7 PROBLEMAS MÉTRICOS

Página 183

REFLEXIONA Y RESUELVE

Diagonal de un ortoedro

■ **Halla la diagonal de los ortoedros cuyas dimensiones son las siguientes:**

I) $a = 2,\ b = 1,\ c = 2$ **II)** $a = 4,\ b = 12,\ c = 3$ **III)** $a = 7,\ b = 4,\ c = 5$

I) $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$

III) $\sqrt{7^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{90} \simeq 9{,}49$

Distancia entre dos puntos

■ **Halla la distancia de $P(1, 3, 6)$ a $Q(5, 5, 7)$.**

$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{21} \simeq 4{,}58$

Distancia de un punto a una recta

■ **Siguiendo el proceso anterior, halla la distancia del punto $P(8, 6, 12)$ a la recta r:**

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a r:

  $0 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - 6) + 2 \cdot (z - 12) = 0$; es decir, $\pi: -y + 2z - 18 = 0$

- Punto, Q, de corte de r y π:

  $-(1 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 18 = 0$

  $-1 + \lambda + 14 + 4\lambda - 18 = 0$

  $5\lambda - 5 = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 1$

  El punto es $Q(2, 0, 9)$.

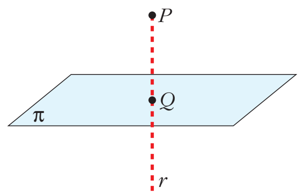
- Calculamos la distancia:

  $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-6, -6, -3)| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$

Distancia de un punto a un plano

■ **Halla, paso a paso, la distancia del punto $P(4, 35, 70)$ al plano π:**

$$\pi: 5y + 12z - 1 = 0$$



— Hallamos la ecuación de la recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

— Obtenemos el punto, Q, de intersección de r y π.

— La distancia de P a π es igual a la distancia entre P y Q.

Para el punto y el plano dados:

- Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 35 + 5\lambda \\ z = 70 + 12\lambda \end{cases}$$

- Punto, Q, de intersección de r y π:

$$5(35 + 5\lambda) + 12(70 + 12\lambda) - 1 = 0$$

$$175 + 25\lambda + 840 + 144\lambda - 1 = 0$$

$$169\lambda + 1\,014 = 0 \quad \to \quad \lambda = -6$$

El punto es $Q(4, 5, -2)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\,(P, \pi) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0, -30, -72)| = \sqrt{900 + 5\,184} = \sqrt{6\,084} = 78$$

Página 184

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (1, 0, 7) y es perpendicular al plano $5x - 3z + 4 = 0$.

El vector normal al plano, $\vec{n}(5, 0, -3)$, es un vector dirección de la recta r que buscamos. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$$

2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por (1, –3, 5) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+7}{-6} = \dfrac{z}{1}$.

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a la recta dada, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: $(5, -6, 1)$. Por tanto, la ecuación de π es:

$$5\,(x - 1) - 6\,(y + 3) + 1\,(z - 5) = 0 \quad \to \quad 5x - 6y + z - 28 = 0$$

3. Halla la ecuación del plano paralelo a $5x - y + 4 = 0$ que pasa por (1, 0, –3).

Si son paralelos, el vector normal es el mismo, (5, –1, 0). Por tanto, la ecuación del plano que buscamos es:

$$5(x-1) - y + 0(z+3) = 0 \;\rightarrow\; 5x - y - 5 = 0$$

4. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por (5, –7, –2).

$$r: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 4 - 6\lambda \end{cases}$$

Si el plano que buscamos, π, es perpendicular a r, un vector normal al plano es el vector dirección de la recta: (5, 2, –6)

Por tanto, la ecuación de π es:

$$5(x-5) + 2(y+7) - 6(z+2) = 0 \;\rightarrow\; 5x + 2y - 6z - 23 = 0$$

Página 185

5. Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s:

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$

El plano pasa por (5, –1, 8) y es paralelo a (1, 0, 2) y a (3, –1, 4). Un vector normal al plano es:

$(1, 0, 2) \times (3, -1, 4) = (2, 2, -1)$

La ecuación del plano es:

$$2(x-5) + 2(y+1) - 1(z-8) = 0;\text{ es decir: } 2x + 2y - z = 0$$

6. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a r que pasa por $P(0, -1, -3)$:

$$r: \begin{cases} 3x - 5y + 7z - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la recta es: $(3, -5, 7) \times (1, -2, 1) = (9, 4, -1)$

Las ecuaciones paramétricas son: $\begin{cases} x = 9\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$

Página 187

1. Halla el ángulo entre las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

El vector dirección de r es $\vec{d}_r = (-5, 3, 0) = \vec{u}$

El vector dirección de s es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\vec{d}_r = (1, -2, 3) \times (2, -1, 0) = (3, 6, 3)//(1, 2, 1) = \vec{v}$$

Por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|(-5, 3, 0) \cdot (1, 2, 1)|}{\sqrt{25 + 9 + 0}\,\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{34}\,\sqrt{6}} = 0{,}070014 \rightarrow \alpha = 85°\ 59'\ 7''$$

2. Calcula el ángulo que forma la recta $r: \dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ con el plano $\pi: x + 3y - z + 1 = 0$.

Llamamos $90° - \alpha$ al ángulo formado por las direcciones de $\vec{d}$ y $\vec{n}$ sin tener en cuenta sus sentidos.

$$\vec{d}(7, -1, 3) \,//\, r \qquad \vec{n}(1, 3, -1) \perp \pi$$

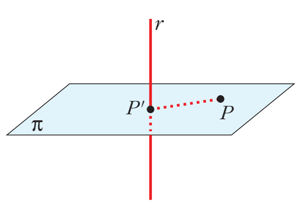
$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|7 - 3 - 3|}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0{,}039$$

$$90° - \alpha = 87°\ 45'\ 1'' \rightarrow \alpha = 2°\ 14'\ 59''$$

Página 189

1. Halla razonadamente la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta $r: (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$. Hazlo por cada uno de los tres métodos que has aprendido.

— Solución, obteniendo previamente el punto P':



- Plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r:

$$5(x - 5) - 1(y - 6) + 1(z - 6) = 0$$

es decir: $\pi: 5x - y + z - 25 = 0$

- Intersección, P', de π y r:

$$5(5\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda - 25 = 0$$

$$25\lambda - 2 + \lambda + \lambda - 25 = 0$$

$$27\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

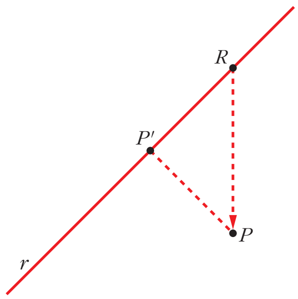
El punto es $P'(5, 1, 1)$.

- Distancia entre P y r:

$$dist\ (P, r) = dist\ (P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(0, -5, -5)| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

— Segundo método:

$R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ es un punto genérico de la recta r.



El vector $\overrightarrow{RP}(5 - 5\lambda, 4 + \lambda, 6 - \lambda)$ es variable.

El vector que nos interesa es perpendicular a la recta. Por tanto, cumple:

$(5, -1, 1) \cdot \overrightarrow{RP} = 0$; es decir:

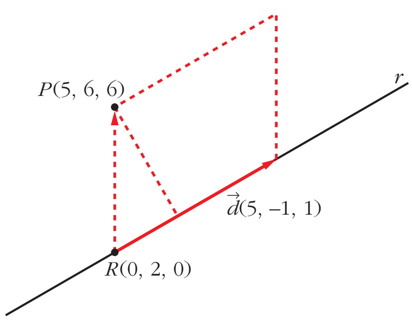
$5(5 - 5\lambda) - 1(4 + \lambda) + 1(6 - \lambda) = 0$

$25 - 25\lambda - 4 - \lambda + 6 - \lambda = 0$

$-27\lambda + 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = 1$

El resto, es igual que con el método anterior.

