1 SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 29

REFLEXIONA Y RESUELVE

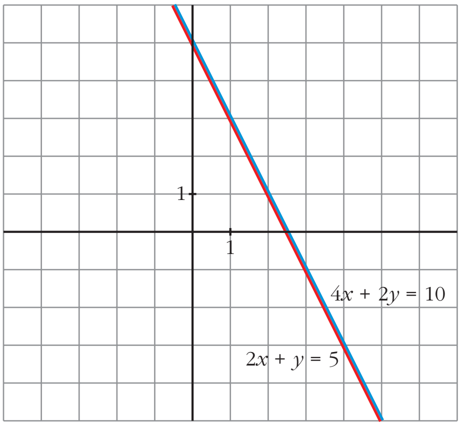
Ecuaciones e incógnitas. Sistemas de ecuaciones

1. ***¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos "datos distintos"? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

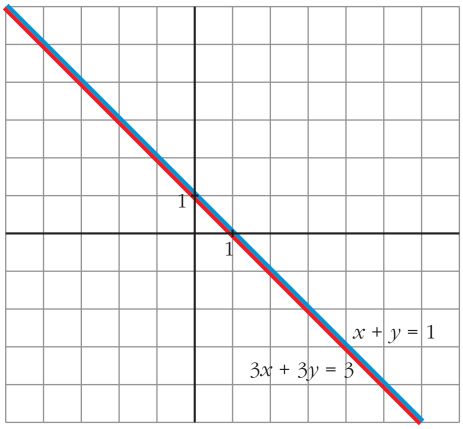
Se trata de la misma recta.



- **Escribe otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

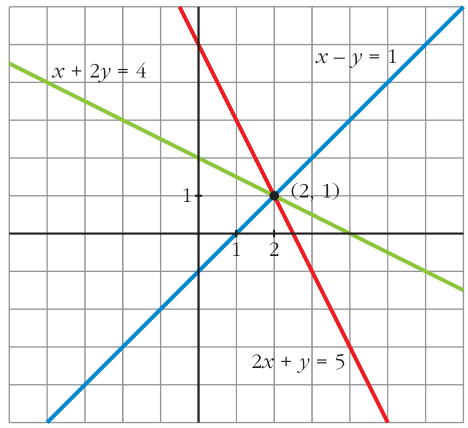
Gráficamente son la misma recta.



2. Observa las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2$, $y = 1$). Comprueba que la tercera recta también pasa por ese punto.**



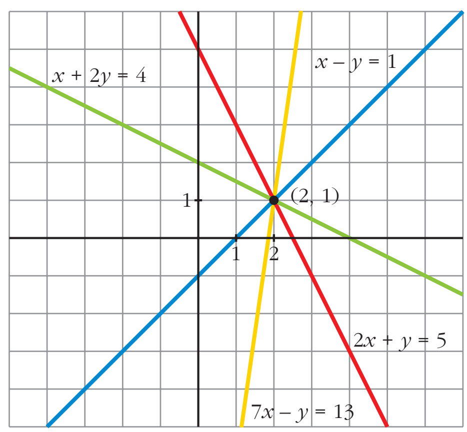
- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras.**

  Por ejemplo:

  $$2 \cdot (1.^a) + 3 \cdot (2.^a)$$

  Represéntala y observa que también pasa por $x = 2$, $y = 1$.

  $2 \cdot 1.^a + 3 \cdot 2.^a \quad \rightarrow \quad 7x - y = 13$

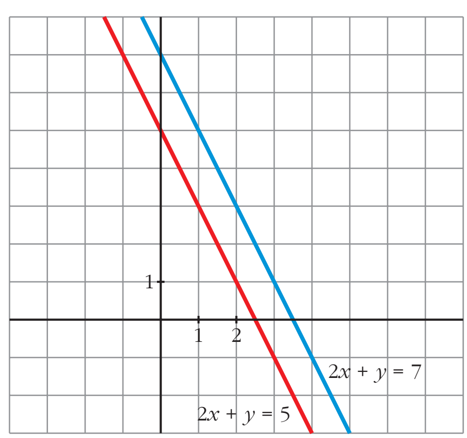


3. Considera ahora estas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Observa que *lo que dice la segunda ecuación es contradictorio con lo que dice la primera.*

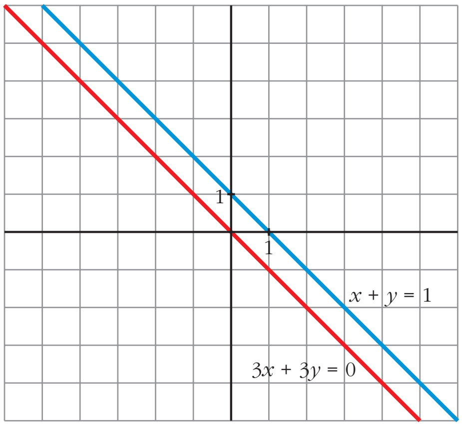
- **Represéntalas y observa que se trata de dos rectas paralelas, es decir, no tienen solución común, pues las rectas no se cortan en ningún punto.**



■ **Modifica el término independiente de la segunda ecuación del sistema que inventaste en el ejercicio 1 y representa de nuevo las dos rectas.**

