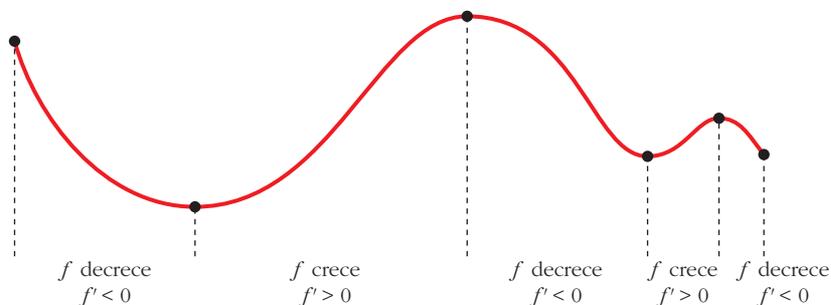


Página 281

REFLEXIONA Y RESUELVE

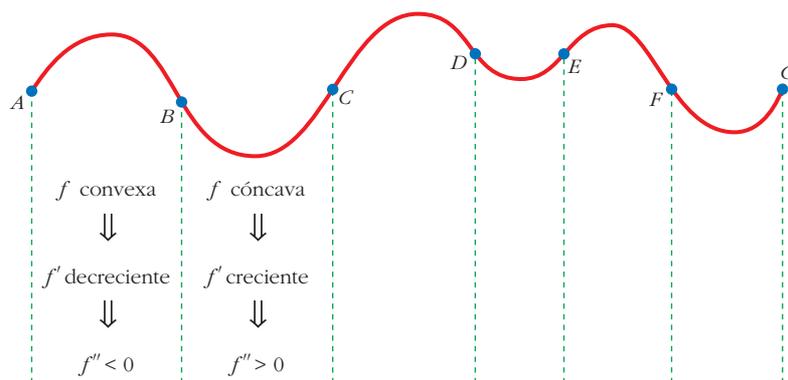
Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

■ Analiza la curva siguiente:



Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ Describe el tramo CD y los tramos DE , EF y FG siguientes:



$$CD \rightarrow f \text{ convexa} \rightarrow f' \text{ decreciente} \rightarrow f'' < 0$$

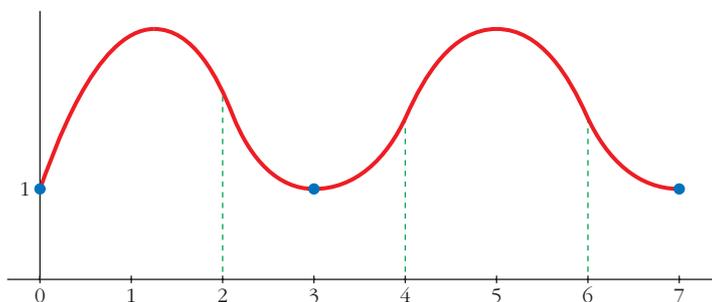
$$DE \rightarrow f \text{ cóncava} \rightarrow f' \text{ creciente} \rightarrow f'' > 0$$

$$EF \rightarrow f \text{ convexa} \rightarrow f' \text{ decreciente} \rightarrow f'' < 0$$

$$FG \rightarrow f \text{ cóncava} \rightarrow f' \text{ creciente} \rightarrow f'' > 0$$

■ Dibuja la gráfica de una función, f , que cumpla las siguientes condiciones:

- La función está definida en $[0, 7]$.
- Solo toma valores positivos.
- Pasa por los puntos $(0, 1)$, $(3, 1)$ y $(7, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$, la función es convexa.
- En el intervalo $(2, 4)$, $f'' > 0$.
- En el intervalo $(4, 6)$, f' es decreciente.
- En el intervalo $(6, 7)$, f es cóncava.



Página 282

1. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en $(0, 0)$:** $y'(0) = 8$

$$y = 8x$$

- **Recta tangente en $(1, 4)$:** $y'(1) = -9$

$$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$$

- **Recta tangente en $(3, 150)$:** $y'(3) = 11$

$$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$$

2. Halla las rectas tangentes a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

Obtención de las ordenadas correspondientes:

$$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$$

$$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow \text{Punto } (3, 3) \\ y = -7 \rightarrow \text{Punto } (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en esos puntos, derivamos implícitamente:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$$

$$y'(2y + 4) = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2y + 4} = \frac{1 - x}{y + 2}$$

$$\text{Así: } y'(3, 3) = -\frac{2}{5}; \quad y'(3, -7) = \frac{2}{5}$$

• **Recta tangente en (3, 3):** $y = 3 - \frac{2}{5}(x - 3) = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$

• **Recta tangente en (3, -7):** $y = -7 + \frac{2}{5}(x - 3) = \frac{2}{5}x - \frac{41}{5}$

Página 283**1. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:**

a) Dónde crece.

b) Dónde decrece.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

a) $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \rightarrow y' < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 285**2. Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2) - 2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x - 6 - 2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-0,01) > 0 \\ f'(0,01) > 0 \end{array} \right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(5,99) < 0 \\ f'(6,01) > 0 \end{array} \right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un m\u00ednimo relativo.}$$

3. a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la funci\u00f3n $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representaci\u00f3n adecuada, averigua de qu\u00e9 tipo es cada uno de ellos.

b) \u00cddem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

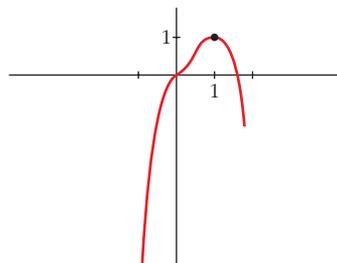
$$a) y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \rightarrow \text{Punto } (1, 1) \end{cases} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos est\u00e1n en el intervalo $[-1; 1,5]$, donde la funci\u00f3n es derivable.

Adem\u00e1s, $f(-1) = -7$ y $f(1,5) = -1,7$.

- En $(0, 0)$ hay un punto de inflexi\u00f3n.
- En $(1, 1)$ hay un m\u00e1ximo relativo.



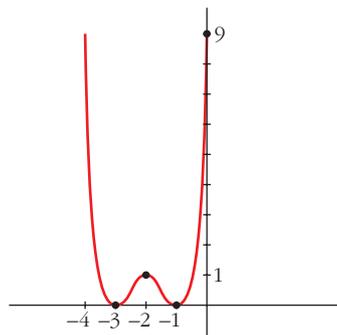
$$b) y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \rightarrow \text{Punto } (-3, 0) \end{cases} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos est\u00e1n en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la funci\u00f3n es derivable.

Adem\u00e1s, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un m\u00ednimo relativo en $(-3, 0)$, un m\u00e1ximo relativo en $(-2, 1)$ y un m\u00ednimo relativo en $(-1, 0)$.



Página 287

1. Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 5) \\ x = \frac{4}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48; \quad f'''(0) \neq 0; \quad f''' \left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función siguiente:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 2)$$

$$(f'''(x) = 6; \quad f'''(2) \neq 0)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 289

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

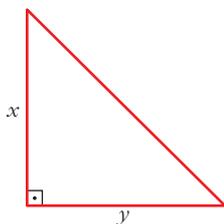
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \rightarrow f(5) = 10 \\ x = -5 \text{ (no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; ha un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

- 2. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$$

$$\text{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

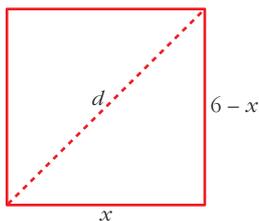
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = 10 - 5 = 5$$

($f(0) = 0$; $f(10) = 0$; $f(5) = \frac{25}{2}$; y f es continua. Luego en $x = 5$ está el máximo).

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm².

- 3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$$d = \sqrt{(6-x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6-x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6-x) + 2x}{2\sqrt{(6-x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6-x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6-x)^2 + x^2}}$$

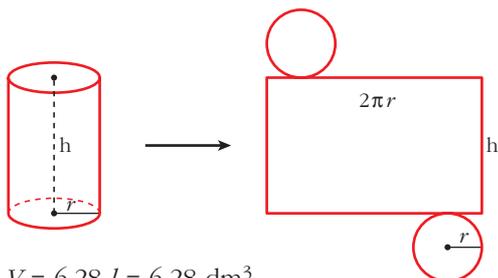
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6 + 2x = 0 \rightarrow x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$; y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

- 4. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$V = 6,28 \text{ l} = 6,28 \text{ dm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= 2\pi r h + 2\pi r^2 = \\ &= 2\pi r(h + r) \end{aligned}$$

$$\text{Como } V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot r^2 \cdot h = 6,28 \rightarrow h = \frac{6,28}{3,14 \cdot r^2} = \frac{2}{r^2}$$

$$\text{Así: } \text{Área total} = 2\pi r \left(\frac{2}{r^2} + r \right) = 2\pi \left(\frac{2}{r} + r^2 \right)$$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi \left(\frac{2}{r} + r^2 \right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi \left(-\frac{2}{r^2} + 2r \right) = 2\pi \left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2} \right) = 0 \rightarrow -2 + 2r^3 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \rightarrow h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 290

1. Calcula, aplicando L'Hôpital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (1 + \cos x)}{x \cos x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (1 + \cos x)}{x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 + \cos x) + \text{sen } x (-\text{sen } x)}{\cos x + x(-\text{sen } x)} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

2. Calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Página 291

3. Aplica L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$$

Para poner $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en

$$f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln[f(x)]) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\operatorname{sen} x + \cos x)/(\cos x + \operatorname{sen} x)}{1} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^1 = e \end{aligned}$$

4. Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1/x})x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{1/x})x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 2}{(-1/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2^{1/x} \cdot \ln 2) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Página 293

1. a) Explica por qué $y = \operatorname{sen} x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$.

b) ¿En qué punto se verifica la tesis del teorema de Rolle?

a) $y = \operatorname{sen} x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo \mathbb{R} .