— Solución directa a partir del producto vectorial:



$$dist\ (P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (5, 4, 6) \times (5, -1, 1) = (10, 25, -25)$$

$$|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}| = \sqrt{100 + 625 + 625} = \sqrt{1\,350}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27}$$

$$dist\ (P, r) = \frac{\sqrt{1\,350}}{\sqrt{27}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$$

Página 190

2. Halla la distancia del punto $P(8, 5, -6)$ al plano π: $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|8 + 10 + 12 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{33}{3} = 11 \text{ u}$$

3. Halla la distancia de los puntos $Q(3, 0, 3)$ y $R(0, 0, 0)$ al plano del ejercicio anterior.

$$dist\ (Q, \pi) = \frac{|3 - 6 + 3|}{3} = 0 \quad (Q \in \pi)$$

$$dist\ (R, \pi) = \frac{3}{3} = 1$$

Página 191

4. Calcula la distancia entre la recta y el plano:

$$\boldsymbol{r}\textbf{: (1 – 3}\lambda\textbf{, 2 + }\lambda\textbf{, 1 – }\lambda\textbf{)} \qquad \pi\textbf{: } \boldsymbol{x}\textbf{ + 3}\boldsymbol{y}\textbf{ = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}(-3, 1, -1) \,//\, r \\ \vec{n}(1, 3, 0) \perp \pi\end{array}\right\} \quad \vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{d} \perp \vec{n} \;\Rightarrow\; r \,//\, \pi$$

Puesto que la recta es paralela al plano (o, acaso, contenida en él), la distancia de r a π se obtiene calculando la distancia de cualquier punto de r a π:

$$dist\ (r, \pi) = dist\ [(1, 2, 1), \pi] = \frac{|1 + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2{,}21$$

5. Calcula la distancia entre estos planos:

$$\pi\textbf{: } \boldsymbol{y}\textbf{ – 5}\boldsymbol{z}\textbf{ + 4 = 0} \qquad \pi'\textbf{: 2}\boldsymbol{y}\textbf{ – 10}\boldsymbol{z}\textbf{ = 0}$$

Los planos son paralelos, pues sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro:

$P(0, 5, 1)$ es un punto de π'. Por tanto:

$$dist\ (\pi, \pi') = dist\ (P, \pi) = \frac{|5 - 5 + 4|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \approx 0{,}78$$

Página 193

6. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$\boldsymbol{r}\textbf{:}\begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}\textbf{:}\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

- Primer método:

  Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

  $$\left.\begin{array}{l}(12, 0, 5) \,//\, r \\ (0, 1, 0) \,//\, s\end{array}\right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

  El punto $(13, 2, 8)$ es de r, y, por tanto, de π.

  Ecuación de π: $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

  $$-5x + 12z - 31 = 0$$

  $$dist\ (r, s) = dist\ (s, \pi) = dist\ [(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

- Segundo método:

  Punto genérico de r: $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

  Punto genérico de s: $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda,\ 4 + \mu,\ -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \to & -169\lambda - 169 = 0 & \to & \lambda = -1 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \to & 4 + \mu = 0 & \to & \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

- Tercer método:

$$dist\,(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

$R(13, 2, 8)$ $\quad \vec{d}(12, 0, 5)$

$S(6, 6, -9)$ $\quad \vec{d'}(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{RS}(-7, 4, -17)$

$$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \ \to \ \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d'}| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto: $dist\,(r, s) = \dfrac{169}{13} = 13$

7. Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante tres métodos distintos:

$$r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 7\mu \\ y = 1 - 5\mu \\ z = 1 - 5\mu \end{cases}$$

- Primer método:

Hallamos el plano, π, que contiene a r y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} (5, -1, 1) \,//\, r \\ (7, -5, -5) \,//\, s \end{array}\right\} (5, -1, 1) \times (7, -5, -5) = (10, 32, -18) \,//\, (5, 16, -9) \perp \pi$$

El punto $(0, 2, 0)$ es de r, y, por tanto, de π.

Ecuación de π: $5(x - 0) + 16(y - 2) - 9(z - 0) = 0$, es decir:

$$5x + 16y - 9z - 32 = 0$$

$$dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,[(5, 1, 1), \pi] = \frac{|25 + 16 - 9 - 32|}{\sqrt{25 + 256 + 81}} = 0$$

(Las rectas r y s se cortan).

- Segundo método:

  Punto genérico de r: $R(5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$

  Punto genérico de s: $S(5 + 7\mu, 1 - 5\mu, 1 - 5\mu)$

  Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

  $$\overrightarrow{RS} = (5 + 7\mu - 5\lambda, -1 - 5\mu + \lambda, 1 - 5\mu - \lambda)$$

  De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

  $$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (5, -1, 1) = 0 \ \to \ 27 + 35\mu - 27\lambda = 0 \ \to \ \mu = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (7, -5, -5) = 0 \ \to \ 35 + 99\mu - 35\lambda = 0 \ \to \ \lambda = 1 \end{cases}$$

  Sustituyendo en r y en s, obtenemos los puntos R y S: $R(5, 1, 1)$, $S(5, 1, 1)$.

  $$dist\ (r, s) = dist\ (R, S) = 0$$

- Tercer método:

  $$dist\ (r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$$

  $R(0, 2, 0)$ $\quad \vec{d}(5, -1, 1)$

  $S(5, 1, 1)$ $\quad \vec{d'}(7, -5, -5)$

  $\overrightarrow{RS}(5, -1, 1)$

  $$[\overrightarrow{RS}, \vec{d}, \vec{d'}] = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(las dos primeras filas son iguales).}$$

  Por tanto: $dist\ (r, s) = 0$

Página 195

1. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos:

$A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AC}(4, -2, -16) \end{array}\right\} \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1\,560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1\,560}}{2} \approx 19{,}75 \text{ u}^2$$

2. **Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son** $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ **y** $D(1, 5, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(-1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC}(2, 2, -2) \\ \overrightarrow{AD}(-1, 4, 2) \end{array}\right\} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Página 196

1. **Halla el L.G. de los puntos que equidistan de:**

a) $A(4, -1, 7)$ **y** $B(-2, 5, 1)$

b) $\pi: x + y + z - 2 = 0$ **y** $\pi': x - y + z - 2 = 0$

c) $\pi: x - 3y + 2z - 8 = 0$ **y** $\pi': x - 3y + 2z = 0$

a) $dist\ (X, A) = dist\ (X, B)$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 14z + 49 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 2z + 1$$

$$-12x + 12y - 12z + 36 = 0 \;\rightarrow\; x - y + z - 3 = 0$$

Es un plano: el plano mediador del segmento AB.

b) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|x - y + z - 2|}{\sqrt{3}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x + y + z - 2 = x - y + z - 2 \;\rightarrow\; 2y = 0 \;\rightarrow\; y = 0$
- $x + y + z - 2 = -x + y - z + 2 \;\rightarrow\; 2x + 2z - 4 = 0 \;\rightarrow\; x + z - 2 = 0$

Son dos planos: los planos bisectores de los ángulos diedros formados por π y π'. Los dos planos obtenidos se cortan en la recta r determinada por los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 0, 2)$, al igual que π y π'.