Observa que lo que dicen ambas ecuaciones es ahora contradictorio y que se representan mediante rectas paralelas.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{array}\right\} \text{ Rectas paralelas:}$$



Página 31

1. Sin resolverlos, explica por qué son equivalentes los siguientes pares de sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{array}\right.$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 33

1. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ \ \ x + \ \ y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + \ \ y + z = 6 \\ \qquad y - z = 1 \\ x + 2y \qquad = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad\qquad z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ \ \ x + \ \ y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \to \ y = 1 - 2x \\ \\ \to \ y = 3 - \ x \end{array}\right\} \ 1 - 2x = 3 - x \ \to \ x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$

Veamos si cumple la 2.ª ecuación: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$

Solución: $x = -2$, $y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + z = 6 \\ \qquad y - z = 1 \\ x + 2y \qquad = 7 \end{array}\right\}$ La 3.ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solución: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \end{array}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias.
El sistema es incompatible.
Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2. a) Resuelve este sistema: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{cases}$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + \ y \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \ \to \ -1 = 3y \ \to \ y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) → Son dos rectas que se cortan en $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En b) → La nueva recta también pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En c) → La nueva recta no pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 34

1. Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{x-5}{2} = \frac{-4}{3} \end{array}$ *Solución:* $x = \frac{7}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solución: $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-2x}{3} = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{7 - x + z}{3} = \frac{16}{9} \end{array}$

Solución: $x = 1$, $y = \frac{16}{9}$, $z = \frac{-2}{3}$

2. **¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = 5 - 3\lambda, \ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - 2 - y = 1 - 2y \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - 2\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solución: $x = 2, \ y = 5, \ z = 1, \ t = 2$

Página 35

3. **Transforma en escalonados y resuelve:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ 3\cdot(2.^a)+(1.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 21 \\ 11x = 33 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \dfrac{21 - 2x}{-3} = -5 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 3, \;\; y = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-(1.^a)\\ (3.^a)-(1.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a):2\\ (3.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)-3\cdot(2.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \;\; y = 2, \;\; z = -1$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-(1.^a)\\ (3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a):(-2)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$

(Podemos prescindir de la 3.ª, pues es igual que la 2.ª).

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$

Soluciones: $x = 1, \;\; y = 5 - \lambda, \;\; z = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)-3\cdot(1.^a)\\ (3.^a)-(1.^a)\\ (4.^a)-(1.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)-3\cdot(2.^a)\\ (4.^a)+2\cdot(2.^a)\end{array}}$ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 38z - 18w = 114 \\ -30z + 16w = -90 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a):2\\ 15\cdot(3.^a)+19\cdot(4.^a)\end{array}}$

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ 34w = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \;\; y = 10, \;\; z = 3, \;\; w = 0$

Página 38

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)\cdot(-1) \\ (3.^a)\cdot 5+(2.^a)\cdot 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 5y+4z=2 \\ 2z=24 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=3 \\ y=\dfrac{2-4z}{5}=-2 \\ x=2-y-z=1 \end{array}$$

Solución: $x=1,\ y=-2,\ z=3$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a)-2\cdot(3.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+5\cdot(2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x-2y=-3 \\ -y+z=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-3+2y \\ z=-2+y \end{array}$$

Soluciones: $x=-3+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=-2+\lambda$

2. Resuelve mediante el método de Gauss:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} 2x-y+w=0 \\ x-2y+z=0 \\ 5x-y+z+w=0 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{array}\right. \qquad \textbf{c)}\left\{\begin{array}{l} 2x-y+w=9 \\ x-2y+z=11 \\ 5x-y+z+w=24 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5-3z}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} \end{array}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda,\;\; y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda,\;\; z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \\ \text{(4.ª)} - 2 \cdot \text{(1.ª)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} + \text{(4.ª)} \\ \text{(4.ª)} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0,\;\; y = 0,\;\; z = 0,\;\; w = 0$

c) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \\ \text{(4.ª)} - 2 \cdot \text{(1.ª)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{(1.ª)} \\ \text{(2.ª)} \\ \text{(3.ª)} + \text{(4.ª)} \\ \text{(4.ª)} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solución: $x = \dfrac{-3}{4},\;\; y = \dfrac{11}{4},\;\; z = \dfrac{69}{4},\;\; w = \dfrac{53}{4}$

Página 39

1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array}\right\} \to$

$\to x = \frac{3-2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$

$z = x - 2 + y = \frac{3-2y}{4} - 2 + y = \frac{-5+2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \frac{3}{4} - \lambda, \; y = 2\lambda, \; z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (3-k) \end{array}\right\}$

$x = \frac{3-k}{k-3} = -1$

$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$

$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$

Solución: $x = -1, \; y = 2 + \frac{k}{2}, \; z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \quad\;\; = k \\ x + \;\; y - z = 2 \\ kx + \;\; y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + \;\; y - z = 2 \\ 4x + 2y \qquad = k \\ (k-3)x \qquad\;\; = (2-k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solución: $x = \dfrac{2-k}{k-3}$, $y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}$, $z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \qquad + z = k \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y \qquad = k \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \qquad + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)-(2.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)+2\cdot(3.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

• Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

• Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8 + 2k}{k + 3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k + 3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{k + 3}$$

Solución: $x = \dfrac{8 + 2k}{k + 3}$, $y = \dfrac{-k^2 - k + 8}{k + 3}$, $z = \dfrac{k^2 - k - 16}{k + 3}$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$$

• Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

• Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k - 2}{-1 - k} = \frac{2 - k}{1 + k}$$

$$y + k\left(\frac{2 - k}{1 + k}\right) = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{2k - k^2}{1 + k} = \frac{1 + k - 2k + k^2}{1 + k} = \frac{1 - k + k^2}{1 + k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1 - k + k^2}{1 + k} - \frac{2 - k}{1 + k} = \frac{1 + k - 1 + k - k^2 - 2 + k}{1 + k} = \frac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$$

Solución: $x = \dfrac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$, $y = \dfrac{1 - k + k^2}{1 + k}$, $z = \dfrac{2 - k}{1 + k}$

Página 44

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Resolución e interpretación geométrica de sistemas lineales

1 **Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= -5 \\ (3/2)x - 3y &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (2/3) \cdot (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 0 \\ 5y &= -5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 2y = -2 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $(-2, -1)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, -1)$.

b) $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned}\right.$

Si dividimos la 3.ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1.ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1.ª y la 3.ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2.ª las corta.

2 **Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - y &= 1 \\ 5x - y &= 4 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 2x - y &= 3 \\ 5x + y &= 8 \end{aligned}\right.$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right)$

De la 2.ª ecuación, obtenemos $y = -1$; de la 3.ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-13}{9}$.

Luego el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

3 Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x \quad\;\; + z = 2} \\ \boldsymbol{x - y \quad\;\; = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x + y \quad\;\; = 3} \\ \boldsymbol{x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{3x \quad\;\; + z = 4} \end{array}\right.$

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x \quad\;\; + z = 2 \\ x - y \quad\;\; = 0 \end{array}\right.$

Lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - \;\; z = \;\; 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ -2z = \;\; 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - \;\; z = \;\; 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ z = \;\; 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + \;\; y = \;\; 2 \\ -2y = -2 \\ z = \;\; 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2 - y = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: (1, 1, 0)

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 1, 0).

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$

Observamos que la 3.ª ecuación es la suma de la 1.ª y la 2.ª: podemos prescindir de ella.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x = 3 - y \\ x + z = 1 + y \end{array}\Bigg\} \to$$

$$\to \begin{cases} x = \dfrac{3-y}{2} \\ z = 1 + y - x = 1 + y - \dfrac{3-y}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3y}{2} \end{cases}$$

Hacemos $\lambda = \dfrac{y}{2}$.

Solución: $\left(x = \dfrac{3}{2} - \lambda,\ \ y = 2\lambda,\ \ z = -\dfrac{1}{2} + 3\lambda\right)$

Geométricamente, se trata de tres planos que se cortan en una recta que pasa por $\left(\dfrac{3}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$ con dirección $(-1, 2, 3)$.

4 Resuelve e interpreta geométricamente estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} y - z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

La 2.ª ecuación contradice la opuesta de la 1.ª. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de tres planos que se cortan dos a dos.

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias. No tiene solución.

Geométricamente, se trata de dos planos paralelos que son cortados por un tercero.

5 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2.ª ecuación entre 2, obtenemos:

$x + 2y - z = \frac{1}{2}$, que contradice la 1.ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\frac{2}{3}$ la 1.ª ecuación, obtenemos:

$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2.ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

Sistemas escalonados

6 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = \frac{7 + y}{2} = 2 \end{array}\right\}$

Solución: (2, –3)

b) $\left.\begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\}$ $z = \frac{2}{9}$ $y = z - 1 = \frac{-7}{9}$ $x = \frac{3 + y - z}{3} = \frac{2}{3}$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{array}\right\}$ $x = 0$ $z = x - 2 = -2$ $y = 9 + z - x = 7$

Solución: (0, 7, –2)

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y \qquad = 0 \\ \qquad 2y \qquad = 1 \end{array}\right\}$ $\quad y = \dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \qquad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

7 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad y \qquad = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ \qquad y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + \ \ t = 4 \\ \quad y + z - \ \ t = 3 \\ \qquad z + 2t = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - t \qquad = 2 \\ \quad y \qquad + z = 4 \\ \quad y + t - z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ \quad y \qquad = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 2 - z + y = 7 - z \end{array}$

Soluciones: $(7 - \lambda, 5, \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ \qquad y + z = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 - z \\ \qquad y = 2 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 2 - z \\ x = \dfrac{4 - z - y}{2} = \dfrac{4 - z - 2 + z}{2} = 1 \end{array}$

Soluciones: $(1, 2 - \lambda, \lambda)$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y - z + \ \ t = 4 \\ \quad y + z - \ \ t = 3 \\ \qquad z + 2t = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 4 - \ \ t \\ \quad y + z = 3 + \ \ t \\ \qquad z = 1 - 2t \end{array}\right\}$