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} y' = \cos x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

2. Demuestra que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. ¿En qué punto cumple la tesis?

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 3) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\ f(4) = 5 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 6]$. (Para $x \neq 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en $(2, 6)$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \rightarrow -2x + 10 = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

3. Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ en } [-2, -1]$$

Calcula el valor correspondiente a c .

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo \mathbb{R} . En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - 12}{-1 + 2} = -6$$

$$f'(x) = 2x - 3 = -6 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{-3}{2}$.

4. Repite el ejercicio anterior para la función:

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo \mathbb{R} . En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{0 - (-9)}{-1 + 2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \rightarrow 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 120}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{3} \begin{cases} x \approx 2,19 \\ x \approx -1,52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \frac{1 - \sqrt{31}}{3}$.

5. Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b . (Hazlo por reducción al absurdo: empieza suponiendo que hay dos raíces en ese intervalo).

- $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

- Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en $[-1, 1]$, sean c_1 y c_2 . Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2) , pues $-1 \leq c_1, c_2 \leq 1$.

Hemos llegado a una contradicción.

- Por tanto, $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera que sea el valor de b .

6. Calcula p, m y n para que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ mx + n & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$. ¿Dónde cumple la tesis? Representala.

- Si $x \neq 3$, la función es continua, pues está formada por polinomios. Su dominio es $[-1, 5]$.
- En $x = 3$, para que sea continua, ha de ser:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + px) = -9 + 3p \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (mx + n) = 3m + n \\ f(3) &= 3m + n = -9 + 3p \end{aligned} \right\} -9 + 3p = 3m + n$$

- Si $x \in (-1, 5)$ y $x \neq 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } -1 < x < 3 \\ m & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$, ha de ser:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -6 + p \\ f'(3^+) = m \end{array} \right\} 6 + p = m$$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, además, debe tenerse que $f(-1) = f(5)$; es decir:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 - p \\ f(5) = 5m + n \end{array} \right\} -1 - p = 5m + n$$

- Uniendo las tres condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} -9 + 3p = 3m + n \\ -6 + p = m \\ -1 - p = 5m + n \end{array} \right\} m = -\frac{8}{3}; n = 9; p = \frac{10}{3}$$

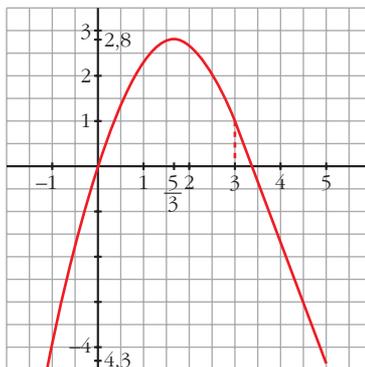
- Con estos valores:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \frac{10}{3} & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\frac{8}{3} & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$-2x + \frac{10}{3} = 0 \rightarrow x = \frac{5}{3} \in (-1, 5)$$

La tesis se cumple en $c = \frac{5}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{10}{3}x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -\frac{8}{3}x + 9 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



Página 297

- 1. Demuestra que: “Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$ ”.**

Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de $[a, b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, su tesis:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

Se deduce que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ y, por tanto, $f(x_2) < f(x_1)$.

La función es, pues, decreciente en $[a, b]$.

- 2. Demuestra que: “Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo en x_0 ”.**

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) > 0 \rightarrow f \text{ es creciente a la izquierda de } x_0 \quad (1)$$

Si $h > 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) < 0 \rightarrow f \text{ es decreciente a la derecha de } x_0 \quad (2)$$

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0 , ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

Página 304

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \ln(\operatorname{tg} 2x)$ en $x = \frac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 5x}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

d) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$ en $x = 0$

a) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{8} \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{tg} 2x} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 4x - \frac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{5 \cos 5x}{2\sqrt{\operatorname{sen} 5x}} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$$

• Recta tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{4} \begin{cases} y = 5 \rightarrow \text{Punto } (2, 5) \\ y = 3 \rightarrow \text{Punto } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendiente de las rectas:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y - 8) = 2 - 2x \rightarrow y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$$

- Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = -x + 7$
- Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = x + 1$

d) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = (0 + 1)^{\text{sen } 0} = 1^0 = 1 \rightarrow P(0, 1)$

- Pendiente de la recta tangente:

$$y = (x^2 + 1)^{\text{sen } x} \rightarrow \ln y = \text{sen } x \cdot \ln(x^2 + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln(x^2 + 1) + \text{sen } x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \left[\cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \text{sen } x}{x^2 + 1} \right] (x^2 + 1)^{\text{sen } x}$$

$$m = [\cos 0 \cdot \ln 1 + 0] \cdot 1^0 = (1 \cdot 0 + 0) \cdot 1 = 0$$

- Recta tangente: $y = 1 + 0(x - 0) \rightarrow y = 1$

s2 Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2 :

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \rightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \rightarrow -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 8$

3 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x \ln x$

b) $y = x^2 e^x$

c) $y = \text{sen } 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$y' = 0 \rightarrow \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \rightarrow y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangente en el punto $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$ es: $y = \frac{-1}{e}$

b) $y' = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$. Como $e^x \neq 0$ para todo x :

$$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \frac{4}{e^2}$

c) $y' = 2 \cos 2x$

$$y' = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = 0 \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = 1 \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

4 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto $(1, 1)$.

Para hallar la derivada, tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \rightarrow y \ln x + x \ln y = \ln 1 \rightarrow y \ln x + x \ln y = 0$$

Derivamos:

$$y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} + \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y' xy \ln x + y^2 + xy \ln y + x^2 y' = 0$$

$$y'(xy \ln x + x^2) = -y^2 - xy \ln y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy \ln y}{xy \ln x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es:

$$y = 1 - (x - 1); \text{ es decir, } y = -x + 2$$

5 Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X . Escribe la ecuación de esa tangente.

- Si la recta tangente forma un ángulo de 60° con el eje X , su pendiente es $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

- s6** Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$

c) $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$

e) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

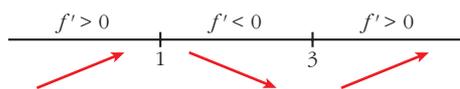
f) $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en $(3, 0)$ y un máximo en $(1, 4)$.

Puntos de inflexión:

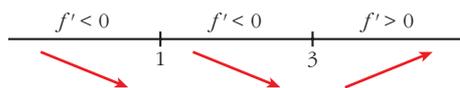
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

$$b) y = \frac{3x^4 - 8x^3}{12}$$

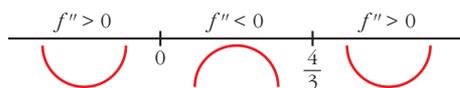
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=2 \rightarrow y=-4/3 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $(2, -\frac{4}{3})$.

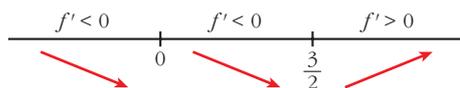
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=4/3 \rightarrow y=-(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(\frac{4}{3}, -\frac{64}{81})$.

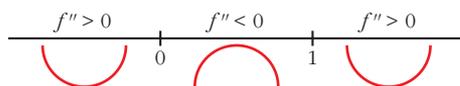
$$c) f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=3/2 \rightarrow y=-27/16 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$.

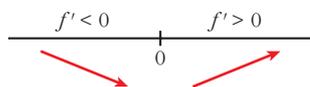
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=1 \rightarrow y=-1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

$$d) f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=0$$



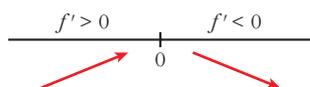
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0 \text{ para todo } x.$$

No hay puntos de inflexión.

$$e) f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

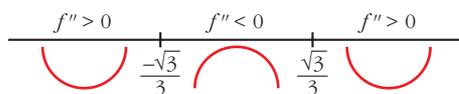
$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

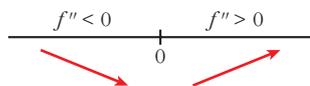
$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

$$f) f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$$

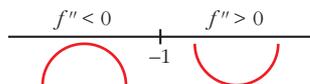
$$f'(x) = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (pues } e^x \neq 0 \text{ para todo } x) \rightarrow y = -1$$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = \frac{-2}{e}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

s7 Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{8-3x}{x(x-2)}$

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \frac{2x^2-3x}{2-x}$

e) $y = \frac{x^2-1}{x}$

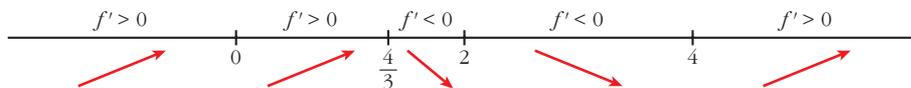
f) $y = \frac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \frac{8-3x}{x(x-2)} = \frac{8-3x}{x^2-2x}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x) - (8-3x) \cdot (2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{4}{3}) \cup (4, +\infty)$.

es decreciente en $(\frac{4}{3}, 2) \cup (2, 4)$.

tiene un máximo en $(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2})$.