Además, son perpendiculares, pues $(0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 0$.

c) $dist\ (X, \pi) = dist\ (X, \pi')$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 8|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} \quad \text{Dos posibilidades:}$$

- $x - 3y + 2z - 8 = x - 3y + 2z \;\rightarrow\; -8 = 0 \;\rightarrow\;$ Imposible.
- $x - 3y + 2z - 8 = -x + 3y - 2z \;\rightarrow\; 2x - 6y + 4z - 8 = 0 \;\rightarrow\; x - 3y + 2z - 4 = 0$

Los planos π y π' son paralelos. El plano obtenido es también paralelo a ellos.

Página 197

2. Averigua si $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 25 = 0$ corresponde a la ecuación de una esfera, y halla su centro y su radio.

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D} = \sqrt{1 + 25 + 0 - 25} = 1$$

Es una esfera de radio 1. Su centro es $(-1, 5, 0)$.

3. Halla el radio de la circunferencia en la que el plano $4x - 3z - 33 = 0$ corta a la esfera $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 169$.

La esfera tiene el centro en $Q(2, -5, 0)$ y su radio es $R = 13$.

La distancia de Q al plano es: $d = \dfrac{|8 - 0 - 33|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{25}{5} = 5$

Por tanto: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

El radio de la circunferencia es 12.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de cuadrados de distancias a $O(0, 0, 0)$ y $Q(10, 0, 0)$ es 68. Tras efectuar los cálculos, comprueba que la superficie resulta ser una esfera de centro (5, 0, 0) y radio 3.

$$(x^2 + y^2 + z^2) + [(x - 10)^2 + y^2 + z^2] = 68$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 20x + 100 + y^2 + z^2 = 68$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20x + 32 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16 = 0$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Es una esfera de centro $(5, 0, 0)$ y radio 3.

Página 198

5. Halla el L.G. de los puntos cuya suma de distancias a $F(0, 0, 5)$ y $F'(0, 0, -5)$ es 26.

$$dist\,(X, F) + dist\,(X, F') = 26$$
$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 26$$
$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 5)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$
$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 676 + x^2 + y^2 + (z + 5)^2 - 52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2}$$
$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 676 + x^2 + y^2 + z^2 + 25 + 10z - x^2 - y^2 - z^2 - 25 + 10z$$
$$52\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 5)^2} = 20z + 676$$

$13\sqrt{x^2 + y^2 + (z+5)^2} = 5z + 169$

$169\,[x^2 + y^2 + (z+5)^2] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169\,[x^2 + y^2 + z^2 + 10z + 25] = 25z^2 + 1\,690z + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 169z^2 + \cancel{1\,690z} + 4\,225 = 25z^2 + \cancel{1\,690z} + 28\,561$

$169x^2 + 169y^2 + 144z^2 = 24\,336$

$\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{144} + \dfrac{z^2}{169} = 1$

Es un elipsoide.

6. Halla el L.G. de los puntos cuya diferencia de distancias a $F(5, 0, 0)$ y $F'(-5, 0, 0)$ es 6.

$|\,dist\,(X, F) - dist\,(X, F')\,| = 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 = 36 + (x+5)^2 + y^2 + z^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\cancel{x^2} - 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = 36 + \cancel{x^2} + 10x + \cancel{25} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2 + z^2} = 5x + 9$

$9[x^2 + 10x + 25 + y^2 + z^2] = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + \cancel{90x} + 225 + 9y^2 + 9z^2 = 25x^2 + \cancel{90x} + 81$

$-16x^2 + 9y^2 + 9z^2 = -144$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{16} = 1$

Es un hiperboloide.

7. Halla el L.G. de los puntos que equidistan del plano $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y del punto $\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$. ¿A qué se parece la ecuación obtenida?

$dist\,(X, F) = dist\,(X, \pi)$, donde π: $x + \dfrac{1}{4} = 0$ y $F\left(\dfrac{1}{4}, 0, 0\right)$.

$\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + y^2 + z^2} = \left|x + \dfrac{1}{4}\right|$

$\cancel{x^2} - \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}} + y^2 + z^2 = \cancel{x^2} + \dfrac{1}{2}x + \cancel{\dfrac{1}{16}}$

$x = y^2 + z^2$

Es un paraboloide. Su ecuación es muy similar a la de una parábola.

Página 204

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ángulos

1 **Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que las rectas se cortan:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = \quad -2\lambda \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r\,(-2, 3, -2)$; $P(5, 4, 0)$

$\vec{d}_s\,(-1, 5, 1)$; $P'(5, 4, 0)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que se cortan en el punto P.

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$:

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$; $|\vec{d}_s| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$

$$\cos\alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{27}} = 0{,}7 \;\rightarrow\; \alpha = 45°\ 33'\ 42''$$

b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$$

Por lo tanto:

$\vec{d}_r\,(1, 1, -1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d}_s\,(3, 2, 5)$; $P'(3, 0, 15)$

Como $P = P'$ y $\vec{d}_s$ no es proporcional a $\vec{d}_r$, entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P.

$|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90°$.

2 **Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90°:**

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(-5, 1, -1)$; $\vec{d}_s(1, 2, m)$

Para que r y s formen 90°, el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ tiene que ser 0:

$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \;\rightarrow\; m = -3$

s3 **Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:**

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$ $\qquad \pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\; y = 1 + 2\lambda,\; z = -2$ $\qquad \pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad \pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección; luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 90° \;\rightarrow\; \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 90° - \alpha = 30° \;\rightarrow\; \alpha = 60°$$

s4 **Calcula el ángulo que forman los dos planos siguientes:**

$$\alpha: z = 3 \qquad \beta: x - y + 2z + 4 = 0$$

$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1)$; $\vec{n}_\beta(1, -1, 2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\,|\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \;\rightarrow\; \varphi = 35°\ 15'\ 52''$$

5 **Halla los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:**

a) $\boldsymbol{A(0, 0, 0),\ B(1, 2, 1),\ C(3, 1, 1)}$

b) $\boldsymbol{A(2, 7, 3),\ B(1, 2, 5),\ C(-1, -2, 5)}$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0{,}73855 \ \rightarrow\ \hat{A} = 42°\ 23'\ 31''$$

$\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \ \rightarrow\ \hat{B} = 90°$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47°\ 36'\ 29''$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0{,}97922 \ \rightarrow\ \hat{A} = 11°\ 42'\ 6''$$

$\overrightarrow{BA} = (1, 5, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0{,}898 \ \rightarrow\ \hat{B} = 153°\ 54'\ 56''$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14°\ 22'\ 58''$

6 **Calcula el ángulo que forma el plano siguiente con cada uno de los ejes coordenados:**

$$\boldsymbol{\pi: x - 2y + z = 0}$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$

- El ángulo que forma π con el eje X, de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$\cos (90° - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0{,}408 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 90° - \alpha = 65°\ 54'\ 19'' \ \rightarrow\ \alpha = 24°\ 5'\ 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje Y, de vector director $(0, 1, 0)$, es:

$$cos\ (90° - \beta) = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 1, 0)|\ |(1, -2, 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0{,}8165 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 90° - \beta = 35°\ 15'\ 52'' \ \rightarrow\ \beta = 54°\ 44'\ 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje Z, de vector director $(0, 0, 1)$, es:

$$cos\ (90° - \gamma) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 0, 1)|\ |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}408 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 90° - \gamma = 65°\ 54'\ 19'' \ \rightarrow\ \gamma = 24°\ 5'\ 41''$$

Distancias

7 **Calcula la distancia que hay entre los siguientes pares de puntos:**

a) $\boldsymbol{A(2, 5, -2),\ B(-1, 1, -2)}$ **b)** $\boldsymbol{A(-1, 7, 4),\ B(-1, 2, 16)}$

a) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(-3, -4, 0)| = 5$ u

b) $dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -5, 12)| = 13$ u

8 **Considera la recta r y el plano π siguientes:**

$$r: \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \pi: x + y - 2z = 1$$

a) Halla las coordenadas del punto S donde se cortan r y π.

b) Calcula la distancia del punto $P(4, 0, 1)$ al punto S del apartado anterior.

a) Para hallar el punto S donde se intersecan r y π, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -3 \\ x + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow\ S(0, 3, 1)$$

b) $dist\ (P, S) = |\overrightarrow{PS}| = |(-4, 3, 0)| = 5$ u

9 **Tenemos la recta r y los planos π y σ siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi: x + 2y - z = 1 \\ \sigma: x - y + z = 3 \end{array}$$

a) Halla el punto P donde se cortan la recta r y el plano π.