$z = 1 - 2t \qquad y = 3 + t - z = 2 + 3t \qquad x = 4 - t + z - y = 3 - 6t$

Soluciones: $(3 - 6\lambda, 2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y - t \qquad = 2 \\ \quad y \qquad + z = 4 \\ \quad y + t - z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda,\ 4 - \lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$

8 **Transforma en escalonados y resuelve los sistemas siguientes:**

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ \ \ x + \ \ y = 0 \\ \ \ x - \ \ y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \ \ x + 2y = 1 \\ \ \ x + \ \ y = 0 \\ 2x + \ \ y = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + \ y = 0 \\ x - \ y = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 5 \\ (3.^a) : 2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ -y = 1 \end{array}\right\} \quad y = -1 \qquad x = -y = 1$

Solución: $(1, -1)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ x + \ y = 0 \\ 2x + \ y = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$

La 2.ª y 3.ª filas son contradictorias. No tiene solución.

9 **Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - \ y = 7 \\ 5x + 3y = -10 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} -\ y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - \ y + z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - \ y = 7 \\ 5x + 3y = -10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 11 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11x \qquad = 11 \end{array}\right\} \quad x = 1 \qquad y = 2x - 7 = -5$

Solución: $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - \ y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 5 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{array}\right\} \quad z = \frac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \frac{2}{3}$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Método de Gauss

s10 Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{matrix}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{matrix}\right\}$

$z = 0 \quad y = -2 - z = -2 \quad x = 1 - y = 3$

Solución: $(3, -2, 0)$

b) $\left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix}\right\} \; y = -\frac{z}{2} \quad x = -y - z = -\frac{z}{2}$

Soluciones: $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

c) $\left.\begin{matrix} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{matrix}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-3\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-5\cdot(1.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{matrix} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{matrix}\right\}$

$y = 4z + 2$

$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$

$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda, \; 2 + 4\lambda, \; \lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y-z=3\\ 6x-6y+2z=-16\\ x-y+2z=-6\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3\\ 6 & -6 & 2 & -16\\ 1 & -1 & 2 & -6\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a):2\\(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6\\ 3 & -3 & 1 & -8\\ 3 & 4 & -1 & 3\end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6\\ 0 & 0 & -5 & 10\\ 0 & 7 & -7 & 21\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):(-5)\\(3.^a):7\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-6\\ z=-2\\ y-z=3\end{array}\right\} \begin{array}{l} y=3+z=3-2=1\\ x=-6+y-2z=-6+1+4=-1\end{array}$

Solución: $(-1, 1, -2)$

s11 **Resuelve aplicando el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2x+5y=16}\\ \mathbf{x+3y-2z=-2}\\ \mathbf{x+z=4}\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x+2y+z=1}\\ \mathbf{5x+3y+3z=3}\\ \mathbf{x+y+z=0}\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=16\\ x+3y-2z=-2\\ x+z=4\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16\\ 1 & 3 & -2 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16\\ 3 & 3 & 0 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a):3\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)-5\cdot(2.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} -3x=6\\ x+y=2\\ x+z=4\end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2\\ y=2-x=4\\ z=4-x=6\end{array}$

Solución: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=1\\ 5x+3y+3z=3\\ x+y+z=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-5\cdot(1.^a)\\(3.^a)-3\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-2\cdot(3.^a)+(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=0\\ -2y-2z=3\\ 2z=1\end{array}\right\} \quad z=\dfrac{1}{2} \quad y=\dfrac{3+2z}{-2}=-2 \quad x=-y-z=\dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

s12 **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array}\right\}$$

$$y = 1 \qquad z = \frac{19 - 3y}{2} = 8 \qquad x = 9 - 2y - z = -1$$

Solución: $(-1, 1, 8)$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$$

Si hacemos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $\left(\frac{1}{5} - 3\lambda,\ \frac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $$\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) + (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - 2 \cdot (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\;\; = 0 \end{array}\right\}$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

Página 45

s13 Estudia y resuelve por el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) + 4 \cdot (1.^a)\\(3.^a) + 2 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\dfrac{1}{2} \qquad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{aligned} y + z &= -1 \\ x - y \quad &= 1 \\ x + 2y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - (1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (2.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{aligned} x - y \quad &= 1 \\ y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1 + y \\ z &= -1 - y \\ y &= \lambda \end{aligned}$

Soluciones: $(1 + \lambda, \ \lambda, -1 - \lambda)$

c) $\left.\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 2y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 5 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 12 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a) : 3\\(3.^a) - 2 \cdot (2.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{aligned} x - 2y + 2z &= -3 \\ 2y - z &= 3 \\ -z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z &= -1 \\ y &= 1 \\ x &= -3 + 2y - 2z = 1 \end{aligned}$

Solución: $(1, 1, -1)$

d) $\left.\begin{aligned} x - y + 3z - 14t &= 0 \\ 2x - 2y + 3z + t &= 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\-4 \cdot (2.^a) + 3 \cdot (3.^a)\end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{aligned} x - y + 3z - 14t &= 0 \\ -3z + 29t &= 0 \\ 28t &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t &= 0 \\ z &= 0 \\ x &= y \\ y &= \lambda \end{aligned}$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

