $y = 3x + 1$ **f)** $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$; $x = -2$; $x = 2$

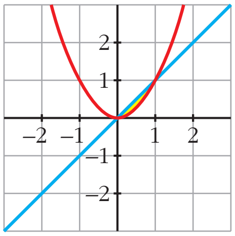
a) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

• $G(0) = 0;\ \ G(1) = -\frac{1}{6}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{6}\ \text{u}^2$



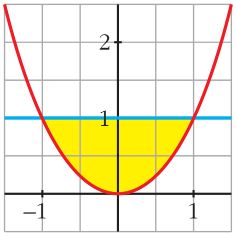
b) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$

• $G(-1) = \frac{2}{3};\ \ G(1) = -\frac{2}{3}$

• Área $= |G(1) - G(-1)| = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$



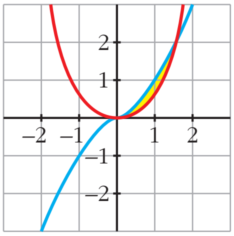
c) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0;\ \ G(1) = \frac{1}{12}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{12}\ \text{u}^2$



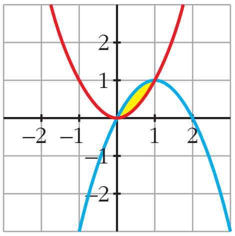
d) • Puntos de corte entre las curvas:

$x^2 - (-x^2 + 2x) = 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

• $G(x) = \int (2x^2 - 2x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - x^2$

• $G(0) = 0;\ \ G(1) = -\frac{1}{3}$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{3}\ \text{u}^2$



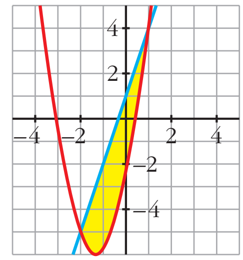
e) • Puntos de corte entre las curvas:

$2x^2 + 5x - 3 - (3x + 1) = 2x^2 + 2x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\;\; x_2 = 1$

• $G(x) = \displaystyle\int (2x^2 + 2x - 4)\, dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{20}{3};\;\; G(1) = -\dfrac{7}{3}$

• Área $= |G(1) - G(2)| = \left| -\dfrac{7}{3} - \dfrac{20}{3} \right| = \dfrac{27}{3} = 9 \text{ u}^2$



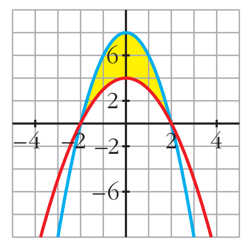
f) • Puntos de corte entre las curvas:

$4 - x^2 - (8 - 2x^2) = x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -2,\;\; x_2 = 2$

• $G(x) = \displaystyle\int (x^2 - 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 4x$

• $G(-2) = \dfrac{16}{3};\;\; G(2) = -\dfrac{16}{3}$

• Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{32}{3} \text{ u}^2$



PARA RESOLVER

s14 Calcula el área de los recintos limitados por:

a) La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y los ejes de coordenadas.

b) La curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X.

c) La función $y = sen\, x$, el eje de abscisas y las rectas $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

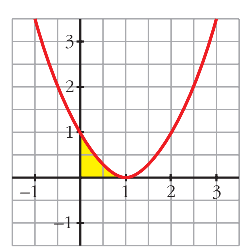
d) La función $y = cos\, x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

a) • $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

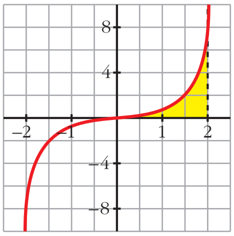
• $G(x) = \displaystyle\int (x - 1)^2\, dx = \frac{(x - 1)^3}{3}$

• $G(0) = -\dfrac{1}{3};\;\; G(1) = 0$

• Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{1}{3} \text{ u}^2$



b) • $x^3 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$



• $G(x) = \int x^3\, dx = \dfrac{x^4}{4}$

• $G(0) = 0;\;\; G(2) = 4$

• Área $= |G(2) - G(0)| = 4$ u^2

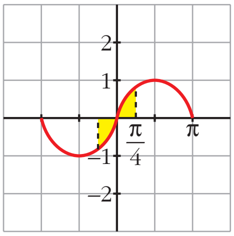
c) • $sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\left(\text{entre } -\dfrac{\pi}{4} \text{ y } \dfrac{\pi}{4}\right)$

• Hay dos recintos: $\text{I}\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right];\;\; \text{II}\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

• $G(x) = \int sen\, x\, dx = -cos\, x$

• $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2};\;\; G(0) = -1$

• Área del recinto I $= \left|G(0) - G\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = 0{,}29$



Área del recinto II $= \left|G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - G(0)\right| = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}29$

Área total $= 2 \cdot 0{,}29 \approx 0{,}58$ u^2

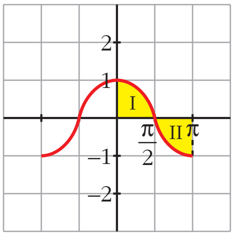
d) • $cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4}$ (entre 0 y π)