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y σ.

c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π:

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$

b) De la misma forma hallamos Q:

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

10 **Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π:**

a) $P(2, -3, 1)$, π: $3x - 4z = 3$

b) $P(0, 1, 3)$, π: $x - y - 2z + 3 = 0$

c) $P(2, 0, 1)$, π: $x + y - 2z = 0$

a) $P(2, -3, 1)$; π: $3x - 4z - 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ u}$$

b) $P(0, 1, 3)$; π: $x - y - 2z + 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \simeq 1{,}633 \text{ u}$$

c) $P(2, 0, 1)$; π: $x + y - 2z = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = 0 \text{ u}$$

11 **Calcula la distancia entre el punto (3, –4, 1) y el plano $y = 3$.**

$P(3, -4, 1)$; π: $y - 3 = 0$

$$dist\ (P, \pi) = \frac{|-4 - 3|}{\sqrt{1}} = 7 \text{ u}$$

12 **Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene a**

$$\boldsymbol{P(2, 0, 4)} \text{ y a } \boldsymbol{s}: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

El plano π, que contiene a P y a s, tiene como vectores dirección $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$, siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \overrightarrow{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a $\vec{n}$: $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es π: $z = 4$

$$dist\ (Q, \pi) = \frac{|0-4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

13 **Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:**

a) π_1: $x - 2y + 3 = 0$; π_2: $2x - 4y + 1 = 0$

b) π_1: $3x - 2y + z - 2 = 0$; π_2: $2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2.

$$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$$

$$dist\ (P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

Página 205

14 **Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:**

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases}$ $\quad \pi$: $3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\quad \pi$: $7x - 2y - z + 1 = 0$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d}_r(4, 3, 7)$; $\quad \vec{n}(3, -4, 0)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \;\rightarrow\;$ son perpendiculares

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π. Tomamos P como punto de r.

$$dist\ (r, \pi) = dist\ (P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ u}$$

b) $\vec{d}_r(2, 0, 1)$; $\vec{n}(7, -2, -1)$

$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \rightarrow$ no son perpendiculares $\rightarrow$ r y π se cortan $\rightarrow$

$\rightarrow$ $dist\ (r, \pi) = 0$

15 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta**

$$r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$ **mediante los siguientes pasos:**

a) Halla un plano, π, perpendicular a r que contenga a P.

b) Obtén la intersección de π con r. Llama a ese punto Q.

c) Calcula la distancia de P a Q.

a) El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r.

La ecuación de π es: $4(x - 3) + (y - 1) - 3(z - 6) = 0$

π: $4x + y - 3z + 5 = 0$

b) Para hallar la intersección de π con r, sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π:

$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de r $\rightarrow$ $Q(0, 1, 2)$

c) $dist\ (P, r) = dist\ (P, Q) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

16 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta** $$r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$$

siguiendo los pasos del ejercicio anterior.

- $\vec{d}_r(12, -3, 5)$; $P(2, 2, -11)$

  $12(x - 2) - 3(y - 2) + 5(z + 11) = 0$

  π: $12x - 3y + 5z + 37 = 0$

- Sustituimos las coordenadas de r en π para hallar la intersección de r y π:

  $12 \cdot (9 + 12\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5(6 + 5\lambda) + 37 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

  El punto de intersección es $Q(-3, 2, 1)$.

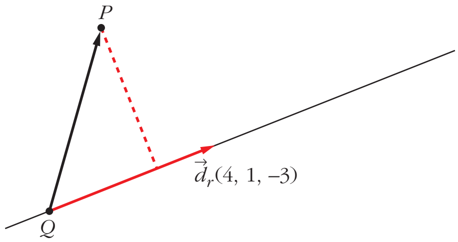
- $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-5, 0, 12)| = 13$ u

17 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ mediante los siguientes pasos:**

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.

b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector dirección de r.

c) Divide dicha área entre el módulo del vector dirección de r.



a) $P(3, 1, 6)$, $Q(4, 2, -1) \in r$

$\overrightarrow{PQ}(1, 1, -7)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650}$

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$

18 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos del ejercicio anterior.**

- $Q(9, -1, 6)$

  $\overrightarrow{PQ} = (7, -3, 17)$

- $\vec{d}_r(12, -3, 5)$

  Área paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = |(36, 169, 15)| = \sqrt{30\,082}$

- $|\vec{d}_r| = \sqrt{178}$

  $dist\,(P, Q) = \sqrt{\dfrac{30\,082}{178}} = 13$ u

19 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s.

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π.

r: $R(0, -10, 9)$, $\vec{d}_r(4, -3, 5)$

s: $S(2, 1, 4)$, $\vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) \,//\, (3, 4, 0) \perp \pi$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

π: $3(x - 0) + 4(y + 10) + 0(z - 9) = 0 \;\rightarrow\; \pi$: $3x + 4y + 40 = 0$

b) $dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,(S, \pi) = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{50}{5} = 10$

20 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- El vector normal a π será $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$

  $-84(x + 7) + 35(z - 19) = 0$

  π: $-84x + 35z - 1\,253 = 0$

- $Q(10, -2, 26) \in s$

  $dist\,(r, s) = dist\,(Q, \pi) = \dfrac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1\,253|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \dfrac{1\,183}{91} = 13$ u

21 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s, respectivamente.

b) Halla el volumen, V, del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores dirección de r y s.

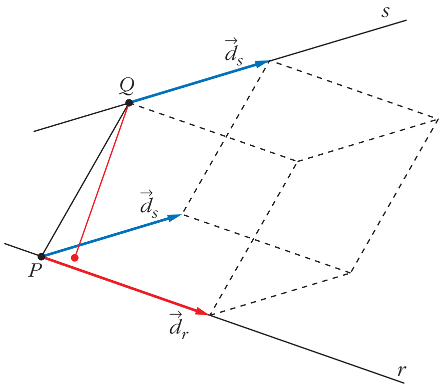
c) Halla el área, A, del paralelogramo descrito por los vectores dirección de r y s.

d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A.