14 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 3\\ x + y - z &= 3\\ z &= 0\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 3\\ 2x - y + z &= 2\\ x - y + z &= 1\end{aligned}\right.$$

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3\\ x + y - z &= 3\\ z &= 0\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} x + y \quad &= 3\\ x + y \quad &= 3\\ z &= 0\end{aligned}\right\}$ *Compatible indeterminado.*

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3\\ 2x - y + z &= 2\\ x - y + z &= 1\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a)\\ (3.^a) - (1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & -2 & 0 & -2\end{array}\right) \to$

$\to$ *Compatible determinado.*

s15 **Estudia y resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= 2\\ 2x + 3y + 5z &= 11\\ x - 5y + 6z &= 29\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0\\ x + 2y - z &= 0\\ 4x + \ \ y - z &= 0\end{aligned}\right.$$

a) $\left.\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= 2\\ 2x + 3y + 5z &= 11\\ x - 5y + 6z &= 29\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5 & 11\\ 1 & -5 & 6 & 29\end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a)\\ (3.^a) - (1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & -6 & 5 & 27\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a) + 6\cdot(2.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 23 & 69\end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{aligned} x + y + \quad z &= 2\\ y + \ 3z &= 7\\ 23z &= 69\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} &z = 3\\ &y = 7 - 3z = -2\\ &x = 2 - y - z = 1\end{aligned}\right\}$

El sistema es *compatible determinado*, con solución $(1, -2, 3)$.

b) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0\\ x + 2y - z &= 0\\ 4x + \ \ y - z &= 0\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\ (2.^a) + (1.^a)\\ (3.^a) + (1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 6 & -2 & 0 & 0\end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a) - 2\cdot(2.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

Lo resolvemos: $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0\\ 3x - \ \ y \quad &= 0\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} &y = 3x\\ &z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x\\ &x = \lambda\end{aligned}$

Soluciones: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Discusión de sistemas de ecuaciones

16 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases}$　　d) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m-2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-4 \end{array}\right)$

- Si $m = 4 \to$ Sistema *compatible determinado.*
- Si $m \neq 4 \to$ Sistema *incompatible.*

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado* para todo m.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array}\right)$

- Si $m = 0 \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $m \neq 0 \to$ Sistema *compatible determinado.*

d) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 5 \to$ Sistema *compatible indeterminado.*
- Si $m \neq 5 \to$ Sistema *compatible determinado* con *solución* (0, 0, 0).

s17 **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$　　b) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y \;\;= \;\;4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky \;\;= \;\;2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2}$ $\to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$2x - y = 4 \;\to\; \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2}$ $\to$ Sistema *compatible determinado*.

$\left.\begin{array}{r} 2x - \qquad\quad y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$

Solución: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + \;\;y - \;\;z = 1 \\ x - 2y + \;\;z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m - 15 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m - 10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10$ $\to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + \;\;z = \;\;3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$

Hacemos $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10$ $\to$ *Incompatible.*

s18 **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - \;\;y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - \;\;y - 2z = 2 \\ 2x + \;\;y + 3z = 1 \\ 3x \qquad + \;\;z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-5) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado.*

  $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \; x = 3 - 2y = 1$

  Solución: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible.*

b) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$

- Si $m = -1 \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

  $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$

  Haciendo $z = 3\lambda$:

  Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \to$ Sistema *incompatible.*

PARA RESOLVER

s19 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x \quad\;\; + 2z = 11 \\ x + y \quad\;\;\; = \;\; 3 \\ \quad\; y + \;\; z = 13 \\ x + y + \;\; z = 10 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(2.^a)\\(4.^a)-(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-3\cdot(4.^a)\\(4.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} x \quad\;\; + 2z = 11 \\ \quad\; y - 2z = -8 \\ \qquad\quad\;\; z = \;\; 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = \;11 - 2z = \;11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = \;\; 1 \\ x - y + z - t = \;\; 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = \;\; 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\\(4.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x + y + z + \;\; t = \;\; 1 \\ \;\; -2y \qquad\;\; - 2t = -1 \\ \qquad\quad\;\; z + \;\; t = \;\; 1 \\ \qquad\qquad\;\; -2t = \;\; 1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad y = \dfrac{2t-1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$

Solución: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

s20 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - \;\; z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + \;\; y - \;\; z = 0 \\ x + 3y + \;\; z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + \;\; z = \;\; 1 \\ mx + \;\; y - \;\; z = \;\; 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + \;\; y - \;\; z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y - \;\; z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-2\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + ay + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 7 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*
- Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

c) $\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ mx + y - z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Compatible determinado para todo m.

d) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y + az &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema *incompatible.*
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

s21 Discute y resuelve en función del parámetro:

a) $\left\{\begin{aligned} -x + my + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ -x \quad\quad - 3z &= -2 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 5 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} -x + my + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ -x \quad\quad - 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{-(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -(2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 1 \quad \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{l} x \quad + 3z = 2 \\ \quad y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \quad \rightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

$$\left.\begin{array}{rl} x \qquad\qquad + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \\ (m - 1)y \qquad &= 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1, 0, 1)$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + \ y + \ z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \ y + \ z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (3.^a) \\ (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a - 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a - 2 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 2 \quad \rightarrow$ Sistema *incompatible.*
- Si $a \neq 2 \quad \rightarrow$ Sistema *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + \qquad z &= 0 \\ y + \qquad z &= -3 \\ (a - 2)z &= 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a - 2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a - 2} = \frac{4 - 3a}{a - 2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4 + 3a}{a - 2} - \frac{2}{a - 2} = \frac{3a - 6}{a - 2}$$