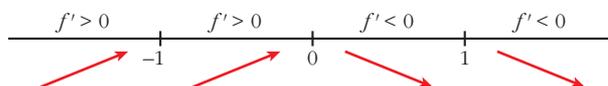
tiene un mínimo en $(4, -\frac{1}{2})$.

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

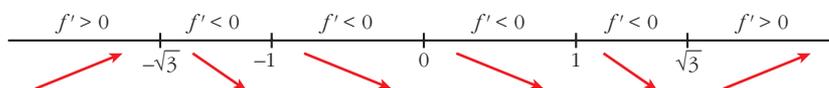
tiene un máximo en $(0, -1)$.

$$c) y = \frac{x^3}{x^2 - 1}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.

tiene un mínimo en $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

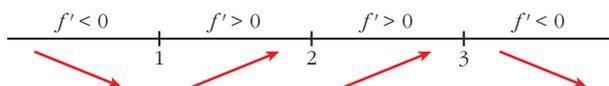
$$d) y = \frac{2x^2 - 3x}{2 - x}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

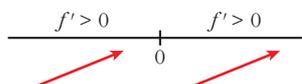
tiene un máximo en $(3, -9)$.

$$e) y = \frac{x^2 - 1}{x}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2xx - (x^2 - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0. \text{ No tiene solución.}$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en todo su dominio.

$$f) y = \frac{8}{x^2(x-3)} = \frac{8}{x^3 - 3x^2}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

s8 Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x + 4$

b) $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = (x - 2)^4$

d) $y = x e^x$

e) $y = \frac{2-x}{x+1}$

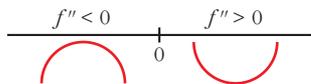
f) $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4. \text{ Dominio} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 3; f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$.

es cóncava en $(0, +\infty)$.

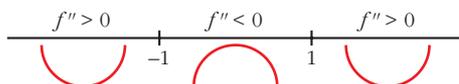
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = 4x^3 - 12x; \quad f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es convexa en $(-1, 1)$.

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = 4(x - 2)^3; \quad f''(x) = 12(x - 2)^2$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \text{ para } x \neq 2$$

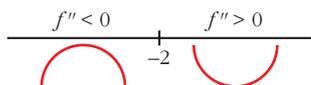
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x e^x$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = e^x + x e^x = (1 + x)e^x; \quad f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2 \quad (e^x \neq 0 \text{ para todo } x)$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$.

es cóncava en $(-2, +\infty)$.

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$.

$$e) y = \frac{2-x}{x+1}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1) - (2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x .

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$.

es cóncava en $(-1, +\infty)$.

no tiene puntos de inflexión.

$$f) y = \ln(x+1). \text{ Dominio} = (-1, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

9 Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $y = 1 + (x-1)^3$

b) $y = 2 + (x-1)^4$

c) $y = 3 - (x-1)^6$

d) $y = -3 + 2(x-1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 1$$

Estudiamos el signo de la derivada:



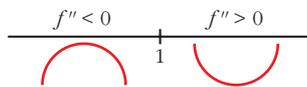
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

- Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 6(x - 1) \rightarrow 6(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 1$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



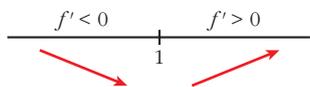
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, 1)$.

- b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4(x - 1)^3 \rightarrow 4(x - 1)^3 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 2$$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en $(1, 2)$.

- Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

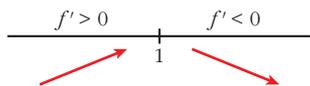
$$f''(x) = 12(x - 1)^2 \rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x.$$

La función es cóncava en todo su dominio.

- c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -6(x - 1)^5 \rightarrow -6(x - 1)^5 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 3$$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en $(1, 3)$.

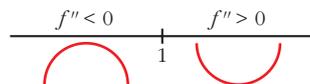
- Como $f''(x) = -30(x - 1)^4 \leq 0$, la función es convexa en todo su dominio.

- d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 10(x - 1)^4 \rightarrow 10(x - 1)^4 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = -3$$

Como $f''(x) = 40(x - 1)^3 \geq 0$, la función es creciente en todo su dominio.
No hay máximos ni mínimos.

- Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x - 1)^3$



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, -3)$.

Problemas de optimización

- 10** Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Llamamos x e y a los números que buscamos.

$$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$$

Producto de sus cuadrados:

$$P = x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot (10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2, \text{ con } 0 < x < 10.$$

Tenemos que maximizar la función:

$$P = x^4 - 20x^3 + 100x^2, \quad 0 < x < 10$$

$$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x; \quad 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \rightarrow$$

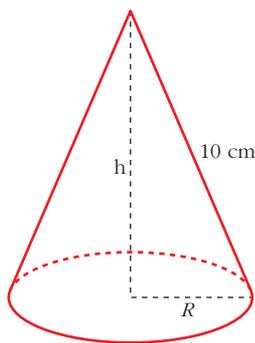
$$\rightarrow 4x(x^2 - 15x + 50) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ no vale, pues } 0 < x < 10 \\ x = 5 \rightarrow y = 10 - 5 = 5 \\ x = 10 \text{ no vale, pues } 0 < x < 10 \end{cases}$$

($f(0) = 0$; $f(10) = 0$; $f(5) = 625$; y f es continua. Luego en $x = 5$ está el máximo).

Los dos números son el 5. El producto de sus cuadrados es 625.

- 11** Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h$$



$$h^2 + R^2 = 100 \rightarrow R^2 = 100 - h^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (100 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi (100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3} \pi (100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3} \pi (100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \rightarrow 100 - 3h^2 = 0 \rightarrow h = \pm \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

($f'(h) > 0$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$).

Luego en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo).

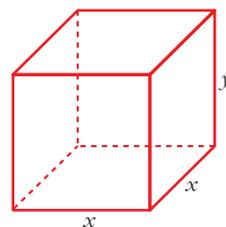
Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

- s12** Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3 . Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.

$$\text{Volumen} = x^2 y = 8 \text{ dm}^3 \rightarrow y = \frac{8}{x^2}$$

$$\text{Superficie} = 4xy + 2x^2 = 4x \frac{8}{x^2} + 2x^2 = \frac{32}{x} + 2x^2$$



Tenemos que hallar el mínimo de la función superficie:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -32 + 4x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

(En $x = 2$ hay un mínimo, pues $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$).

Por tanto, la caja ha de ser un cubo de lado 2 dm .

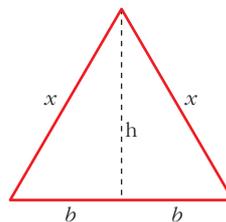
- s13** Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm , ¿cuál es el de área máxima?

• *Llama $2b$ a la base del triángulo.*

Llamemos $2b$ a la base:

$$\text{Perímetro} = 2x + 2b = 30 \rightarrow x + b = 15 \rightarrow b = 15 - x$$

$$\text{Altura} = h = \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} = \sqrt{30x - 225}$$



$$\text{Área} = \frac{2b \cdot h}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1125x^2 + 13500x - 50625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1125x^2 + 13500x - 50625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2250x + 13500}{2\sqrt{30x^3 - 1125x^2 + 13500x - 50625}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 90x^2 - 2250x + 13500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \text{ (no vale)} \\ x = 10 \rightarrow b = 15 - 10 = 5 \rightarrow 2b = 10 \end{cases}$$

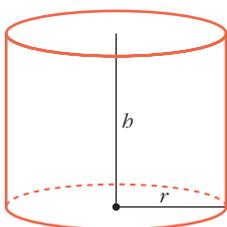
($x = 15$ no vale, pues quedaría $b = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43,3 \text{ cm}^2$.

- s14** Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2 . Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

• $A_T = 2\pi R h + 2\pi R^2$; $V = \pi R^2 h$



Área total = $2\pi r h + 2\pi r^2 = 54 \text{ cm}^2$

$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$

Volumen = $\pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$

Tenemos que maximizar la función $V(r) = 27r - \pi r^3$:

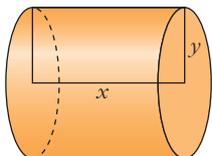
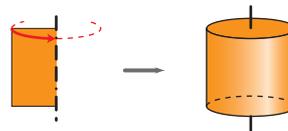
$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$

$V'(r) = 0 \rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$

(En $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ hay un máximo, pues $V'(r) < 0$ a la izquierda de este valor y $V'(r) > 0$ a su derecha).

Para $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensiones del cilindro de volumen máximo.

- 15** Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.