$P(0, -10, 9) \in r$, $\vec{d}_r(4, -3, 5)$

$Q(2, 1, 4) \in s$, $\vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\overrightarrow{PQ}(2, 11, -5)$



b)

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -12 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & -5 \end{vmatrix} = -800$$

$V = |-800| = 800 \text{ u}^3$

c) $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(4, -3, 5) \times (-12, 9, 1)| = |(-48, -64, 0)| = 80 \text{ u}^2$

d) $dist\,(r, s) = \dfrac{V}{A} = \dfrac{800}{80} = 10 \text{ u}$

22 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- $P(-7, 4, 19)$; $Q(10, -2, 26)$

  $\overrightarrow{PQ}(17, -6, 7)$

- $\vec{d}_r(5, 1, 12)$

  $\vec{d}_s(-10, 5, -24)$

  $$V = |[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 12 \\ -10 & 5 & -24 \\ 17 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1\,183 \text{ u}^3$$

- $A = |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(-84, 0, 35)| = 91 \text{ u}^2$

- $dist\,(r, s) = \dfrac{V}{A} = \dfrac{1\,183}{91} = 13 \text{ u}$

Áreas y volúmenes

23 **Halla el área de cada uno de los triángulos:**

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$

b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \simeq 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

Página 206

24 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro con vértices:**

a) (2, 1, 4); (1, 0, 2); (4, 3, 2); (1, 5, 6)

b) (4, 1, 2); (2, 0, 1); (2, 3, 4); (6, 5, 1)

a) $A(2, 1, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(4, 3, 2)$; $D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$; $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \quad \to \quad \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$; $B(2, 0, 1)$; $C(2, 3, 4)$; $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$; $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$; $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \quad \to \quad \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

25 **Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

- Área del triángulo ABC:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \simeq 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} \simeq 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} \simeq 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total $= 14 + 22{,}68 + 43{,}15 + 60{,}19 = 140{,}02$ u^2

- Volumen: $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$; $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$; $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{306}{6} \simeq 51{,}33 \text{ u}^3$$

s26 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:**

$$\mathbf{6x - 5y + 3z - 30 = 0}$$

☛ ***Recuerda que $V = (1/3) \cdot$ área base $\times$ altura. En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí. Hazlo, también, utilizando el producto mixto, y comprueba que obtienes el mismo resultado.***

- Hallamos los vértices:

$x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = 10 \rightarrow A(0, 0, 10)$

$y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0, 0)$

$x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow C(0, -6, 0)$

$O(0, 0, 0)$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(10 \cdot 5 \cdot 6) = 50 \text{ u}^2$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\,|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}\right| = 50 \text{ u}^3$$

s27 **Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera

28 **Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \;\rightarrow\; \textit{radio} = \sqrt{9} = 3$$

$$\textit{Centro} = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \;\to\; radio = \sqrt{6}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \;\to\; radio = \sqrt{15}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \;\to\; radio = 2$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

29 **Halla la ecuación de las siguientes esferas:**

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB: $C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

La ecuación es: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 11$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será: $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π: $r = dist\,(C, \pi) = 3$

La ecuación será: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

30 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro $(2, -1, 4)$ y radio 7:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 49$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$

PARA RESOLVER

s31 **Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$**

y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$$P(1, -1, 1) \in r \;\rightarrow\; P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \;\rightarrow\; \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \;\rightarrow\; (2, -1, 3) \,//\, \pi$$

Obtenemos un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \;\rightarrow\; (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x-1) + 7(y+1) - 1(z-1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi:\; 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma:\; 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \to \quad \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} R\left(0, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\left\{\begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{array}\right.$

s32 Dados la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{array}\right.$ y el plano π: $x + 2y + 3z - 1 = 0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π, que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r.

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array}\right.$$

s33 Dados la recta $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y el plano π: $x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \to \quad P(0, 1, -1);\ \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \to \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$, y contendrá a P.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \to \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

s34 **Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x + \ y = z + 4 \\ x + 2y = \quad\ 7 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x \quad\ - 2 = 0 \\ \quad y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \left.\begin{cases} x + \ y = z + 4 \\ x + 2y = \quad\ 7 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando la 1.}^{\text{a}} \text{ ecuación a la 2.}^{\text{a}}\text{: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z \end{array}$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \to \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \to \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \quad \to \quad \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \quad \to \quad 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \quad \to \quad -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad \to \quad \mu - \lambda = 0 \quad \to \quad \mu = \lambda \quad \to \quad \mu = \lambda \end{array}\right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{8}{5}; \quad \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{8}{5}\right) \\ \\ S\left(2, -3, \dfrac{8}{5}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \quad \to \quad \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

s35 **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \frac{x - 1}{1} = \frac{y - p}{p - 1} = \frac{z - 3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p - 1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \quad \to \quad p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punto de intersección:

$$\left.\begin{array}{r} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{array}\right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones:}$$

$$1 = 9 + 8\mu \;\rightarrow\; -8 = 8\mu \;\rightarrow\; \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: (0, 1, 0)

- Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \rightarrow (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$8x + 5y - 11z - 5 = 0$

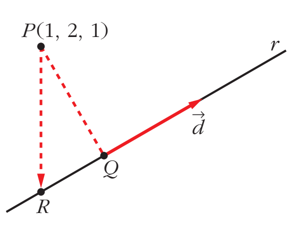
s36 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta siguiente:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \;\rightarrow\; y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \;\rightarrow\; x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\vec{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\vec{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\vec{PR} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

s37 **Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY.**

Los vértices del triángulo son:

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 2x = 6 \ \rightarrow\ x = 3 \ \rightarrow\ A(3, 0, 0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ y = 6 \ \rightarrow\ B(0, 6, 0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -3z = 6 \ \rightarrow\ z = -2 \ \rightarrow\ C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\overrightarrow{AC}$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow$ $(2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lll} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t)$ $\rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$

Página 207

s38 **Halla el punto P de la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidiste de los planos:**

$$\alpha\text{: } x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta\text{: } \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \beta\text{: } x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \;\to\; 6\lambda = 0 \;\to\; \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \;\to\; 6\lambda = -6 \;\to\; \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

s39 Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano OXY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-3}{-1} \;\to\; a = 3 \\ \dfrac{9}{a} = \dfrac{-3}{-1} \;\to\; a = 3 \end{cases} \Bigg\} \; a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \;\to\; a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\frac{8a}{a^2-9}, \frac{-8}{a^2-9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\ (P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2-9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2-9}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{64a^2+64}{(a^2-9)^2} = 2$$

$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \quad \rightarrow \quad 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \quad \rightarrow \quad a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \quad \rightarrow \quad a = \pm 7 \\ a^2 = \ \ 1 \quad \rightarrow \quad a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

s40 Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas $(-1 + 3\lambda,\ 1 + 2\lambda,\ 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \quad \rightarrow \quad (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$\vec{d}(3, 2, 1)$; $\vec{n}(2, 1, -3)$

$$cos\ (90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\ |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29''$$

41 Dado un cubo (hexaedro regular) de lado 6 cm, halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una de sus caras, sabiendo que las rectas de ambas diagonales se cruzan.

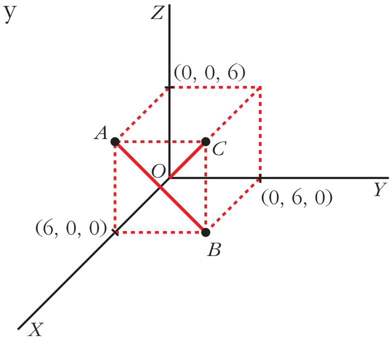
☛ ***Dibuja el cubo con un vértice en el origen y los contiguos sobre los ejes coordenados.***

- La diagonal del cubo pasa por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$



- $dist\ (r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$

$$[\vec{d}, \vec{d}', \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \quad \to \quad |\vec{d} \times \vec{d}'| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\ (r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

s42 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$1(x - 1) + 3(y - 3) + 2(z - 2) = 0$

$x + 3y + 2z - 14 = 0$

43 Determina las condiciones que deben cumplir *a* y *b* para que estos tres planos:

$$\boldsymbol{ax + z - 1 = 0, \quad x + bz + 2 = 0, \quad \sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0}$$

se corten en un punto.