Solución: $\left(\frac{3a - 6}{a - 2}, \frac{4 - 3a}{a - 2}, \frac{2}{a - 2}\right)$

s22 Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:

a) $\begin{cases} \alpha x - \ y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \ y \qquad = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - \ z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} \alpha x - \ \ y = \qquad 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)\cdot\alpha - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$

$\alpha \neq 0$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1 \to$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y \qquad = \ \ \ 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - \ \ z = \ \ \ 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha+1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 5\cdot(3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 0 \to$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.
- Si $\alpha = 0 \to$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

23 **A, B y C son tres amigos. A le dice a B: *si te doy la tercera parte de mi dinero, los tres tendremos la misma cantidad.***

Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres tienen 60 €.

Llamamos: x dinero que tiene A

y dinero que tiene B

z dinero que tiene C

Con los datos planteamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{2x}{3} \\ \dfrac{2x}{3} = z \\ x + y + z = 60 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y - \dfrac{x}{3} = 0 \\ \dfrac{2}{3}x - z = 0 \\ x + y + z = 60 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x + 3y \qquad = \ \ 0 \\ 2x \qquad - 3z = \ \ 0 \\ x + \ \ y + \ \ z = 60 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 30$, $y = 10$, $z = 20$

A tiene 30 €, B, 10 €, y C, 20 €.

s24 **Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, de 9,80 €/kg; el B, de 8,75 €/kg, y el C, de 9,50 €/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de 10,5 kg a 9,40 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada tipo debe mezclar si tiene que poner del tipo C el doble de lo que ponga del A y del B?**

Llamamos x a la cantidad de A, y a la de B y z a la de C.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 10{,}5 \\ z = 2(x + y) \\ 9{,}8x + 8{,}75y + 9{,}5z = 10{,}5 \cdot 9{,}4 = 98{,}7 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1{,}5$; $y = 2$; $z = 7$

Debe mezclar 1,5 kg de A, 2 kg de B y 7 kg de C.

s25 **Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que si al número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.**

☛ ***Si x es la cifra de las unidades; y, la de las decenas, y z, la de las centenas, el número será $x + 10y + 100z$.***

Llamamos x a la cifra de las unidades, y a la de las decenas y z a la cifra de las centenas.

$$z \;\; y \;\; x \;\; \rightarrow \;\; \text{n.}^\circ = x + 10y + 100z$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ x + 10y + 100z - (z + 10y + 100x) = 198 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 9 \\ -99x + 99z = 198 \\ 2y = x + z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + z = 9 \\ -x \qquad + z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x \qquad + z = 2 \\ y + 2z = 11 \\ 3z = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 4 \\ y = 11 - 2z = 11 - 8 = 3 \\ x = z - 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Solución: El número es el 432.

Página 46

s26 **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés; una cantidad B, al 5%, y el resto, al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%; la B, al 6%, y el resto, al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 €, y el segundo, de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = 1\,050 \\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = 950 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 4 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-(3.^a) + (2.^a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ B + 2C = 25\,000 \\ 3C = 30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 10\,000 \\ B = 5\,000 \\ A = 5\,000 \end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

s27 **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%.**

Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad que el de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento.

Llamamos x al n.° de copias vendidas al precio original, 12 €; y al n.° de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al n.° de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\-(2.^a) + 12 \cdot (1.^a)\\-(3.^a) + (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) : 3\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a)\\(3.^a) - 3{,}6 \cdot (3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 600 \\ y + z &= 200 \\ 1{,}2z &= 96 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z &= 80 \\ y &= 120 \\ x &= 400 \end{aligned}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

28 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al n.° de monedas que hay en la caja A, y al n.° de monedas que hay en la caja B, y z al n.° de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ x &= y + z + 2 \\ x + 1 &= 2(y - 1) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ x - y - z &= 2 \\ x + 1 &= 2y - 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ x - y - z &= 2 \\ x - 2y \quad &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \rightarrow x = 19$

De la 3.ª ecuación $\rightarrow y = \dfrac{x+3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

29 **Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?**

Llamamos x a la longitud de camino llano entre A y B, y a la longitud de cuesta arriba yendo de A a B y z a la longitud de cuesta abajo yendo de A a B. Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = 192 \text{ km} \\ &\frac{x}{80} + \frac{y}{54} + \frac{z}{90} = 2{,}5 \text{ horas} \\ &\frac{x}{80} + \frac{y}{90} + \frac{z}{54} = 2{,}75 \text{ horas} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 192 \\ 27x + 40y + 24z &= 5\,400 \\ 27x + 24y + 40z &= 5\,940 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 27 & 40 & 24 & 5\,400 \\ 27 & 24 & 40 & 5\,940 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) - 27\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 27\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & -3 & 13 & 756 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)\cdot 3 + (2.^a)\cdot 13\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & 160 & 0 & 5\,076 \end{array}\right) \left.\begin{aligned} x + y + z &= 192 \\ 13y - 3z &= 216 \\ 160y \quad &= 5\,076 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= 31{,}725 \text{ km} \\ z &= 65{,}475 \text{ km} \\ x &= 94{,}800 \text{ km} \end{aligned}$$