Perímetro cartulina = $2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y$

Volumen = $\pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

Tenemos que maximizar la función:

$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$

$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$

$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \text{ (no vale)} \\ y = 20 \rightarrow x = 10 \end{cases}$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

Página 305

Regla de L'Hôpital

s16 Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\text{sen } x}}{1 - \cos x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x} \right)$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

l) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\text{tg } x - 8}{\sec x + 10}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{2x - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\text{sen } x}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\text{sen } x} = +\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{\text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = -2$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 3x}{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9(1 + \operatorname{tg}^2 3x)}{2} = -\frac{9}{2} \\
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt[4]{x}}{3(1+x)} = 0 \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x) \operatorname{sen}(2x) \cdot 2}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x}{6x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x}{3} = \frac{4}{3} \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0 \\
 \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0 \\
 \text{l) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1
 \end{aligned}$$

Coeficientes de una función

- 17** Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$$

$$\left. \begin{aligned}
 f''(1) = 0 &\rightarrow 12a + 18b - 6 = 0 \\
 f''(1/2) = 0 &\rightarrow 3a + 9b - 6 = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 2a + 3b - 1 &= 0 \\
 a + 3b - 2 &= 0
 \end{aligned}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$

- s18** Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a , b , c y d .

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 \rightarrow c = 2 \\ f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b + c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \frac{-5}{6} \end{array} \right\}$$

$$\text{Así: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}; \quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$$

- 19** De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b .

$$f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \rightarrow 3a + b = -3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array} \right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

- s20** La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a , b y c .

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 0 \rightarrow -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \rightarrow 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \rightarrow 12 + 2a = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array} \left. \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \frac{10}{3} \\ c = \frac{31}{3} \end{array} \right\}$$

- 21** La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a , b y c .

☛ Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{array}} \right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

s22 Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \rightarrow 6 + 2a = 0$$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$$

$$\text{Resolvemos: } \begin{cases} 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \rightarrow b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

PARA RESOLVER

23 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f'(3) = \frac{-1}{9}$$

- Ecuación de la recta tangente en $\left(3, \frac{1}{3}\right)$:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 3)$$

- Puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$y = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow \text{Punto } (6, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dist} \left[\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right) \right] = (3 - 0)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \\ \text{dist} \left[\left(3, \frac{1}{3}\right), (6, 0) \right] = (6 - 3)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \end{array} \right\} \text{La distancia es la misma.}$$

24 Dada la parábola $y = 3x^2$, encuentra un punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos $(0, 0)$ y $(4, 48)$.

- La cuerda que une los puntos $(0, 0)$ y $(4, 48)$ tiene pendiente:

$$m = \frac{48}{4} = 12$$

- Buscamos un punto de la función $y = 3x^2$ en el que la derivada valga 12:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 12 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

- El punto es $(2, 12)$.

s25 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

26 Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

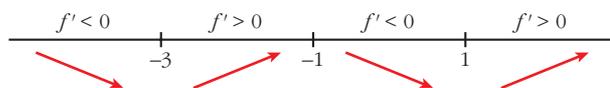
$$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

$$-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ y } f'(x) = -2x - 2 \text{ para } -3 < x < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \rightarrow f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.
es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.
tiene un máximo en $(-1, 4)$.
tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

27 Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.

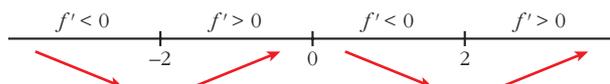
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.
No tiene máximo absoluto ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$).
- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x .

- s28** Halla el valor de c de modo que la función $y = \frac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + c = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \rightarrow c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \neq 1 \rightarrow f(x) \text{ es creciente si } x \neq 1.$$

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

- s29** La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en $(3, 2)$. Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX .

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma; \quad f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta; \quad f''(x) = 6x + 2\alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \rightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 \rightarrow 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 \rightarrow 18 + 2\alpha = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

$$\text{Así: } f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16; \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Los puntos son $(4, 0)$ y $(2, 4)$.

- s30** Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.

• *Mira el ejercicio resuelto 1.*

$$y = 3x^2 - 5x + 12; \quad f'(x) = 6x - 5$$

- La recta tangente en un punto $(a, f(a))$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \text{ es decir:}$$

$$y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$$

- Para que pase por el origen de coordenadas, ha de ser:

$$0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a)$$

$$0 = 3a^2 - \cancel{5a} + 12 - 6a^2 + \cancel{5a}$$

$$3a^2 = 12 \rightarrow a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-2, 34)$ y $(2, 14)$
- Recta tangente en $(-2, 34)$: $f'(-2) = -17$
 $y = 34 - 17(x + 2) \rightarrow y = -17x$
- Recta tangente en $(2, 14)$: $f'(2) = 7$
 $y = 14 + 7(x - 2) \rightarrow y = 7x$

31 Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto $(0, -8)$.

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

La ecuación de la tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Como $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$, queda:

$$y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

Si la recta tangente pasa por $(0, -8)$:

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(-a)$$

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + \cancel{4a} - 4 - \frac{1}{2}a^2 - \cancel{4a}$$

$$-4 = -\frac{1}{4}a^2 \rightarrow -16 = -a^2 \rightarrow a^2 = 16 \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-4, -16)$ y $(4, 16)$
- Recta tangente en $(-4, -16)$: $f'(-4) = 2$
 $y = -16 + 2(x + 4) \rightarrow y = 2x - 8$
- Recta tangente en $(4, 16)$: $f'(4) = 6$
 $y = 16 + 6(x - 4) \rightarrow y = 6x - 8$

Página 306

- 32** Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:

$$f(x) = 2x - x^2 \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

• Recuerda que el ángulo de dos rectas se puede calcular así: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$, donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas.

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

$$f'(x) = 2 - 2x \rightarrow f'(2) = -2$$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

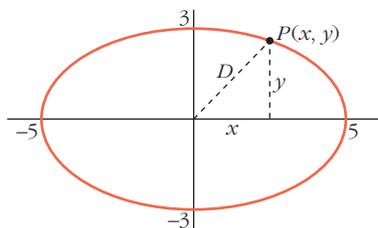
$$g'(x) = 2x - 1 \rightarrow g'(2) = 3$$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

- s33** El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto $(0, 0)$ es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.



La distancia de P a $(0, 0)$ es:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Así, la distancia es:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)} = \sqrt{\frac{16x^2 + 225}{25}} = \frac{\sqrt{16x^2 + 225}}{5}$$

El dominio de la función es el intervalo $[-5, 5]$.

Hallamos el máximo y el mínimo de $D(x)$:

$$D'(x) = \frac{32x}{10\sqrt{16x^2 + 225}}$$

$$D'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

(En $x = 0$ hay un mínimo relativo, pues $D'(x) < 0$ para $x < 0$ y $D'(x) > 0$ para $x > 0$).

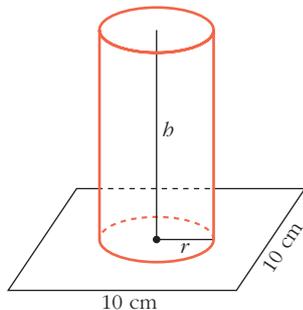
Veamos el valor de $D(x)$ en $x = 0$ y en los extremos del intervalo $[-5, 5]$:

$$D(0) = 3; \quad D(-5) = D(5) = 5$$

Por tanto, las posiciones de P que nos dan la distancia máxima son $P(5, 0)$ y $P(-5, 0)$; y las que nos dan la distancia mínima son $P(0, 3)$ y $P(0, -3)$.

- s34** En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2 . ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?

• Busca el máximo absoluto en los extremos del intervalo de definición.



$$\text{Área lateral cilindro} = 2\pi r h = 50 \text{ cm}^2 \rightarrow h = \frac{50}{2\pi r}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \rightarrow V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con $r \in (0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

- s35** Dada la función $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

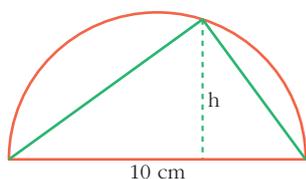
$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0,25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0,23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tangente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x - 2)$

- s36** Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10 cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?



La base mide 10 cm. El área es:

$$\text{Área} = \frac{10 \cdot h}{2} = 5h; \quad h \in (0, 5).$$

El de área máxima será el que tenga la máxima altura; es decir, $h = 5$ cm. Su área es 25 cm^2 .

- 37** El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t - 2)^2$, $0 \leq t \leq 4,5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

Derivamos la función $f(t)$: $f'(t) = -2(t - 2)$

Los puntos críticos son: $f'(t) = 0 \rightarrow -2(t - 2) = 0 \rightarrow t - 2 = 0 \rightarrow t = 2$

La función f tiene un punto crítico en $(2, 9)$.

$$f''(t) = -2$$

$$f''(t) = -2 < 0 \rightarrow (2, 9) \text{ es un máximo.}$$

Además, como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo:

$$f(0) = 5$$

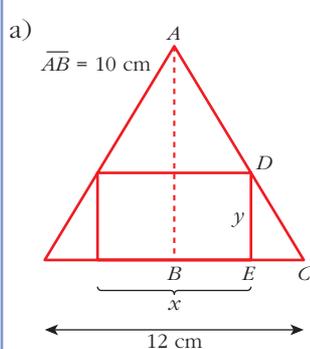
$$f(4,5) = 2,75 \rightarrow (4,5; 2,75) \text{ es un mínimo.}$$

Por tanto, el máximo se alcanza para $t = 2$ y el mínimo para $t = 4,5$.

- s38** En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:

a) Expresa el área, A , del rectángulo en función de la longitud de su base, x , y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.



Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{DEC} son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como: $\overline{AB} = 10$ cm

$$\overline{DE} = y$$

$$\overline{BC} = 6$$
 cm

$$\overline{EC} = \frac{12 - x}{2}$$

Tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12 - x}{2}} \rightarrow \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \rightarrow y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60 - 5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \rightarrow A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

$$\text{Dominio} = (0, 12)$$

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

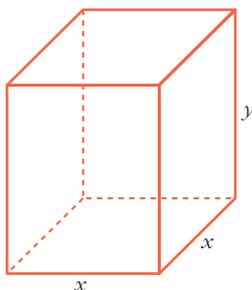
$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow 60 - 10x = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm² (que es el área máxima).

- 39** Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



$$\text{Volumen} = x^2 y = 80 \text{ cm}^3 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

$$\text{Para la tapa y el lateral} \rightarrow z \text{ €/cm}^2$$

$$\text{Para la base} \rightarrow 1,5z \text{ €/cm}^2$$

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1,5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1,5x^2z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1,5x^2z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1,5x^2\right) = z\left(2,5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2,5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 5$$

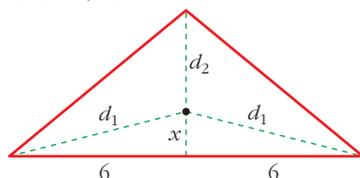
(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

- 40** Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.

Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.

altura = 5 m



La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 \rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

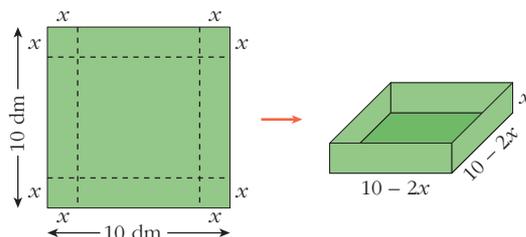
(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de este valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base, situado sobre la altura.

- 41** Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$$

Tenemos que maximizar esta función:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

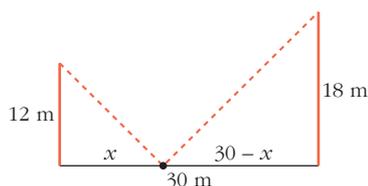
$$V'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 \text{ (no vale)} \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hay un máximo, pues la derivada es positiva a la izquierda de este valor y es negativa a su derecha).

Por tanto, el lado del cuadradito es $x = 5/3$.

- 42** Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos.

¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1224}$$

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1224}} = \\ &= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1224)}} \end{aligned}$$

$$L'(x) = 0 \rightarrow x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8640x + 900x^2 + 129600$$

$$180x^2 + 8640x - 129600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 2880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

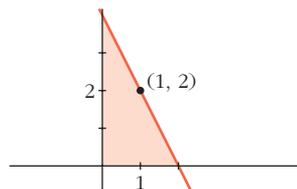
(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

43 De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

Las rectas que pasan por el punto (1, 2) son de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$



Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 - m \rightarrow$ Punto $(0, 2 - m)$
- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 1 - \frac{2}{m} \rightarrow$ Punto $\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{m}\right) (2 - m) = \frac{1}{2} \left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2} \left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \rightarrow -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \text{ (no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ es decir: } y = -2x + 4$$

44 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

a) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x) = (0) \cdot (+\infty)$. Es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

La expresamos en forma de cociente para transformarla en $\frac{\infty}{\infty}$ y poder aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1 \right) = 0 \cdot 1 = 0
 \end{aligned}$$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

- b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞ . Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 1$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x} = e$

(1) Aplicamos el logaritmo de una potencia.

(2) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

- c) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Es una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\operatorname{tg} x)^{\cos x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \stackrel{(*)}{=} 0 \quad (*) \text{ (ver apartado a)}$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos el logaritmo de una potencia.

- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞ . Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x + x^3)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)^{1/x} = e$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{1/x}$. Es una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Tomamos logaritmos para transformarlo en cociente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x} = 0$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{1/x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. Es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ &= \ln\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1 \end{aligned}$$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{tg} 3x}$. Es una indeterminación del tipo 1^∞ . Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (1 - \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (1 - \operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{tg} 3x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2 \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}}{(1 + \operatorname{tg}^2 3x) \cdot 3} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x} = e^{-2/3}$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{tg} x (-\ln x)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln x}{\operatorname{sen} x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$

(1) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

45 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{\operatorname{tg} x}{1 - (4x/\pi)}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{\operatorname{tg} x}{1 - (4x/\pi)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - (4x/\pi) - \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x)(1 - (4x/\pi))} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-4/\pi - \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} 2x}{-2 \operatorname{sen} 2x(1 - (4x/\pi)) + \cos 2x \cdot (-4/\pi)} = \frac{2 - 4/\pi}{(0)}
 \end{aligned}$$

Hallamos los límites laterales:

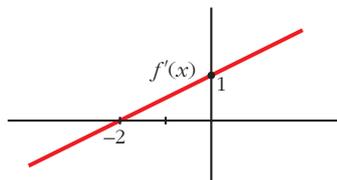
$$\lim_{x \rightarrow (\pi/4)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/4)^+} f(x) = +\infty \quad \left(\text{siendo } f(x) = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{\operatorname{tg} x}{1 - (4x/\pi)} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot x - e - e^x + e}{(e^x - e)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot x - e^x}{(e^x - e)(x - 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{e^x(x - 1) + (e^x - e)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x(x - 1) + e^x + e^x} = \frac{-e}{2e} = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

Página 307

CUESTIONES TEÓRICAS

46 La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f' , de una función f .



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f . ¿Tiene punto de inflexión?

a) Signo de la derivada:

$$\begin{array}{c}
 \frac{f' < 0}{\quad} \quad \frac{f' > 0}{\quad} \\
 \text{---} \quad | \quad \text{---} \\
 \quad \quad -2 \quad \quad \quad \\
 \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \\
 \text{---} \quad \quad \quad \text{---}
 \end{array}
 \quad f'(-2) = 0$$

Por tanto, la función f es decreciente en $(-\infty, -2)$.

es creciente en $(-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$, entonces $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$.

Por tanto, f es una función cóncava. No tiene puntos de inflexión.

- 47** Halla una función f cuya gráfica no sea una recta y en la que existan infinitos puntos en los que la recta tangente a su gráfica sea $y = 1$.

$$f(x) = \cos x$$

Veamos que la recta tangente a $f(x)$ en los puntos de la forma $x = 2\pi k$, con $k \in \mathbf{Z}$, es $y = 1$.

$$f(2\pi k) = \cos(2\pi k) = 1$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(2\pi k) = -\operatorname{sen}(2\pi k) = 0$$

La recta tangente es:

$$y = 1$$

- 48** Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a ?

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$$f(x) = -x^4 \text{ en } x = 0 \text{ es tal que:}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f' > 0} & | & \xrightarrow{f' < 0} \\ & 0 & \end{array} \quad f'(x) = -4x^3 \quad f''(x) = -12x^2$$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

- s49** Un polinomio de 3.º grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$.

Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.

Un polinomio de tercer grado no tiene máximo absoluto.

Veamos por qué:

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow f(x) \text{ no tiene máximo absoluto.}$$

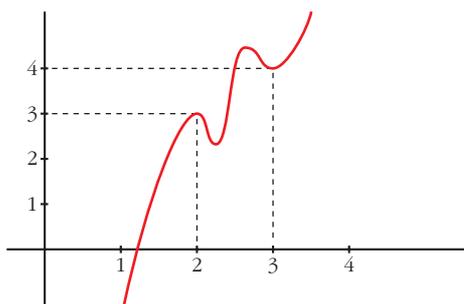
- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow f(x) \text{ no tiene máximo absoluto.}$$

- s50** a) Si es posible, dibuja la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

a) Por ejemplo:

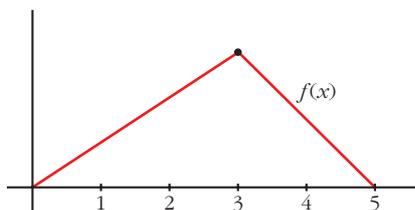


b) Si $f(x)$ es derivable, para que sea posible lo anterior, debe haber, al menos, otro máximo y otro mínimo.

Por tanto, la derivada se anularía, al menos, en cuatro puntos. Luego la función, si fuera polinómica, tendría, al menos, grado 5.

s51 ¿Puede existir una función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ continua en todos los puntos de I , que tenga un máximo local en el punto $x = 3$, pero que no sea derivable en $x = 3$?

Sí. Por ejemplo:



- $f(x)$ es continua en $[0, 5]$.
- $f(x)$ no es derivable en $x = 3$, pues $f'(3^-) \neq f'(3^+)$.
- $f(x)$ tiene un máximo en $x = 3$.

52 Si $y = f(x)$ es una función creciente en $x = a$, ¿se puede asegurar que $g(x) = -f(x)$ es decreciente en $x = a$?

$$f(x) \text{ es creciente en } x = a \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Como $g(x) = -f(x)$, tenemos que:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{-f(x) + f(a)}{x - a} = -\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow g(x) \text{ es decreciente en } x = a.$$

53 Si $f''(x) > 0$ para todo x del dominio de f , ¿qué podemos decir de la gráfica de f ?

Será una función cóncava.

s54 De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$$f'''(a) = 5 > 0 \rightarrow f'' \text{ es creciente en } x = a.$$

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

s55 Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?:

a) f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX .

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

56 Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo \mathbb{R} ; por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

$$\text{Lo calculamos: } f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6} \begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

s57 Se tiene la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

- Si $x \neq -1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

- **Si $x = -1$:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x} \right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 3}{2} \right) = -1 \\ f(1) &= -1 \end{aligned} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$.

Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

- **Si $x \neq -1$ y $x \in (-2, 0)$, f es derivable. Su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- **En $x = -1$, tenemos que:**

$$f'(-1^-) = -1 = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe

algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \frac{-1}{2}$.

Calculamos c :

- $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \leq -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow x^2 = 2 \quad \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{array}$$

- $f'(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

- Por tanto, hay dos soluciones:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } c_2 = -\sqrt{2}$$

58 ¿Es posible calcular a , b , c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

El teorema de Rolle dice: Si f es una función continua en $[0, c]$ y derivable en $(0, c)$ y $f(0) = f(c)$, existe algún punto $x \in (0, c)$ tal que $f'(x) = 0$.

Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

- Continuidad:

—**Si $x \neq 1$** $\rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

—**En $x = 1$** , tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x + 1) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ a + b + 3 = 6; \text{ es decir:} \\ a + b = 3 \end{array}$$

- Derivabilidad:

—**Si $x \neq 1$** $\rightarrow f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

—**En $x = 1$** , tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 2a + b = 5$$

- Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = 3 - a \\ 2a + 3 - a = 5 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = 1 \end{array}$$

- Con estos valores de a y b , queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es creciente \rightarrow No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ puesto que:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(c) = 2c^2 + c + 3 \end{array} \right\} 2c^2 + c + 3 = 1 \rightarrow 2c^2 + c + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4} \text{ no tiene solución.}$$

No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

- s59** La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 4]$?

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$; luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 4]$.

Veamos en qué punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 4 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \frac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{3}$

- 60** Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$.

¿Dónde cumple la tesis?

$f(x)$ es continua y derivable en \mathbb{R} ; por tanto, es continua en $[0, b]$ y derivable en $(0, b)$, cualquiera que sea el valor de b .

Para que cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, b]$, ha de tenerse que $f(0) = f(b)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{array} \right\} b^3 - 4b + 3 = 3 \rightarrow b^3 - 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4) = 0 \begin{cases} b = 0 \text{ (no vale)} \\ b = -2 \text{ (no vale)} \\ b = 2 \end{cases}$$

(Como consideramos el intervalo $[0, b]$, ha de ser $b > 0$).

Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en $[0, 2]$.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

La tesis se cumple en $c = \sqrt{\frac{4}{3}} \in (0, 2)$; es decir, $c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

61 La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable.

¿Puede haber dos números distintos, a y b , tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b , tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x . Por el teorema de Rolle, habría un punto c , en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x .

62 La función $f(x) = |\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1.

¿Cumplirá el teorema de Rolle?

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \text{ es continua en } [0, \pi].$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \neq \frac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Como $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = -1 \neq f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

Página 308

63 Calcula a y b para que:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

¿Dónde cumple la tesis?

El teorema del valor medio dice: si f es una función continua en $[2, 6]$ y derivable

en $(2, 6)$, existe algún punto $c \in (2, 6)$ tal que $f'(c) = \frac{f'(6) - f'(2)}{6 - 2}$.

- Continuidad:

—**Si $x \neq 4$** $\rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

—**En $x = 4$** , tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ f(4) &= 24 - b \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4a - 3 = 24 - b; \text{ es decir:} \\ 4a + b = 27 \end{array}$$

- Derivabilidad:

—**Si $x \neq 4$** $\rightarrow f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

—**En $x = 4$** :

$$\left. \begin{aligned} f'(4^-) &= a \\ f'(4^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

- Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left. \begin{aligned} 4a + b &= 27 \\ a &= 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

- Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

En este caso, quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

- 64** Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

- 65** Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \frac{f(5) - 3}{5 - 0} = \frac{f(5) - 3}{5} = 8 \rightarrow f(5) = 43$

- 66** Calcula a , b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$.

¿En qué punto se cumple la tesis?

- Continuidad:

— **Si** $x \neq 2 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En** $x = 2$, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ 4 + 2a + b = 2c + 1; \\ \text{es decir: } 2a + b - 2c = -3 \end{array}$$

- Derivabilidad:

— **Si** $x \neq 2 \rightarrow f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

— **En** $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c + 1 \end{array} \right\} b = 4c + 1$$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$, ha de cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}$$

En este caso, sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

- Veamos dónde se cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \frac{3}{2}$.

67 Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema, que la función $f(x) = \text{sen}(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$? Justifica la respuesta.

- **Teorema de Rolle:**

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Si $f(x) = \text{sen}(x^2) + x^2$, tenemos que:

—Es continua en \mathbb{R} ; y, por tanto, en $[-1, 1]$.

—Es derivable en \mathbb{R} , $f'(x) = 2x \cos(x^2) + 2x$; y, por tanto, en $(-1, 1)$.

—Además, $f(-1) = f(1) = (\text{sen } 1) + 1$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

Por tanto, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

PARA PROFUNDIZAR

68 Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.

Como $x^2 + y^2 = r$ y nos dicen que $y > 0$, entonces: $y = \sqrt{r - x^2}$

Así, la suma es: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Tenemos que maximizar la función $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{\sqrt{r - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{r - x^2} = x \rightarrow r - x^2 = x^2 \rightarrow r = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{r}{2}$$

Como $x > 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{r}{2}}$

(En $x = \sqrt{\frac{r}{2}}$ hay un máximo, pues $S'(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos y : $y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r - \frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{r}{2}}$

Por tanto, la suma es máxima cuando $x = y = \sqrt{\frac{r}{2}}$.

69 Sea $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, con a y b números positivos. Demuestra que el valor mínimo de f en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow ax^2 - b = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0 \rightarrow \text{en } x = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hay un mínimo.}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0 \rightarrow \text{en } x = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ hay un máximo.}$$

Además, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Luego, en $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ se encuentra el mínimo absoluto de $f(x)$.

Este mínimo vale:

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

Es decir, el mínimo de $f(x)$ en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.

70 Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})x$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot +\infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) + e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{e^{1/x} + e^{2/x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x} + 2}{e^{-1/x} + 1} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{2/x}$.

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln (e^{1/x} + e^{2/x})^x &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot -\infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{1/x}$.

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^1 = e$

71 Calcula a y b para que se verifique $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} = \pm \infty \text{ salvo que } b = 0$$

Tomando $b = 0$:

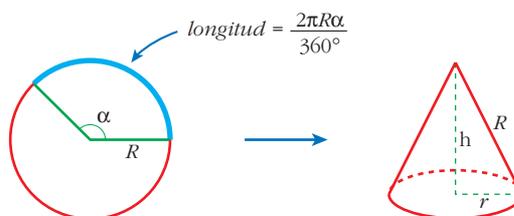
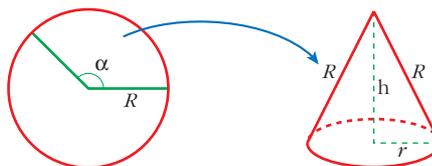
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + \cos x}{2[\cos x^2 - 2x^2 \operatorname{sen} x^2]} = \frac{2a + 1}{2(1 - 0)} = a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $a + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

(*) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

Así: $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2/2) + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$

- 72** Si de un disco metálico quitamos un sector circular, podemos construir un vaso cónico. Determina el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.



- Longitud de la circunferencia de la base del cono:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi R\alpha}{360} \rightarrow r = \frac{R\alpha}{360}$$

- Altura del cono: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2\alpha^2}{129600}} = \frac{R}{360} \sqrt{129600 - \alpha^2}$

- Volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{360^2} \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{129600 - \alpha^2} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129600\alpha^4 - \alpha^6}$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129600\alpha^4 - \alpha^6}$$

- Hallamos α para que el volumen sea máximo:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{R}{360}\right)^3 \cdot \frac{518400\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{129600\alpha^4 - \alpha^6}}$$

$$V'(\alpha) = 0 \rightarrow 518400\alpha^3 - 6\alpha^5 = 0$$

$$6\alpha^3(86400 - \alpha^2) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 293^\circ 56' 20'' \\ \alpha = -293^\circ 56' 20'' \end{cases}$$

El máximo se alcanza en $\alpha = 293^\circ 56' 20''$ (la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha, y estamos considerando x entre 0° y 360°).

Así, el cono tendrá radio $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ y altura $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Su volumen sería $\frac{2\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$.

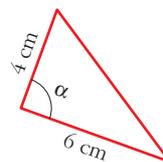
- 73** Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm, y uniendo sus extremos se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.

• ¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos? ¿Y el minutero? ¿Cuál es el ángulo que forman entre las dos en t minutos?