• Hay dos recintos: $\text{I}\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right];\;\; \text{II}\left[\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

• $G(x) = \int cos\, x\, dx = sen\, x$

• $G(0) = 0;\;\; G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;\;\; G(\pi) = 0$

• Área del recinto I $= \left|G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - G(0)\right| = 1$



Área del recinto II $= |G(\pi) - G(0)| = 1$

Área total $= 1 + 1 = 2$ u^2

s15 Calcula el área comprendida entre las curvas:

a) $y = x^2$ **e** $y = 3 - 2x$

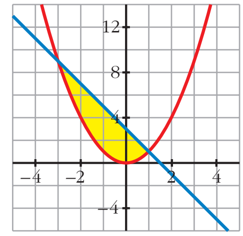
b) $y = 4 - x^2$ **e** $y = 3x^2$

c) $y = x$ **e** $y = x^2 - 2$

d) $y = 4 - x^2$ **e** $y = x^2 - 4$

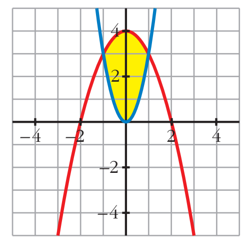
e) $y = (x + 2)^2 (x - 3)$ **y el eje de abscisas.**

a) $x^2 - (3 - 2x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -3, \ \ x_2 = 1$



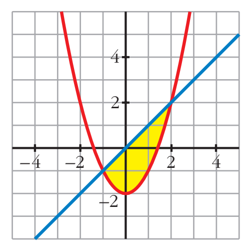
- $G(x) = \int (x^2 + 2x - 3)\ dx = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x$
- $G(-3) = 0; \ \ G(1) = -\dfrac{5}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-3)| = \dfrac{32}{3}$ u^2

b) $4 - x^2 - 3x^2 = 4 - 4x^2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -1, \ \ x_2 = 1$



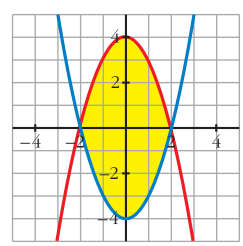
- $G(x) = \int (4 - 4x^2)\ dx = 4x - \dfrac{4x^3}{3}$
- $G(-1) = -\dfrac{8}{3}; \ \ G(1) = \dfrac{8}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-1)| = \dfrac{16}{3}$ u^2

c) $x - (x^2 - 2) = x - x^2 + 2 = -x^2 + x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -1, \ \ x_2 = 2$



- $G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\ dx = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$
- $G(-1) = -\dfrac{7}{6}; \ \ G(2) = \dfrac{7}{6}$
- Área $= |G(2) - G(-1)| = \dfrac{9}{2}$ u^2

d) $4 - x^2 - (x^2 - 4) = -2x^2 + 8 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -2, \ \ x_2 = 2$

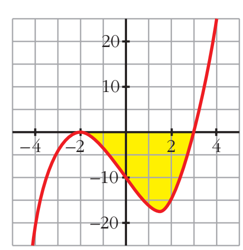


- $G(x) = \int (-2x^2 + 8)\ dx = -\dfrac{2x^3}{3} + 8x$
- $G(-2) = -\dfrac{32}{3}; \ \ G(2) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(2) - G(-2)| = \dfrac{64}{3}$ u^2

e) $(x + 2)^2 (x - 3) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -2, \ \ x_2 = 3$

- $G(x) = \int (x + 2)^2 (x - 3)\ dx = \int (x^3 + x^2 - 8x - 12)\ dx =$

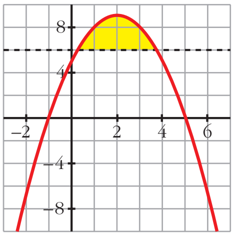
  $= \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 - 12x$



- $G(-2) = \dfrac{28}{3}; \ \ G(3) = -\dfrac{171}{4}$
- Área $= |G(3) - G(-2)| = \dfrac{625}{12} \approx 52{,}1$ u^2

s16 **Halla el área comprendida entre la curva $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.**

$-x^2 + 4x + 5 - 5 = -x^2 + 4x = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$



- $G(x) = \int (-x^2 + 4x)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$
- $G(0) = 0;\;\; G(4) = \dfrac{32}{3}$
- Área $= |G(4) - G(0)| = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$

s17 **Calcula el área limitada por las siguientes curvas:**

a) $y = x^3 + x^2;\;\; y = x^3 + 1;\;\; x = -1;\;\; x = 1$

b) $y = x^2;\;\; y = 1 - x^2;\;\; y = 2$

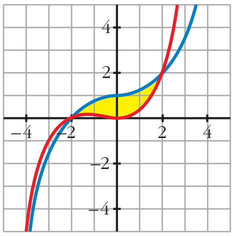
c) $y = x(x-1)(x-2);\;\; y = 0$

d) $y = x^2 - 2x;\;\; y = x$

e) $y = x^3 - 2x;\;\; y = -x^2$

f) $y = 2x - x^3;\;\; y = x^2$

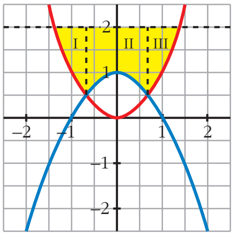
a) $x^3 + x^2 - (x^3 + 1) = x^2 - 1 = 0 \;\to\; x_1 = -1,\; x_2 = 1$