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$$\left.\begin{array}{r} ax \qquad + z = 1 \\ x \qquad + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \quad \to \quad ab \neq 1$$

- **Si $a = 2$ y $b = 1$**, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando: } x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \\ z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

- **Ángulo que forma la recta con el 3.[er] plano:**

$\vec{d}(0, 1, 0)$ $\vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$

$$cos\,(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; 90° - \alpha = 45° \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

s44 **Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta r:** $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$

— Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \;\rightarrow\; P'(2, -1, 1)$

— Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 \;\rightarrow\; y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \;\rightarrow\; z = 4x \end{cases}\right\} \;\rightarrow\; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \rightarrow P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

45 **a) Encuentra los puntos de r: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano: π: $2x - y + 2z + 1 = 0$.**

b) Obtén los puntos de π que distan $\frac{1}{3}$ de los puntos hallados en el apartado anterior.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ z = x \end{array}\right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \left\langle \begin{array}{l} 5\lambda + 1 = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \rightarrow \lambda = -2/5 \end{array} \right.$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

$$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \;\rightarrow\; 9\lambda = -1 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

$$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = \;\;2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

$$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

$$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

$$9\lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{9}$$

El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

s46 Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.

a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x-1) - 3(y-4) + 1(z-4) = 0$

$$\pi:\; 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$y = 0,\; z = 0 \;\rightarrow\; 2x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -3 \;\rightarrow\; A(-3, 0, 0)$

$x = 0,\; z = 0 \;\rightarrow\; -3y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; B(0, 2, 0)$

$x = 0,\; y = 0 \;\rightarrow\; z + 6 = 0 \;\rightarrow\; z = -6 \;\rightarrow\; C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\;\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

s47 Dados los puntos $A(1, 5, -2)$, $B(4, 0, 1)$ y $C(-3, 2, 0)$:

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Hay que probar que los puntos no están alineados.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(3, -5, 3) \\ \overrightarrow{AC}(-4, -3, 2) \end{array}\right\}$ Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados. Son los vértices de un triángulo.

b) • Obtenemos la ecuación del lado AC:

$$r: \begin{cases} x = -3 - 4\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

• Hallamos el plano que pasa por B y es perpendicular a r:

$-4(x - 4) - 3(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

$\pi: -4x - 3y + 2z + 14 = 0$

• Obtenemos el punto de intersección de r con π:

$-4(-3 - 4\lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 4\lambda + 14 = 0$

$12 + 16\lambda - 6 + 9\lambda + 4\lambda + 14 = 0$

$29\lambda + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{-20}{29}$

El punto (proyección de B sobre AC) es: $B'\left(\dfrac{-7}{29}, \dfrac{118}{29}, \dfrac{-40}{29}\right)$

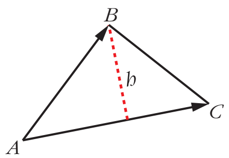
• La longitud del segmento es la distancia entre B y B':

$$|\overrightarrow{B'B}| = \left|\left(\frac{123}{29}, \frac{-118}{29}, \frac{69}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{33\,814}{841}} = \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \approx 6{,}34$$

De otra forma:

$$\text{h} = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(1, 18, 29)|}{\sqrt{16 + 9 + 4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1\,166}{29}} \simeq 6{,}34$$



s48 **Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.**

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\ [(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

s49 **Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro lado sobre $s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$.**

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es el (0, 0, 0), ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

Para que el enunciado sea correcto, las dos rectas deben ser paralelas. Veamos si es así:

Escribimos la recta r en forma paramétrica:

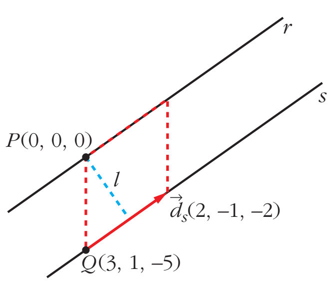
$$(3, 2, 2) \times (1, -2, 2) = (8, -4, -8) \,//\, (2, -1, -2) = \vec{d}_r;\quad O(0, 0, 0) \in r$$

$$r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \to \quad \vec{d}_r(2, -1, -2);\ P(0, 0, 0)$$

Puesto que $\vec{d}_s = \vec{d}_r$, las dos rectas tienen la misma dirección.

Además $P(0, 0, 0) \in r$, pero $P(0, 0, 0) \notin s$. Por tanto, las rectas son paralelas.

a) El lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.

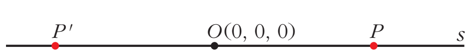


$$dist\ (r, s) = dist\ (P, s) = \frac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Base}} =$$

$$= \frac{|\vec{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}} = \sqrt{10} = l$$

Por tanto, $\text{Área} = (\sqrt{10})^2 = 10\ u^2$

b)



Si P (o P') es el otro vértice del cuadrado situado sobre la recta r, $\vec{OP}$ y $\vec{OP'}$ son vectores con la misma dirección que $\vec{d}_r$ y con módulo $\sqrt{10}$:

$$\vec{OP} = \frac{\sqrt{10}}{|\vec{d}_r|}\vec{d}_r = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4+1+4}}(2, -1, -2) = \frac{\sqrt{10}}{3}(2, -1, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{-1}{3}\sqrt{10}, \frac{-2}{3}\sqrt{10}\right) \text{ y } P'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$$

P y P' son las posibles posiciones del segundo vértice del cuadrado situado en r. Los otros vértices están en la recta s.

s50 **Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.**

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2.

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

r_1: $\vec{AB}(4, -2, 0) // (2, -1, 0)$ $\qquad r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

r_2: $\vec{CD}(3, 2, -7)$ $\qquad r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$

- Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\vec{AC}(-2, -4, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre r_1 y r_2:

$$dist\,(r_1, r_2) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} =$$

$$= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \simeq 1{,}22$$

Página 208

s51 **Halla la ecuación general del plano determinado por los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(1, -2, 0)$, y calcula el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB}(-3, -1, -2) \\ \vec{AC}(0, -3, -1) \end{array}\right\} \text{ Son paralelos al plano.}$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 3y - 9z + 1 = 0$$

- Vértices del tetraedro: $O(0, 0, 0)$

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 5x = -1 \ \rightarrow\ x = -\frac{1}{5} \ \rightarrow\ A\left(-\frac{1}{5}, 0, 0\right)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 3y = -1 \ \rightarrow\ y = -\frac{1}{3} \ \rightarrow\ B\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -9z = -1 \ \rightarrow\ z = \frac{1}{9} \ \rightarrow\ C\left(0, 0, \frac{1}{9}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{810}\ \text{u}^3$$

s52 Sean los puntos $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento.

Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C:

a) Escribe la ecuación del plano π.

b) Calcula el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C (O es el origen de $\mathbb{R}^3$).

a) El plano es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}(-2, 6, -4) \,//\, (1, -3, 2)$. Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M = (4, 4, 1)$.