Solución: La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 km.

s30 **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1.ª PARTIDA	2.ª PARTIDA	3.ª PARTIDA
1.° QUE PIERDE	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2.° QUE PIERDE	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3.° QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) : 2 \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ y - z = 9 \\ 2z = 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 12 \\ y = 9 + z = 21 \\ x = 6 + y + z = 39 \end{array}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2.° lugar tenía 21 € y el que perdió en 3.er lugar tenía 12 €.

s31 **Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue *m* veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.

b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado.

c) Halla la solución para $m = 5$.

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas en A, B y C, respectivamente. Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 60\,000 \\ x + y = mz \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}2z = 6\,000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 60\,000 \\ x + y - mz = 0 \\ 0{,}05x + 0{,}1y + 0{,}2z = 6\,000 \end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 6\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 0{,}05 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 60\,000 \\ 0 & 0 & -m-1 & -60\,000 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}15 & 3\,000 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1$: El sistema es *incompatible*.
- Si $m \neq -1$: El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, si $m > 0$, el sistema es *compatible determinado*.

c) $m = 5$, *solución*: $x = 20\,000$ €, $y = 30\,000$ €, $z = 10\,000$ €.

s32 **Las edades de un hijo, su padre y su abuelo cumplen las siguientes condiciones: La suma de las edades del padre, del hijo y el doble de la del abuelo es 182 años.**

El doble de la edad del hijo más la del abuelo es 100 años, y la del padre es α veces la de su hijo.

a) Halla sus edades suponiendo que $\alpha = 2$.

b) ¿Es posible que $\alpha = 3$?

c) Si $\alpha = 3$ y en la primera condición la suma es 200, ¿qué ocurre con el problema?

Sean x, y, z las edades del hijo, del padre y del abuelo.

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 182 \\ 2x \qquad + \ z = 100 \\ y \qquad = \alpha x \end{array}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2$: *solución*: $x = 18$, $y = 36$, $y = 64$

El hijo tiene 18 años, el padre, 36 años, y el abuelo, 64 años.

b) Si $\alpha = 3$: el sistema es *incompatible*. Por tanto, no es posible que $\alpha = 3$.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 200 \\ 2x \qquad + \ z = 100 \\ y \qquad = 3x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 2z = 200 \\ 2x + \ z = 100 \end{array}\right\}$$

El sistema es *compatible indeterminado*, hay infinitas soluciones.

CUESTIONES TEÓRICAS

s33 **¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = 1} \\ \boldsymbol{x - y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1} \end{array}\right.$$

Sí. Si cambiamos la 2.ª ecuación por $x + y + z = 1$, o bien, si cambiamos la 3.ª ecuación por $x + y + z = 1$, el sistema resultante será *compatible indeterminado*.

s34 **Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1.^er^ sistema lo son también del 2.°, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1.° es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2.° es determinado (solo tiene una solución).

35 **Si tenemos un sistema compatible indeterminado de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?**

Sí. Por ejemplo:

$$\textit{Incompatible} \begin{cases} \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\} \textit{Compatible indeterminado} \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

36 **Si a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.**

No. Si el sistema es *incompatible*, las dos ecuaciones iniciales son contradictorias. Añadiendo otra ecuación, no podemos cambiar este hecho; el sistema seguirá siendo *incompatible*.

s37 **Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?**

No. Por ejemplo, los sistemas:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes, con solución única (2, 1), tienen iguales los términos independientes, pero no los coeficientes de las incógnitas.

38 **Encuentra razonadamente un valor de a para el cual el siguiente sistema es incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)x = 1 \\ x + 3z = 2 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$$

¿Puede ser compatible indeterminado para el valor $a = 2$?

$$\left.\begin{array}{rl} x + y + \quad 2z &= 0 \\ (a-1)x \qquad\qquad &= 1 \\ x \quad + \quad 3z &= 2 \\ (a-2)z &= 0 \end{array}\right\}$$

- Si $a = 1$, la 2.ª ecuación es $0x = 1$. El sistema es *incompatible*.
- Si $a = 2$, la 4.ª ecuación es trivial, el sistema es *compatible determinado*. Luego no puede ser *compatible indeterminado*.