- $G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} - x$
- $G(-1) = \dfrac{2}{3};\;\; G(1) = -\dfrac{2}{3}$
- Área $= |G(1) - G(-1)| = \dfrac{4}{3}\ \text{u}^2$

b) $x^2 = 1 - x^2 \;\to\; 2x^2 - 1 = 0 \;\to\; x_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\;\; x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 2 \;\to\; x_3 = -\sqrt{2},\;\; x_4 = \sqrt{2}$



- Tenemos tres recintos:

  I $\left[-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; II $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; III $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

- Para el I y el III hay que considerar:

  $G_1(x) = \int (2 - x^2)\, dx = x - \dfrac{x^3}{3}$

  $G_1(-\sqrt{2}) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\;\; G_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{11\sqrt{2}}{12};\;\; G_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{11\sqrt{2}}{12};\;\; G_1(\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Área del recinto I $= \left| G_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1\left(-\sqrt{2}\right) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

Área del recinto III $= \left| G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_1\left(\sqrt{2}\right) \right| = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

- Para el II hay que considerar:

$G_2(x) = \int (2 - 1 + x^2)\,dx = \int (1 + x^2)\,dx = x + \frac{x^3}{3}$

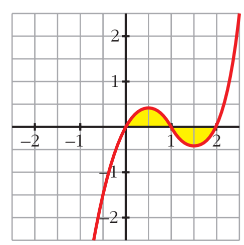
$G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}$; $G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{12}$

Área del recinto II $= \left| G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \frac{7\sqrt{2}}{6}$

- Área total $= \frac{5\sqrt{2}}{12} + \frac{7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{12\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}\ \text{u}^2$

c) $x(x-1)(x-2) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; x_3 = 2$

- Hay dos recintos: I [0, 1]; II [1, 2]
- $G(x) = \int x(x-1)(x-2)\,dx = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$
- $G(0) = 0$; $G(1) = \frac{1}{4}$; $G(2) = 0$



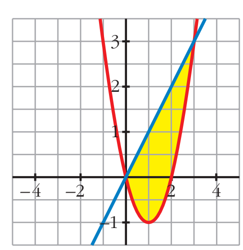
- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \frac{1}{4}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \frac{1}{4}$

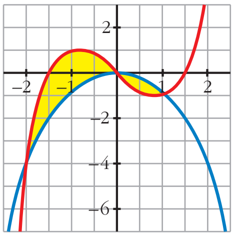
Área total $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \text{u}^2$

d) $x^2 - 2x - x = x^2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 3$

- $G(x) = \int (x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
- $G(0) = 0$; $G(3) = -\frac{9}{2}$
- Área $= |G(3) - G(0)| = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$



e) $x^3 - 2x - (-x^2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1$



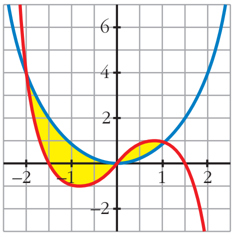
- Hay dos recintos: I [–2, 0]; II [0, 1]
- $G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$
- $G(-2) = -\frac{8}{3}$; $G(0) = 0$; $G(1) = -\frac{5}{12}$
- Área del recinto I = $|G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$

  Área del recinto II = $|G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$

  Área total = $\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$ u^2

f) Por simetría respecto al anterior, el área es la misma:

Área total = $\frac{37}{12}$ u^2



18 **Un depósito se vacía de forma variable según la función $v(t) = 5 - 0{,}1t$ (t en min, v en l/min).**

Calcula lo que se ha vaciado el depósito entre los minutos 100 y 200.

$G(t) = \int (5 - 0{,}1t)\, dt = 5t - \frac{0{,}1t^2}{2} = 5t - 0{,}05t^2$

$G(200) = -1\,000$; $G(100) = 0$

Área = $|G(200) - G(100)| = 1\,000$

Se han vaciado 1 000 litros entre los minutos 100 y 200.

s19 **Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?**

Consideramos t entre 0 y 24 horas:

$$\int_0^{24} (0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1)\, dt = \left[\frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^{24} =$$

$$= 219{,}84 - 0 = 219{,}84 \text{ kg}$$

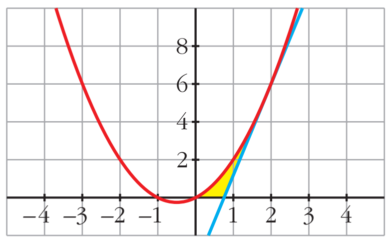
s20 **Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abscisas.**

- Recta tangente en $x = 2$:

  $y' = 1 + 2x \;\rightarrow\; m = y'(2) = 5;\;\; y(2) = 6$

  Recta $\rightarrow\; y = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$

- Hacemos las gráficas para entender mejor la situación:



- Puntos de corte de $y = x + x^2$ con el eje X:

  $x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\;\; x_2 = 0$

- Punto de corte de $y = 5x - 4$ con el eje X:

  $5x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4}{5}$

- Área bajo $y = x + x^2$ entre 0 y 2:

  $G_1(x) = \displaystyle\int (x + x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

  $G_1(2) = \dfrac{14}{3};\;\; G_1(0) = 0$

  Área $= |G_1(2) - G_1(0)| = \dfrac{14}{3}\ \text{u}^2$

- Área bajo $y = 5x - 4$ entre $\dfrac{4}{5}$ y 2:

  $G_2(x) = \displaystyle\int (5x - 4)\, dx = \frac{5x^2}{2} - 4x$

  $G_2\left(\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{8}{5};\;\; G_2(2) = 2$

  Área $= \left|G_2(2) - G_2\left(\dfrac{4}{5}\right)\right| = 2 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{18}{5}\ \text{u}^2$

- El área buscada es: $\dfrac{14}{3} - \dfrac{18}{5} = \dfrac{16}{15}\ \text{u}^2$

Página 228

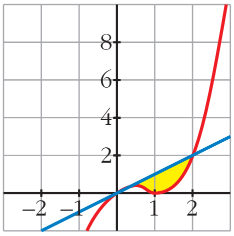
21 **Dada $y = x^3 - 2x^2 + x$, halla la ecuación de su tangente en el origen y calcula el área de la región encerrada entre la curva y la tangente.**

- Tangente en el origen:

  $y' = 3x^2 - 4x + 1;\ \ m = y'(0) = 1;\ \ y(0) = 0$

  Recta $\rightarrow$ $y = x$

- $x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

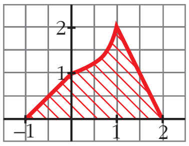


- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3}$

- $G(0) = 0;\ \ G(2) = -\dfrac{4}{3}$

- Área $= |G(2) - G(0)| = \dfrac{4}{3}\ u^2$

22 **Halla el área de la figura sabiendo que el lado curvo corresponde a la función $y = x^2 + 1$.**



- Entre –1 y 0 tenemos un triángulo de base 1 y altura 1:

  Área $= \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}\ u^2$

- Entre 1 y 2 tenemos un triángulo de base 1 y altura 2:

  Área $= \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1\ u^2$

- Entre 0 y 1:

  $G(x) = \int (x^2 + 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + x$

  $G(0) = 0;\ \ G(1) = \dfrac{4}{3}$

  Área $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{4}{3}\ u^2$

- El área total será: $\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{17}{6}\ u^2$

23 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, escribe las ecuaciones de las tangentes a f en los puntos de corte con el eje de abscisas. Halla el área comprendida entre las rectas tangentes y la curva.**

- Puntos de corte con el eje X:

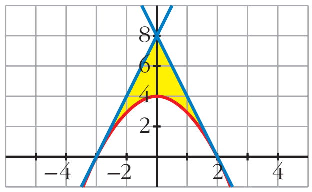
  $4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2 \rightarrow$ Puntos (–2, 0) y (2, 0)

- $f'(x) = -2x;\ \ f'(-2) = 4;\ \ f'(2) = -4$

- Recta tangente en $x = -2 \ \rightarrow \ y = 4(x + 2) = 4x + 8$

  Recta tangente en $x = 2 \ \rightarrow \ y = -4(x - 2) = -4x + 8$

- Hacemos una gráfica para entenderlo mejor:



- Área del triángulo de vértices (–2, 0), (0, 8) y (2, 0):

  $$\text{Área} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \text{ u}^2$$

- Área entre $y = 4 - x^2$ y el eje X:

  $$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

  $$G(-2) = -\frac{16}{3}; \quad G(2) = \frac{16}{3}$$

  $$\text{Área} = |G(2) - G(-2)| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

- El área total será la diferencia:

  $$16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} \text{ u}^2$$

24 **Dada $f(x) = x + 1$, halla:**

a) $\int_0^x f$ **b)** $\int_1^x f$ **c)** $\int_{-1}^x f$ **d)** $\int_1^3 f$

$$G(x) = \int (x + 1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{3}{2}; \quad G(-1) = -\frac{1}{2}; \quad G(3) = \frac{15}{2}$$

a) $\int_0^x f = G(x) - G(0) = \frac{x^2}{2} + x$

b) $\int_1^x f = G(x) - G(1) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

c) $\int_{-1}^x f = G(x) - G(-1) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$

d) $\int_1^3 f = G(3) - G(1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$

25 **a) Halla el área limitada por $y = |2x - 4|$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.**

b) Calcula $\int_{-2}^{3} |2x - 4|$.

a) Definimos la función por intervalos para hacernos una idea de su forma:

$$y = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & x \le 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