La ecuación del plano es: $1(x-4) - 3(y-4) + 2(z-1) = 0$

$$\pi: x - 3y + 2z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del tetraedro:

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ x + 6 = 0 \ \rightarrow\ x = -6 \ \rightarrow\ A(-6, 0, 0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ -3y + 6 = 0 \ \rightarrow\ y = 2 \ \rightarrow\ B(0, 2, 0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -2z + 6 = 0 \ \rightarrow\ z = -3 \ \rightarrow\ C(0, 0, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}(6 \cdot 2 \cdot 3) = 6\ \text{u}^3$$

s53 Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

  $(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$

  $3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$

  El punto es $P'(5, 1, 2)$

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

  $$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \simeq 2{,}83$$

s54 **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2)\\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2)\end{array}\right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales; luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \rightarrow A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$

π: $2x + z - 3 = 0$

$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\,[\text{Área base} \cdot \text{altura}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

s55 **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

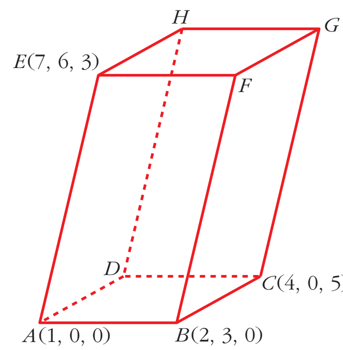
  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

  $D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \to (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

  $F(8, 9, 3)$



- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \to (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$

  $G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \to (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$

  $H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0), \ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5), \ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \to \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

s56 **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$$

$$s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina la posición relativa de ambas rectas y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } -2y = -2 - 4x \to y = 1 + 2x \\ z = 2 - x + y = 3 + x \end{array}$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

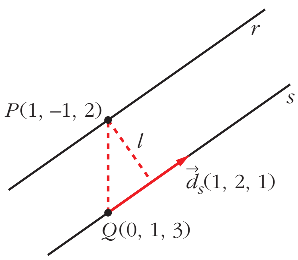
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

  $\vec{d}_r(1, 2, 1); \ P(1, -1, 2)$

  $\vec{d}_s(1, 2, 1); \ Q(0, 1, 3)$

  Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3}\ u^2$$

s57 Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta:

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0$.

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$P(1, 1, 2)$; $\vec{d}_r(2, 1, 2)$; $\vec{n}(1, -3, 2)$

$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$

La ecuación de π es: $8(x - 1) - 2(y - 1) - 7(z - 2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

s58 Considera las rectas r y s:

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \;\to\; -6\lambda - 7 = 0 \;\to\; \lambda = -\dfrac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \;\to\; -2 + 3\mu = 0 \;\to\; \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \;\to\; \vec{d}(0, 1, -1)$$

La recta es: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{7}{6} + \lambda \\ z = -\dfrac{1}{6} - \lambda \end{cases}$

s59 **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta r: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.**

La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

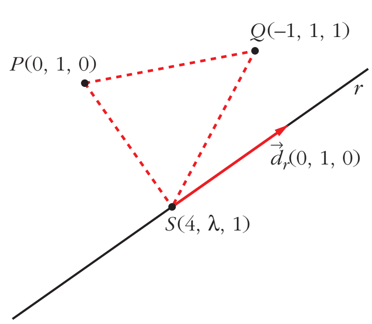
a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \;\to\; \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \;\to\; \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$



b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$; $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

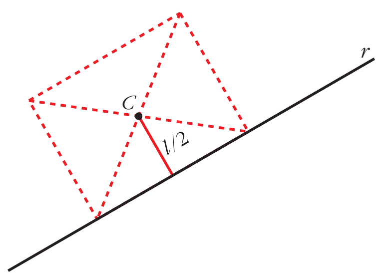
60 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, –1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \;//\; \pi$

Un vector normal al plano es:

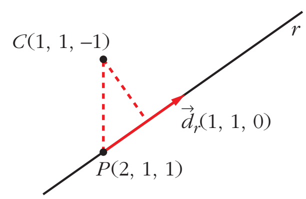
$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$

$2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.



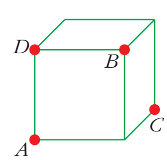
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

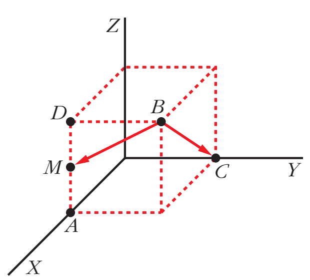
$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$$

s61 **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$; $B(1, 1, 1)$; $C(0, 1, 0)$; $D(1, 0, 1)$; $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}316 \;\rightarrow\; \alpha = 71°\ 33'\ 54''$$

s62 **Sea la recta** r: $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad - 1 = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s **que corta perpendicularmente a** r **y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto** P **intersección de** r **y** s**.**

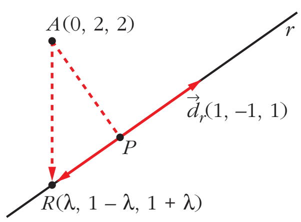
b) Halla la ecuación del plano π **que contiene a** r **y a** s**, y la de la recta** t **perpendicular a** π **por el punto** P**.**

c) Si Q **es cualquier punto de** t**, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de** Q **a** r**, a** s **y a** π**.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \to \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad - 1 = 0 & \to \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir:

$\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \ \to \ 3\lambda = 0 \ \to \ \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \quad \to \quad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1)$; $P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \ \to \ dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

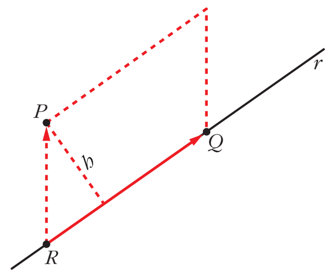
Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

Página 209

s63 **a) Halla la distancia del punto *P*(1, –1, 3) a la recta que pasa por los puntos *Q*(1, 2, 1) y *R*(1, 0, –1).**

b) Encuentra todos los puntos *S* del plano determinado por *P*, *Q* y *R*, de manera que el cuadrilátero de vértices *P*, *Q*, *R* y *S* sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q; entonces:

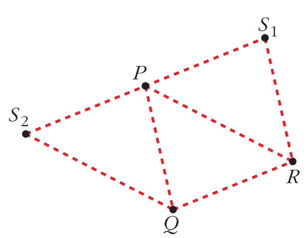


$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2)\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4+4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \simeq 3{,}54 \text{ u}$$

b) Hay dos posibilidades: que P y Q sean vértices consecutivos, o que lo sean P y R.



- Si P y Q son consecutivos, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \quad \rightarrow \quad (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1)$

  $S_1(1, -3, 1)$

- Si P y R son consecutivos, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \quad \rightarrow \quad (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1) \quad \rightarrow \quad S_2(1, 1, 5)$

s64 **Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.**

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \quad \rightarrow \quad (m+1)^2 = m^2 + 2 \quad \rightarrow \quad m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

s65 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\vec{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico: $dist\,(P, A) = dist\,(P, B) \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$$

π: $2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\vec{AB}$:

  $\vec{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow$ $\vec{n}(2, 8, -8) \,//\, \vec{AB}$

  Luego $\vec{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

s66 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos siguientes:**

α: $\mathbf{3x + y - 2z + 1 = 0}$ $\qquad$ β: $\mathbf{x - 3y + 2z - 3 = 0}$

☛ ***Hay dos soluciones. Son los planos bisectores del diedro que determinan*** α ***y*** β.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1+9+4}}$$

$$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3|$$

$$3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0$$

$$3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

67 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, x, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1$$

$$|x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = \;\;3 \;\rightarrow\; x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \;\rightarrow\; x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas: $r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$

s68 a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x - 4y + 5 = 0$ y $2x - 2y + z + 9 = 0$.