Página 47

PARA PROFUNDIZAR

s39 Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:

a) $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$

  $\longrightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + z = 1 \;\rightarrow\; x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$

  Soluciones: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \longrightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{aligned} ax + \;\; y - z &= 0 \\ 2x + ay \quad\;\; &= 2 \\ -x \quad\;\; + z &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -a \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2 - a \end{array}\right)$

$a \neq 0$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \quad \to \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} a = -1 \\ a = \;\; 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$ Sistema *incompatible.*

- Si $a = 2$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\left.\begin{aligned} -x \quad\;\; + z &= 1 \\ x + y \quad\;\; &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} z &= 1 + x \\ y &= 1 - x \\ x &= \lambda \end{aligned}$

Sistema *compatible indeterminado.*

Soluciones: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \to$ Sistema *compatible determinado.*

s40 **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad\;\; + 3z = 2 \\ 2x \quad\;\; + az = 3 \end{cases}$$

$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ ax + y + 2z &= 1 \\ x \quad\;\; + 3z &= 2 \\ 2x \quad\;\; + az &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$

$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$ Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es *incompatible.*

41 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z + t = 17} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 16} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 15} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 14} \\ \boldsymbol{y + z + t + w = 14} \end{cases}$$

☛ ***Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien:

$x + y + z + t + w = 19$

Por tanto:

$$\begin{array}{ll} (x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 & \to \quad w = 2 \\ (x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 & \to \quad t = 3 \\ (x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 & \to \quad z = 4 \\ (x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 & \to \quad y = 5 \\ (y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 & \to \quad x = 5 \end{array}$$

42 **Una cuadrilla de cinco jardineros debía podar una plantación trabajando de lunes a viernes. Cada día, cuatro podaban y el otro les ayudaba. Cada jardinero podó el mismo número de árboles cada día.**

Los resultados de la poda fueron: lunes, 35 árboles podados; martes, 36; miércoles, 38; jueves, 39, y el viernes no sabemos si fueron 36 ó 38.

Calcula cuántos árboles diarios podó cada uno, sabiendo que fueron números enteros y que ninguno podó los cinco días.

Llamamos:

w = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el lunes.

t = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el martes.

z = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el miércoles.

y = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el jueves.

x = n.° de árboles diarios que poda el jardinero que descansa el viernes.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t \qquad = 35 \\ x + y + z \qquad + w = 36 \\ x + y \qquad + t + w = 38 \\ x \qquad + z + t + w = 39 \\ \quad y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$x + y + z + t + w = 37 + \dfrac{k}{4}$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 ó 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto:

$$\begin{array}{l} (x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \;\rightarrow\; w = 11 \\ (x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \;\rightarrow\; t = 10 \\ (x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \;\rightarrow\; z = 8 \\ (x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \;\rightarrow\; y = 7 \\ (y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \;\rightarrow\; x = 10 \end{array}$$

Así, el jardinero que descansa el lunes poda 11 árboles; el que descansa el martes, 10; el que descansa el miércoles, 8; el que descansa el jueves, 7, y el que descansa el viernes, 10.

AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve e interpreta geométricamente los sistemas siguientes:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array}\right\}$ (1.ª) 3 · (2.ª) $\begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 33 \\ \hline 11x \qquad = 33 \end{array}$ Sumando la 1.ª fila con 3 veces la 2.ª

$\rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$

Comprobamos en la 3.ª ecuación:

$$-3 + 3(-1) \neq 0$$

El sistema es *incompatible*. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array}\right\}$ Hacemos $y = \lambda$: $\begin{cases} 2x = 5 + \lambda \;\rightarrow\; x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda\right)$

Representa dos planos que se cortan en una recta.

2. **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \;\lambda, 1 - 2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

3. **Una compañía tiene tres camiones (P, Q y R), en los que caben exactamente un cierto número de contenedores de tres tipos (A, B y C), de acuerdo con la siguiente tabla:**

	A	B	C
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los efectúan totalmente llenos?

Sean x, y, z el número de viajes que hacen los camiones P, Q y R, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 3x + 5y + 3z = 44 \\ 4x + 5y + 6z = 58 \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 3 & 5 & 3 & 44 \\ 4 & 5 & 6 & 58 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ 5\cdot(2.^a)-3\cdot(1.^a)\\ 5\cdot(3.^a)-4\cdot(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 17 & 14 & 110 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\ (2.^a)\\ 19\cdot(3.^a)-17\cdot(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 0 & 215 & 645 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 19y + 3z = 85 \\ 215z = 645 \end{array}\right.$$

Resolvemos este sistema escalonado:

$z = 3$

$$y = \frac{85 - 3z}{19} = \frac{85 - 9}{19} = 4$$

$$x = \frac{45 - 2y - 4z}{5} = \frac{45 - 8 - 12}{5} = 5$$

Por tanto, el camión P debe hacer 5 viajes, el camión Q debe hacer 4 viajes y el camión R debe hacer 3 viajes.

4. Sean las ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y + z = 5} \\ \mathbf{2x - 3y + z = -4} \end{array}\right.$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea *incompatible*, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ con $k \neq 5a - 4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería *incompatible*.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \textit{Compatible determinado.}$$

5. **Se considera el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + \quad 2y + 3z = 1 \\ x + \quad ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad 2y + 3z = 1 \\ x + \quad ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $a = 2$, la 2.ª ecuación no tiene solución: $0y = 1$. El sistema es *incompatible.*

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea *compatible determinado*, porque la 3.ª ecuación se puede suprimir $(0x + 0y + 0z = 0)$ y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \qquad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \longrightarrow \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\dfrac{1}{2}, \lambda\right)$

6. **Discute este sistema según los valores de a. Interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{l} ax + \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} ax + \ y + z = 4 \\ x + \ y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.