El área buscada será:

$$\int_0^5 y\,dx = \int_0^2 (-2x + 4)\,dx + \int_2^5 (2x - 4)\,dx = \left[-x^2 + 4x\right]_0^2 + \left[x^2 - 4x\right]_2^5 =$$

$$= (4 - 0) + (5 + 4) = 4 + 9 = 13 \text{ u}^2$$

b) $$\int_{-2}^{3} |2x - 4|\,dx = \int_{-2}^{2} (-2x + 4)\,dx + \int_2^3 (2x - 4)\,dx = \left[-x^2 + 4x\right]_{-2}^{2} + \left[x^2 - 4x\right]_2^3 =$$

$$= (4 + 12) + (-3 + 4) = 16 + 1 = 17 \text{ u}^2$$

26 **Calcula: a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx$, siendo:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

a) $$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2 - x)\,dx$$

$$G_1(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \rightarrow G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$G_2(x) = \int (2 - x)\,dx = 2x - \frac{x^2}{2} \rightarrow G_2(2) - G_2(1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Así: $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

b) $$\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx + \int_1^3 (x^2 + 1)\,dx$$

$$G_1(x) = \int 2x\,dx = x^2 \rightarrow G_1(1) - G_1(-1) = 1 - 1 = 0$$

$$G_2(x) = \int (x^2 + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x \rightarrow G_2(3) - G_2(1) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

Así: $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = \frac{32}{3}$

s27 Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < \dfrac{-1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si } \dfrac{-1}{2} \le x \le 3 \\ |x + 3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Para x comprendida entre 0 y 3, tenemos que: $f(x) = -x^2 + 3x$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX:

$$-x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$\text{Área} = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ u}^2$$

28 Halla una función f de la cual sabemos que $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y que $f(1) = 0$.

$G(x) = \int (3x^2 - 2x + 5)\, dx = x^3 - x^2 + 5x + k$ son las primitivas de la función dada.

Entre todas ellas, nos interesa la que cumple que $G(1) = 0$, es decir:

$$G(1) = 5 + k = 0 \Rightarrow k = -5$$

Así: $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$

29 Halla la función primitiva de la función $y = 3x^2 - x^3$ que pasa por el punto $(2, 4)$.

$G(x) = \int (3x^2 - x^3)\, dx = x^3 - \dfrac{x^4}{4} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que pase por $(2, 4)$:

$$G(2) = 4 + k = 4 \Rightarrow k = 0$$

La función que buscamos es: $f(x) = x^3 - \dfrac{x^4}{4}$

30 Halla la función que toma el valor 2 en $x = 1$ y cuya derivada es:

$$f'(x) = 3x^2 + 6$$

$G(x) = \int (3x^2 + 6)\, dx = x^3 + 6x + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(1) = 2$:

$$G(1) = 7 + k = 2 \Rightarrow k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + 6x - 5$

31 **Halla la primitiva de $f(x) = 1 - x - x^2$ que corte al eje de abscisas en $x = 3$.**

$G(x) = \int (1 - x - x^2)\, dx = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k$ son las primitivas de la función dada.

Buscamos k para que $G(3) = 0$:

$$G(3) = -\frac{21}{2} + k \Rightarrow k = \frac{21}{2}$$

La función que buscamos es:

$$y = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{21}{2}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

32 **Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de f, ¿se verifica necesariamente que $F(x) = k + G(x)$? Justifica la respuesta.**

Sí. Justificación:

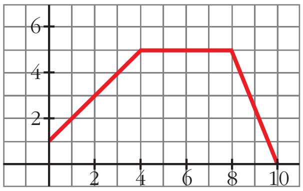
$$\int f\, dx = F(x) + c_1 \qquad \int f\, dx = G(x) + c_2$$

Restando:

$$0 = F(x) - G(x) + (c_1 - c_2) \Rightarrow F(x) = k + G(x)$$

33 **a) Calcula el área bajo la gráfica de la derecha en los intervalos [0, 2] y [2, 6].**

b) Si esta gráfica representa la velocidad (m/s) de un móvil en función del tiempo, ¿qué representa cada una de las áreas anteriores?



a) El área en el intervalo [0, 2] es la de un trapecio rectángulo de bases 1 y 3 y altura 2.

$$A_{[0,\,2]} = \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4 \rightarrow \int_0^2 f\, dx = 4$$

En el intervalo [2, 6], el área es la suma de las áreas de un trapecio y de un rectángulo.

$$A_{[2,\,6]} = \frac{3+5}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 18 \rightarrow \int_2^6 f\, dx = 18$$

b) En una gráfica *velocidad-tiempo*, estas áreas representan el espacio recorrido por un móvil en los intervalos de tiempo [0, 2] y [2, 6].