- La aguja horaria recorre un ángulo de 360° en 12 horas; es decir, $\frac{360}{720} = 0,5^\circ$ en 1 minuto; o bien, $0,5t^\circ$ en t minutos.
- El minutero recorre 360° en 1 hora; es decir, 6° en 1 minuto; o bien $6t^\circ$ en t minutos.
- Al cabo de t minutos, las dos agujas formarán un ángulo de $\alpha = 6t^\circ - 0,5t^\circ = 5,5t^\circ$.
- El área del triángulo será:

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \text{sen}(5,5t)}{2} = 12 \text{ sen}(5,5t)$$

$$A(t) = 12 \text{ sen}(5,5t)$$



- Hallamos el máximo de $A(t)$, teniendo en cuenta que $t \in (0, 30)$ (pues estamos considerando entre las 12 h y las 12 h 30 min):

$$A'(t) = 12 \cdot 5,5 \cdot \cos(5,5t) = 0 \xrightarrow{(*)} 5,5t = 90 \rightarrow t = \frac{90}{5,5} = 16,3\overline{6} =$$

$$= 16 \text{ minutos y } 22 \text{ segundos}$$

(*) Si igualamos $5,5t$ a un ángulo mayor de 90° , obtenemos $t > 30$ min.

(En $t = 16,3\overline{6}$ minutos hay un máximo, pues la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha).

Por tanto, el triángulo de área máxima se forma a las 12 h 16 min 22 segundos.

- 74** Comprueba que, en la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{k}{x}$, se tiene que el punto c , que cumple $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es, precisamente, la media geométrica de a y b , $c = \sqrt{ab}$.

$$f'(c) = \frac{-k}{c^2}$$

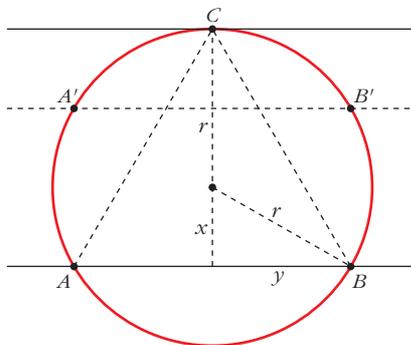
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b - a} = \frac{ka - kb}{ab(b - a)} = \frac{-k(b - a)}{ab(b - a)} = \frac{-k}{ab}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \rightarrow \frac{-k}{c^2} = \frac{-k}{ab} \rightarrow c^2 = ab \rightarrow c = \sqrt{ab}$$

(Suponemos $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

75 En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos, así, un triángulo ABC cuya área queremos que sea la mayor posible. Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser $\frac{3}{2}$ del radio.

- La altura del triángulo ha de ser mayor que el radio, pues, si trazamos la cuerda por $A'B'$, podemos conseguir otro triángulo con la misma base, AB , y mayor altura; y, así, con mayor área.



- Expresamos el área del triángulo en función de x :

$$\text{altura} = x + r$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{base} = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{base} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{Área} = \frac{2(x+r)\sqrt{r^2 - x^2}}{2} = (x+r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (x+r)\sqrt{r^2 - x^2}; \quad x \in [0, r)$$

- Obtenemos el valor de x para el que $A(x)$ alcanza el máximo:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} + (x+r) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x+r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{cases} x = -r \text{ (no vale)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{cases}$$

(En $x = \frac{r}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r}{2}$.

Por tanto, la distancia de C a la cuerda, que es la altura del triángulo, es:

$$h = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- **Observación:**

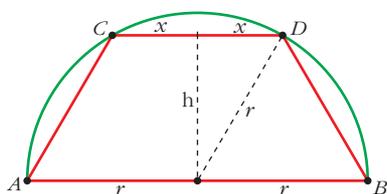
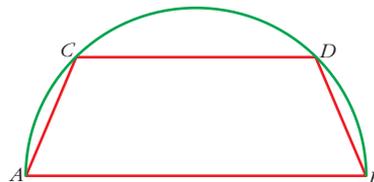
Vamos a calcular la longitud de los lados del triángulo:

$$AB = \text{base} = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

$$AC = BC = \sqrt{y^2 - h^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

Por tanto, hemos obtenido que el triángulo inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el triángulo equilátero.

76 En una semicircunferencia de diámetro $AB = 2r$ se traza una cuerda CD paralela a AB . ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio $ABDC$ sea máxima?



- Llamamos x a la mitad de la base CD ; es decir, a la mitad de la longitud de la cuerda.
- La altura del trapecio será:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- El área del trapecio es:

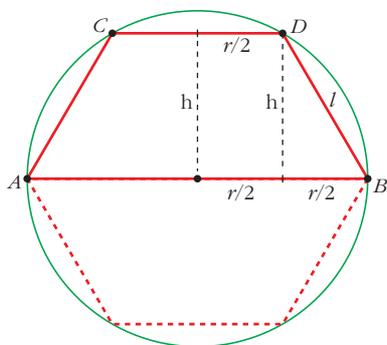
$$\text{Área} = \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} = (r + x) \cdot h = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (0, r)$$

Esta función es la misma que obtuvimos en el ejercicio 75; por tanto, alcanza el máximo en $x = \frac{r}{2}$ (ver dicho ejercicio).

- Así, la longitud de la cuerda es $2x = r$; es decir, $CD = r$.

Observación:



Si completamos la figura de forma simétrica, obtenemos un hexágono de área máxima inscrito en una circunferencia. Veamos que se trata de un hexágono regular:

$$CD = r$$

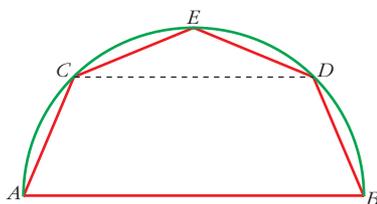
$$h = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2} = r$$

Luego el lado del hexágono es r , igual al radio de la circunferencia.

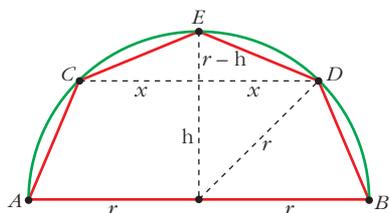
Por tanto, el hexágono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el hexágono regular.

77 En la figura del problema anterior, llamamos E al punto medio del arco CD y dibujamos el pentágono $ACEDB$ que ves a continuación:



a) Calcula la longitud de la cuerda CD para que el área del pentágono sea máxima.

b) Calcula, también, el valor del área máxima del pentágono.



- Llamamos x a la mitad de la longitud de la cuerda CD .

- El área del pentágono es igual a la suma de las áreas del trapecio $CDBA$ y del triángulo CDE :

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(2r + 2x) \cdot h}{2} + \frac{2x \cdot (r - h)}{2} = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x(r - \sqrt{r^2 - x^2}) = \\ &= \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} + r\sqrt{r^2 - x^2} + xr - \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} = xr + r\sqrt{r^2 - x^2} = r[x + \sqrt{r^2 - x^2}] \\ A(x) &= r[x + \sqrt{r^2 - x^2}], \quad x \in (0, r) \end{aligned}$$

a) Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = r \left[1 + \frac{-2x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} \right] = r \left[\frac{\sqrt{r^2 - x^2} - x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2} - x = 0 \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2} = x$$

$$r^2 - x^2 = x^2 \rightarrow r^2 = 2x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(No consideramos la raíz negativa, pues $x \in (0, r)$).

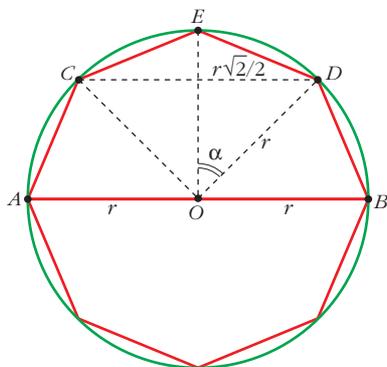
(En $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; es decir, la longitud de la cuerda para la que obtenemos el área máxima es $CD = r\sqrt{2}$.

b) $A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r \left[\frac{r}{\sqrt{2}} + \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \right] = r \left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}r^2$

Observación 1:

Si completamos la figura anterior de forma simétrica, vemos que obtenemos un octógono regular:



$$\text{sen } \alpha = \frac{r\sqrt{2}/2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

es decir: $\widehat{EOD} = 45^\circ$

Además:

$$\begin{cases} \widehat{EOC} = \widehat{EOD} \rightarrow \widehat{EOC} = 45^\circ \\ \widehat{DOB} = 90^\circ - \widehat{EOD} = 45^\circ \\ \widehat{COA} = 90^\circ - \widehat{EOC} = 45^\circ \end{cases}$$

y $OA = OC = OE = OD = OB = r$

Por tanto, se trata de un octógono regular.

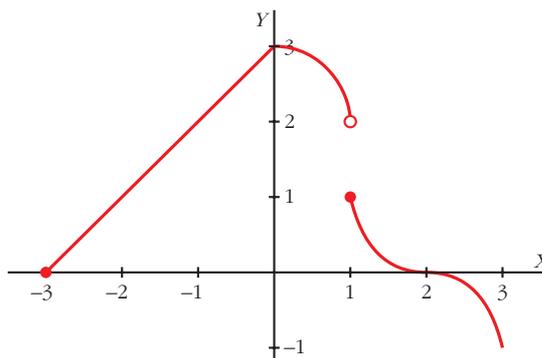
Así, hemos obtenido que el octógono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el octógono regular.

Observación 2:

En el ejercicio 75 obtuvimos el resultado para un triángulo, en el ejercicio 76 para un hexágono y en este ejercicio para un octógono.

