Capítulo 2. Matrices y Sistemas de Ecuaciones

2.1 Resumen Teórico de Matrices

2.1.1 Introducción

En la vida diaria nos encontramos con matrices en todas aquellas situaciones en las que aparecen gran cantidad de datos como en los paneles horarios de aviones, horarios de trenes, cotizaciones de la bolsa,... ya que la notación matricial nos permite una mejor visualización de los datos. Así, las matrices se utilizan en Economía, Sociología, Informática, Física,...

Las matrices estudiadas como cajas numéricas en las que se resume una información estructurada fueron utilizadas, ocasionalmente, a lo largo de la historia por muchos matemáticos. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C., un cuadrado mágico es una disposición de números en un cuadrado que, al ser sumados en filas, columnas y diagonales, dan el mismo resultado. Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China.

Sin embargo, su tratamiento sistemático tuvo lugar en el siglo XIX. El término "**matriz**" fue acuñado en 1848, por J.J. Sylvester. En 1853, W.R. Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Y fue A. Cayley quien, en 1858, introdujo la **notación matricial**, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Los estudios de Cayley para describir las transformaciones geométricas dieron lugar a las operaciones con matrices, llegándose así al álgebra matricial, en la que las matrices pasan de ser elementos aislados a ser un conjunto con una sólida estructura algebraica.

2.1.2 Definición

Un conjunto ordenado de números formado por m filas y n columnas se llama matriz de dimensión m x n o de orden m x n.

Por ejemplo, la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 2 x 4 porque consta de dos filas ($m = 2$) y cuatro columnas ($n = 4$).

Las matrices se representan por letras mayúsculas A, B,... o por A_{mxn}, B_{pxq}, ... cuando conviene indicar su orden o dimensión.

Cada número de la matriz se llama elemento de la matriz. Un término genérico cualquiera de la matriz se representa por a_{ij}, los números naturales i y j representan respectivamente la fila y la columna a la que pertenece el elemento a_{ij}.

NOTA: otra manera de representar una matriz es: $A = (a_{ij})$

Siendo $i = 1, 2, 3, \ldots, m$; y $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

2.1.3 Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son iguales, es decir, A = B, si y sólo si son del mismo orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Dadas las matrices siguientes se cumple que:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}; B_{mxn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots\ldots b_{mn} \end{pmatrix}; C_{nxm} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots c_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots\ldots c_{nm} \end{pmatrix}$$

$A = B$, siempre que; $a_{11} = b_{11}$; $a_{12} = b_{12} \ldots a_{mn} = b_{mn}$

Obsérvese que A y C o B y C no pueden ser iguales porque no son matrices del mismo orden aun cuando tuviesen el mismo número de elementos y éstos fueran iguales entre sí.

Por ejemplo, las tres matrices siguientes A, B, C, aunque tienen los mismos elementos no son iguales entre sí. Sí son iguales A y B, pero la matriz C no es igual que A ni que B, pues no tienen la misma dimensión, aunque tienen los mismos elementos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = B, \quad A \neq C, \quad B \neq C.$$

2.1.4 Tipos de matrices

Matriz fila: es una matriz que tiene una sola fila. Es de orden 1 x n.

Matriz columna: es una matriz que tiene una sola columna. Es de orden m x 1

Matriz cuadrada: es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas. Es de orden n x n o simplemente de orden n.

En una matriz cuadrada se llama diagonal principal a la formada por todos los elementos a_{ij} con i=j.

Matriz triangular: es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados a un mismo lado de la diagonal principal son nulos.

Matriz diagonal: es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son nulos.

Matriz unidad o identidad: es una matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1. Se representa por I_n la de orden n.

Matriz nula: es la matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero.

Matriz traspuesta de A: es la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. Se representa por A^t.

Matriz opuesta de A: es la matriz que se obtiene cambiando el signo de todos los elementos de A. se representa por $-A$.

2.1.5 Operaciones con matrices

Suma de matrices

Sean A y B dos matrices del *mismo orden*. La suma de ambas matrices, denotada por A + B, es la matriz que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de cada matriz, es decir:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{+}{+} \underset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots b_{mn} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Se puede observar que la suma de los elementos es algebraica, es decir, se tienen en cuenta los signos de cada elemento de la matriz.

Por último, es importante siempre recordar que la suma sólo puede realizarse entre matrices con el mismo número de filas y columnas, es decir, entre matrices del mismo orden. La adición entre matrices de diferente orden no está definida.

Resta de matrices

Para restar dos matrices, se suma la primera con la opuesta de la segunda:
$A-B=A+(-B)$, por tanto la resta de matrices, al igual que la suma, sólo puede realizarse entre matrices del mismo orden

Producto de una matriz por un número real k (escalar)

Sean A una matriz de cualquier orden y k un número real dado, el producto del escalar k por la matriz A es otra matriz denotada como kA y se obtiene al multiplicar cada elemento de A por k.

Producto de matrices

De la misma manera que la adición está definida únicamente para matrices del mismo orden, el producto de una matriz por otra matriz tiene también una importante restricción:

Sean A y B dos matrices, el producto $A{\cdot}B$ (en ese orden) sólo está definido si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

La multiplicación de matrices:

Sean $A = (a_{ij})$ de dimensión $(m\text{x } n)$ y $B = (b_{ij})$ de dimensión $(n\text{x } p)$, entonces el producto $A{\cdot}B$ (en ese orden) es otra matriz de dimensión $(m\text{x } p)$, $C = (c_{ij})$ en donde:

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A)\cdot(\text{columna } j \text{ de } B).$$

Es decir, el elemento ij de $A{\cdot}B$ es la suma de los productos de cada uno de los elementos de la fila i de A por cada uno de los elementos de la columna j de B respectivamente:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj} \quad \forall i = 1,2,\ldots m\,;\ \forall j = 1,2,\ldots p$$

El producto de matrices **no es conmutativo**, en general $A{\cdot}B \neq B{\cdot}A$

La matriz inversa:

Dada una matriz cuadrada A cuyo determinante sea no nulo, $|A| \neq 0$, se define la matriz inversa de A como la matriz A^{-1}, verificando que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Para el cálculo de la matriz inversa de una matriz A, se pueden utilizar distintas técnicas:

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$, siendo $(Adj(A))$ la matriz de adjuntos, y $|A|$ su determinante.
- También se puede utilizar el método de Gauss para obtener la matriz inversa.