34 **a)** **Representa la función $f(x) = 2x$ y halla el área limitada por f en los intervalos [0, 1], [0, 2], [0; 2,5] y [0, 3].**

b) **Haz una tabla de valores de la función $F(x) = \int_0^x f$ y represéntala.**

c) **¿Cuál de estas ecuaciones corresponde a la expresión analítica de $F(x)$?:**

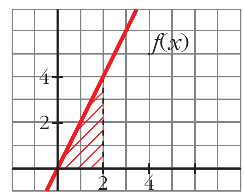
I) $y = \frac{x^2}{2}$ **II)** $y = 2x^2$ **III)** $y = x^2$ **IV)** $y = x^2 + 1$

d) **Comprueba que la derivada de la función área coincide con la función que limita esa área.**

a) Tenemos que hallar en cada caso el área de un triángulo cuya base es la amplitud del intervalo correspondiente y cuya altura es $2x$:

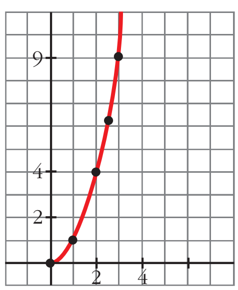
$A_{[0,\ 1]} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ $A_{[0,\ 2]} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

$A_{[0;\ 2,5]} = \frac{2,5 \cdot 5}{2} = 6,25$ $A_{[0,\ 3]} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$



b)

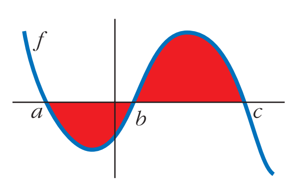
x	0	1	2	2,5	3	4	5
F(x)	0	1	4	6,25	9	16	25



c) Observamos que solo la III pasa por todos los puntos de la tabla de valores del apartado b).

d) Como $F(x) = x^2 \rightarrow F'(x) = 2x = f(x)$

35 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

d)

36 **Siendo $F(x) = \int_1^x f = 3x^2 - 5x$, halla la función f. Calcula $F(0)$ y $F(2)$.**

$f(x) = F'(x) = 6x - 5$

$F(0) = 0;\ \ F(2) = 2$

37 **Calcula el área bajo la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo variable $[1, x]$. Halla el área para $x = 4$.**

$x^2 - 1 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = -1,\ \ x_2 = 1$

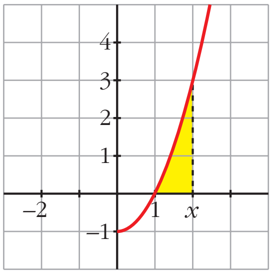
$\text{Área} = \int_1^x (t^2 - 1)\, dt$

$G(t) = \int (t^2 - 1)\, dt = \dfrac{t^3}{3} - t$

$G(1) = -\dfrac{2}{3}$

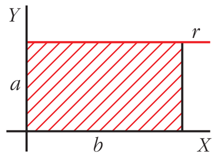
$\text{Área } [1, x] = |G(x) - G(1)| = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3}$

Cuando $x = 4$, queda: Área $[1, 4] = 18$ u^2



Página 229

38 **Demuestra, utilizando integrales, que el área del rectángulo es $A = b \cdot a$.**



☛ ***Halla la ecuación de la recta r y calcula el área limitada por r y el eje OX entre $x = 0$ y $x = b$.***

La ecuación de r es $y = a$. El área es:

$$\text{Área} = \int_0^b a\, dx$$

$G(x) = \int a\, dx = ax$

$G(b) = ab;\ \ G(0) = 0$

$\text{Área} = G(b) - G(0) = ab$

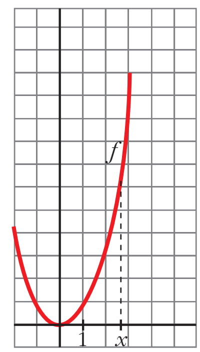
PARA PROFUNDIZAR

39 **Sabiendo que esta gráfica corresponde a $f(x) = x^2$, justifica cuál de las siguientes funciones es $F(x) = \int_1^x f$:**

a) $F(x) = x^3 - 1$

b) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

c) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$



Como debe cumplirse que $F'(x) = f(x)$, no puede ser $F(x) = x^3 - 1$, ya que $F'(x) = 3x^2$.

Cualquiera de las otras dos cumple que:

$F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$.

Tiene que verificarse, además, que $F(1) = 0$.

Por ello, descartamos el caso b), en el que $F(1) = \dfrac{1}{3}$.

La solución es la c): $\int_1^x f = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}$

40 **a) Dada la función $f(x) = x + 1$, obtén $F(x) = \int_3^x f$.**

b) Halla, después, $\int_3^5 f$.

a) Empezamos buscando la función que cumpla $F'(x) = f(x)$.

Será $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + k$, pues $F'(x) = \dfrac{2x}{2} + 1 = x + 1$.

Además, $F(3) = 0 \rightarrow \dfrac{9}{2} + 3 + k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{15}{2}$.

Por tanto: $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{15}{2}$

b) $\int_3^5 f\,dx = F(5) = \dfrac{25}{2} + 5 - \dfrac{15}{2} = 10$

s41 **Dada la función $f(x) = a\,e^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$:**

a) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ en función de a.