En general, se tiene que el polígono de n lados inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el polígono regular de n lados.

s78 Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)$ definida en $[-3, 3]$ cuya gráfica es la siguiente:



Dibuja razonadamente la gráfica de $f'(x)$.

- La función es continua en todo su dominio, excepto en $x = 1$; puesto que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ En } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

- La función es derivable, excepto en $x = 0$ y en $x = 1$.

En $x = 0$ hay “un pico”; es decir, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

En $x = 1$ no es continua la función; por tanto, no puede ser derivable.

Observamos que:

$f'(0^-) = 1$ (pendiente de la recta que pasa por $(-3, 0)$ y $(0, 3)$).

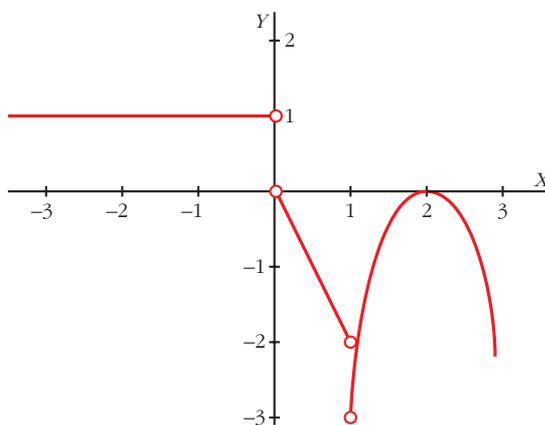
$f'(0^+) = 0$ (en el punto $(0, 3)$ la recta tangente a f es horizontal).

$f'(2) = 0$ por la misma razón que en $x = 0^+$.

En los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 3)$ f' es negativa, por ser f una función decreciente.

En $x = 1$, f' no existe.

- La gráfica de f' puede ser así:



Página 309

AUTOEVALUACIÓN

1. Halla un punto de la gráfica $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a $y = 3x + 8$.

- La pendiente de la recta $y = 3x + 8$ es $m = 3$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga 3:

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(x) = 3 \rightarrow 2x + 1 = 3 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 7$$

- El punto es $(1, 7)$.

2. Dada la función $y = \frac{x}{x^2 - 1}$, estudia si tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión.

- El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
- Los máximos y mínimos están entre las soluciones de $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0 \text{ No tiene solución.}$$

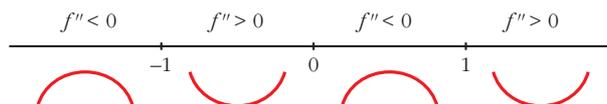
$f'(x)$ es decreciente para todo $x \rightarrow f$ y no tiene máximos ni mínimos.

- Los puntos de inflexión están entre las soluciones de $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x(-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \rightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 0$$

Estudiamos el signo de f'' . Señalamos los puntos donde f' no existe y donde f'' es 0.



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

3. Estudia el crecimiento de la función:

$$f(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$$

y determina los máximos y los mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

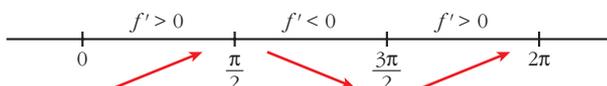
Consideramos la función: $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2 \cos x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{para } x \in [0, 2\pi])$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$.

4. a) Estudia la curvatura de la siguiente función: $f(x) = x^2 \ln x$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

a) • El dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$.

• f es cóncava en los intervalos donde $f'' > 0$ y convexa si $f'' < 0$.

• Calculamos f' y f'' :

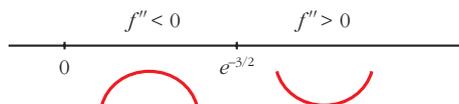
$$f(x) = x^2 \ln x \rightarrow f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 1(2 \ln x + 1) + x \left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \rightarrow x = e^{-3/2} \rightarrow f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2} e^{-3}$$

• Estudiamos el signo de f'' teniendo en cuenta el dominio de f , $(0, +\infty)$, y el punto donde $f''(x) = 0$, $x = e^{-3/2} \approx 0,22$:

Signo de la derivada:



• Conclusiones:

— f es convexa en $(0, e^{-3/2})$.

— f es cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$.

— Punto de inflexión: $(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3})$

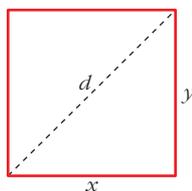
b) • Pendiente de la recta tangente en $x = e^{-3/2}$:

$$m = f'(e^{-3/2}) = e^{-3/2} (2 \ln e^{-3/2} + 1) = e^{-3/2} \left[2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \right] = -2e^{-3/2}$$

• Ecuación de la recta tangente en $(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3})$:

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3} - 2e^{-3/2}(x - e^{-3/2})$$

5. De todos los rectángulos de área 100 dm^2 , halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.



$$\text{Área} = x \cdot y = 100 \text{ dm}^2 \rightarrow y = \frac{100}{x}$$

La diagonal mide:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{10000}{x^2}}$$

Tenemos que minimizar la función:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{10000}{x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{2x - \frac{20000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{10000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20000}{2x^3 \sqrt{x^4 + 10000}} = \frac{x^4 - 10000}{x^2 \sqrt{x^4 + 10000}}$$

$$d'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 10000 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{10000} = 10 \rightarrow x = 10 \rightarrow y = 10$$

(En $x = 10$ hay un mínimo, pues $d'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $d'(x) > 0$ a la derecha de $x = 10$).

Por tanto, la diagonal mínima corresponde al cuadrado de lado 10 dm .

6. Calcula el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

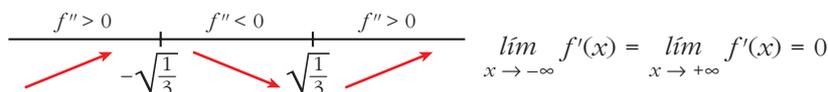
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Buscamos los puntos donde la derivada de $f'(x)$ es 0:

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} f'(\sqrt{3}/3) = (-3\sqrt{3})/8 \\ f'(-\sqrt{3}/3) = (3\sqrt{3})/8 \end{cases}$$

Estudio del signo de f'' :

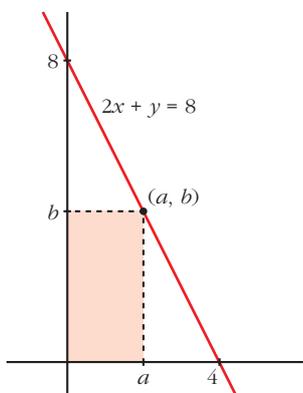


En $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo de $f'(x)$ y en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

7. Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0)$, $(0, 0)$, (a, b) y $(0, b)$. Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.



- El punto (a, b) es un punto de la recta $2x + y = 8$. Por tanto, $2a + b = 8$; es decir, $b = 8 - 2a$.

- Como el rectángulo está inscrito en el triángulo, $0 < a < 4$

- El área del rectángulo es:

$$\text{Área} = a \cdot b = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2, \quad 0 < a < 4.$$

- Tenemos que maximizar la función:

$$A(a) = 8a - 2a^2, \quad 0 < a < 4$$

$$A'(a) = 8 - 4a = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = 4$$

(En $a = 2$ hay un máximo, pues $A'(a) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(a) < 0$ a su derecha).

- Por tanto, el punto es $(2, 4)$.

8. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - \operatorname{tg} x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - (1/3)x^3}{x - \operatorname{tg} x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2}{1 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - x^2}{-\operatorname{tg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 2x}{-2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 2x}{-2\operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg}^3 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24x - 2}{-2(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 6\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

9. Calcula el valor de k para que la expresión $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + kx)^{1/x}$ sea igual a e^4 .

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + kx)^{1/x}. \text{ Tomamos logaritmos en } \ln A = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + kx)^{1/x}]:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln (e^x + kx)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (e^x + kx)}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + k}{e^x + kx} = \frac{1 + k}{1} = 1 + k$$

(*) Aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\text{Si } \ln A = 1 + k \rightarrow A = e^{1+k}. \text{ Por tanto: } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + kx)^{1/x} = e^{1+k}$$

Para que sea igual a e^4 , ha de ser:

$$e^{1+k} = e^4 \rightarrow 1 + k = 4 \rightarrow k = 3$$

10. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, halla a y b para que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas a OX .

- La pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es $f'(2)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow m_1 = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + b = 12 + 4a + b$$

- La pendiente de la recta tangente en $x = 4$ es $f'(4)$:

$$m_2 = f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot a \cdot 4 + b = 48 + 8a + b$$

- Como las rectas tangentes en $x = 2$ y $x = 4$ deben ser paralelas a OX , su pendiente será 0. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f'(2) = 0 &\rightarrow 12 + 4a + b = 0 \\ f'(4) = 0 &\rightarrow 48 + 8a + b = 0 \end{aligned} \right\} a = -9, b = 24$$

Así:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

- 11.** La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica $f(-2) = f(2)$. Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

El teorema de Rolle dice que si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Comprobaremos si la función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$:

- Veamos si f es continua en $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$$

f es continua en $[-2, 2]$.

- Estudiamos la derivabilidad de f :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$. f no es derivable en $x = 0 \Rightarrow f$ no es derivable en $(-2, 2)$.

- f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle; por tanto, no podemos asegurar que exista un $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.