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = 1/2$.

a) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(ae^{x/3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[3ae^{x/3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 =$

$$= \left(3ae^{2/3} - \frac{1}{2}\right) - (3ae^{1/3} - 1) = 3a(e^{2/3} - e^{1/3}) + \frac{1}{2}$$

b) Si F es una primitiva de f, tenemos que:

$F(x) = 3ae^{x/3} - \dfrac{1}{x} + k$

Tenemos que hallar k y a para que:

$$\left.\begin{array}{ll} F(1) = 0 & \to\ 3ae^{1/3} - 1 + k = 0 \\ F(2) = \dfrac{1}{2} & \to\ 3ae^{2/3} - \dfrac{1}{2} + k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3ae^{1/3} + k = 1 \\ 3ae^{2/3} + k = 1 \end{array}\right\}$$

Restando la 2.ª ecuación menos la 1.ª:

$3a(e^{2/3} - e^{1/3}) = 0 \ \to\ a = 0 \ \to\ k = 1$

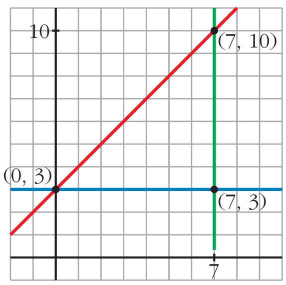
Por tanto: $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 1$

s42 **Expresa por una integral el área del triángulo de vértices (0, 3), (7, 3) y (7, 10). Explica el significado de la integral escrita.**

- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 10) es:

  Pendiente $= \dfrac{10-3}{7-0} = \dfrac{7}{7} = 1$

  Ecuación: $y = x + 3$



- La ecuación de la recta que pasa por (0, 3) y (7, 3) es $y = 3$.

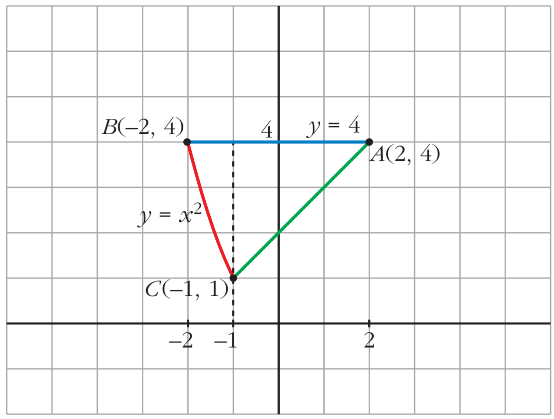
  El área del triángulo es el área comprendida entre las dos rectas anteriores y $x = 7$. Así, tenemos que:

  $$\text{Área} = \int_0^7 [(x+3) - 3]\,dx = \int_0^7 x\,dx = \text{Área}$$

  El área del triángulo es equivalente al área limitada por $y = x$, $x = 0$ y $x = 7$.

- Calculamos su valor: $\displaystyle\int_0^7 x\,dx = \frac{49}{2}$ u^2

s43 **Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 4)$ y $C(-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.**



- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por A y C:

$$\text{Pendiente} = \frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

Ecuación: $y = 4 + (x - 2) = x + 2$

- Calculamos el área pedida:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1}(4 - x^2)\, dx + \int_{-1}^{2}[4 - (x + 2)]\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{2}(2 - x)\, dx =$$

$$= \left(-4 + \frac{1}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{3} + 2 + \frac{5}{2} = \frac{37}{6}\ \text{u}^2$$

s44 **La curva $y = a[1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.**

- Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$a[1 - (x - 2)^2] = 0 \;\rightarrow\; (x - 2)^2 = 1 \;\begin{cases} x - 2 = 1 \;\rightarrow\; x = 3 \\ x - 2 = -1 \;\rightarrow\; x = 1 \end{cases}$$

- Calculamos el área e igualamos a 12:

$$\text{Área} = \int_{1}^{3} a[1 - (x - 2)^2]\, dx = a\left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_{1}^{3} =$$

$$= a\left[3 - \frac{1}{3} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] = a\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4a}{3} = 12 \;\rightarrow\; a = 9$$

Página 229

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve las integrales siguientes:

a) $\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx$ **b)** $\int \frac{1 - x^3}{x}\, dx$ **c)** $\int \left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx$

d) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx$ **e)** $\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx$ **f)** $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$

a) $\int \left(\frac{7}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{3}\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{2}x + k = \frac{7}{9}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + k$

b) $\int \frac{1 - x^3}{x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^2\, dx = ln\,|x| - \frac{x^3}{3} + k$

c) $\int \left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\int -\frac{5}{2}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^2 dx = -\frac{2}{5}\,\frac{1}{3}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k = \frac{-2}{15}\left(\frac{3 - 5x}{2}\right)^3 + k$

d) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \sqrt{2x}\right) dx = \int 2x^{-2}\, dx + \int \sqrt{2}\, x^{1/2}\, dx = 2\frac{x^{-1}}{-1} + \sqrt{2}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + k =$

$= -\frac{2}{x} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + k$

e) $\int x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2 + 1)^{1/2}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + k = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2 + 1)^3} + k$

f) $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x + 4 \\ \cline{1-1} 4x - 2 & \\ -4x + 4 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1} = x + 4 + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 1}\, dx = \int \left(x + 4 + \frac{2}{x - 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln\,|x - 1| + k$$

2. **Calcula:**

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x+2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x-1}\, dx$

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{2}{x+2}\, dx = \left[2\ ln\ |x+2|\right]_{-1}^{3} = 2[ln\ 5 - ln\ 1] = 2\ ln\ 5$

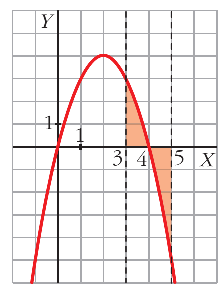
b) $\displaystyle\int_{1/3}^{2} e^{3x-1}\, dx = \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2} 3e^{3x-1} = \frac{1}{3}\left[e^{3x-1}\right]_{1/3}^{2} = \frac{1}{3}(e^5 - e^0) = \frac{e^5-1}{3}$

3. **Calcula el área limitada por $f(x) = 4x - x^2$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $x = 5$.**

Representamos $y = 4x - x^2$.

Cortes con los ejes $\left\langle \begin{array}{l} x = 0,\ \ y = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

Vértice: $y' = 0 \ \rightarrow\ 4 - 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 2,\ \ y = 4$

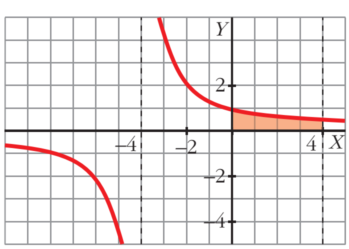


$$\text{Área} = \int_{3}^{4} (4x - x^2)\, dx + \left|\int_{4}^{5} (4x - x^2)\, dx\right| =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{3}^{4} + \left|\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{4}^{5}\right| = \left(\frac{32}{3} - 9\right) + \left|-\frac{7}{3}\right| = 4\ \text{u}^2$$

4. **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 4$ limitan una superficie S. Calcula el área de S.**

Representamos $y = \dfrac{4}{x+4}$. Sus asíntotas son $x = -4$ e $y = 0$.



$$\text{Área} = \int_{0}^{4} \frac{4}{x+4}\, dx = 4\left[ln\ |x+4|\right]_{0}^{4} =$$

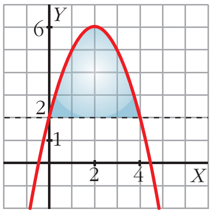
$$= 4(ln\ 8 - ln\ 4) = 4\ ln\ \frac{8}{4} = 4\ ln\ 2 \simeq 2{,}77\ \text{u}^2$$

5. **El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión $c(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo t el tiempo en horas, $0 \le t \le 6$. ¿Cuánto consume el motor en las 6 horas que dura el trabajo?**

El consumo equivale al área encerrada por la función $c(t)$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 6$.

$$c = \int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\, dx = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{8t^2}{2} + 20t\right]_0^6 = -\frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 192$$

6. **Para cerrar una vidriera, se ha de colocar un cristal cuya superficie está limitada por las funciones $y = 2$ e $y = -(x-2)^2 + 6$. Dibuja el cristal y calcula su área (x e y en dm).**



$y = -(x-2)^2 + 6$ es una parábola de vértice (2, 6).

Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 2$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 4x + 2 = 0 \begin{cases} x = -0{,}45 \\ x = 4{,}45 \end{cases}$

Puntos de corte de la curva con $y = 2$:

$2 = -(x-2)^2 + 6 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0, \ y = 2 \\ x = 4, \ y = 2 \end{cases}$

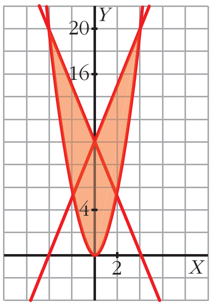
Área del cristal $= \displaystyle\int_0^4 [-(x-2)^2 + 6 - 2]\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx =$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \text{ dm}^2$$

7. **Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones siguientes y calcula su área:**

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \qquad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

Representamos la parábola $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $h(x)$.



- Cortes de $f(x)$ y $g(x)$:

$\dfrac{5}{4}x^2 = \dfrac{1}{2}(5x + 20) \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2, \ y = 5 \\ x = 4, \ y = 20 \end{cases}$

- Cortes de $f(x)$ y $h(x)$:

$\dfrac{5}{4}x^2 = \dfrac{1}{2}(-5x + 20) \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -4, \ y = 20 \\ x = 2, \ y = 5 \end{cases}$

$$\text{Área} = 2\left[\int_0^4 \frac{1}{2}(5x + 20) - \frac{5}{4}x^2\right] dx = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} + 20x\right) - \frac{5}{4}\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\left(60 - \frac{80}{3}\right) = \frac{200}{3} \text{ u}^2$$