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = \;\;10x - 10y + 5z + 45 \;\rightarrow\; x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \;\rightarrow\; 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \;\rightarrow\; \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9|$$

$$\begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \;\rightarrow\; -2y = 30 \;\rightarrow\; y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \;\rightarrow\; -22y = -60 \;\rightarrow\; y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos: $Q_1(0, -15, 0)$ y $Q_2\left(0, \dfrac{30}{11}, 0\right)$

s69 Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a igual distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$.

¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$dist\ (A, P) = dist\ (A, Q) \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 =$$

$$= \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \ \rightarrow \ -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ dist\ (P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$$

70 **Halla la ecuación de la esfera que pasa por:**

$$\boldsymbol{A(1, 1, 1),\ B(1, 2, 1),\ C(1, 1, 2),\ D(2, 1, 1)}$$

La ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

Sustituimos cada uno de los cuatro puntos en la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 1+1+1+a+b+c+d=0 \ \rightarrow \ a+b+c+d=-3 \\ 1+4+1+a+2b+c+d=0 \ \rightarrow \ a+2b+c+d=-6 \\ 1+1+4+a+b+2c+d=0 \ \rightarrow \ a+b+2c+d=-6 \\ 4+1+1+2a+b+c+d=0 \ \rightarrow \ 2a+b+c+d=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-3 \\ b=-3 \\ c=-3 \\ d=\ \ 6 \end{array}$$

La ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

71 **a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}(0, 0, 1)$.

Su ecuación es: $0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-1) = 0$, es decir: $z - 1 = 0$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \ \rightarrow \ P'(1, 2, -1)$$

72 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y que tiene su centro en la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4+1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z+1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| =$$

$$= |-z+1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2z - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow Radio = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x+2)^2 + y^2 + (z+11)^2 = \dfrac{144}{5}$

- $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow Radio = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \dfrac{16}{5}$

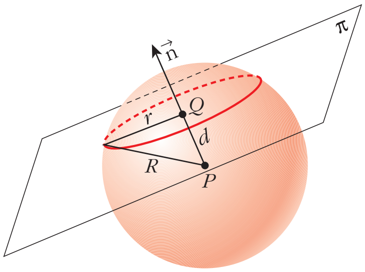
73 **La esfera $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia. Halla su centro y su radio.**

- Obtengamos el centro de la circunferencia:

  — El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

  — La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



  — El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

  $2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$

  $6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

  $Q(1, 0, 0)$

- Calculamos el radio de la circunferencia:

  La distancia entre los centros P y Q es:

  $$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

  El radio de la esfera es $R = 5$.

  Luego el radio de la circunferencia es: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

74 **a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta:**

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 4}{-1}$$

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda + 4)^2 + (\lambda + 2)^2 + (-\lambda - 1)^2} = \sqrt{(2\lambda + 5)^2 + (\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda =$$

$$= \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \;\rightarrow\; \lambda = -3 \;\rightarrow\; C(2, 0, -1)$$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3$ = radio de la esfera.

La ecuación es: $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$, o bien:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

75 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir:

$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 2[x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4z + 4]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 29 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 12x + 4y + 8z + 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 10y + 16z - 1 = 0$$

Es una *esfera* de *centro* $(8, -5, -8)$ y *radio* $\sqrt{154} \simeq 12{,}4$.

76 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}(x-4, y-2, z)\\ \overrightarrow{BP}(x-2, y-6, z+4)\end{array}\right\} \text{ han de ser perpendiculares, es decir:}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \quad \to \quad (x-4)(x-2) + (y-2)(y-6) + z(z+4) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 12 + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es una *esfera* de *centro* $(3, 4, -2)$ y *radio* 3.

77 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(2, 0, 0)$ y $(-2, 0, 0)$ sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36$$

$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81$$

$$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

78 **Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de (0, 0, 3) y del plano $z = -3$.**

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$dist = \big(P, (0, 0, 3)\big) = dist\ (P, \{z = -3\})$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = \frac{|z+3|}{\sqrt{1}} = |z+3|$$

Por tanto:

$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = (z+3)^2$

$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$

$x^2 + y^2 - 12z = 0$

Se trata de un *paraboloide*.

79 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) sea igual a 4.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2}\right| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$

$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$

$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

80 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos (2, 3, 4) y (2, 3, –4) es igual a 8? ¿Cómo se llama la superficie que obtienes?**

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x-2)^2} + (y-3)^2 + \cancel{(z-4)^2} = 64 + \cancel{(x-2)^2} + (y+3)^2 + \cancel{(z-4)^2} -$$

$$- 16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

$$16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 64 + 12y$$

$4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} = 16+3y$

$16(x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-8z+16) = 256+96y+9y^2$

$16x^2+7y^2+16z^2-64x-128z+208=0$

Se trata de un *elipsoide.*

81 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los puntos (–4, 3, 1) y (4, 3, 1) es igual a 6?**

$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} = 6$

$4x-9 = 3\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$

$7x^2-9y^2-9z^2+54y+18z-153=0$

Se trata de un *hiperboloide.*

82 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x=y$ y del punto (0, –2, 1).**

$dist(P, \pi) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $dist(P, Q) = \sqrt{(x^2+(y+2)^2+(z-1)^2}$

$\left(\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2+y^2+4y+4+z^2-2z+1$

$x^2+y^2-2xy = 2x^2+2y^2+8y+8+2z^2-4z+2$

$x^2+y^2+2z^2+2xy+8y-4z+10=0$

Se trata de un *paraboloide.*

Página 210

CUESTIONES TEÓRICAS

83 **La ecuación $ax+by+cz+d=0$ representa un plano del espacio. Explica qué característica tiene dicho plano en cada uno de los casos siguientes:**

I) $a=0$, $b=0$

II) $b=0$, $c=0$

III) $a=0$, $c=0$

IV) $d=0$

I) Es perpendicular al eje *OZ*. (Paralelo al plano *OXY*).

II) Es perpendicular al eje *OX*. (Paralelo al plano *OYZ*).

III) Es perpendicular al eje *OY*. (Paralelo al plano *OXZ*).

IV) Pasa por el origen, (0, 0, 0).

84 **Define la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π y explica el procedimiento que emplearías para obtenerla.**

La proyección ortogonal de un punto, P, sobre un plano, π, es un punto, P', tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a π. Un procedimiento para obtener P' sería el siguiente:

Se halla la recta, r, perpendicular a π que pasa por P. El punto de corte entre r y π es el punto buscado, P'.

85 **Dada una recta r y un punto P de ella, ¿cuántas rectas perpendiculares a r que pasen por el punto P se pueden trazar?**

Infinitas. Todas las que, pasando por P, están contenidas en el plano perpendicular a r que pasa por P.

86 **Dado el plano π: $x - 3y + 2z - 1 = 0$, escribe las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un vector $\vec{v}(a, b, c)$ para que tenga la dirección de alguna recta contenida en el plano.**

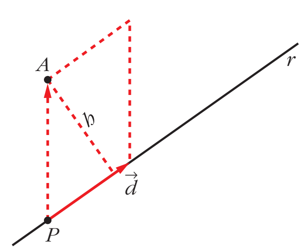
$\vec{v}(a, b, c)$ debe ser perpendicular al vector normal del plano π, $\vec{n}(1, -3, 2)$; es decir: $(a, b, c) \cdot (1, -3, 2) = a - 3b + 2c = 0$

87 **Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta:**

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ **se puede calcular mediante la fórmula:**

$$d(A, r) = \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.



La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$$dist\ (A, r) = \frac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} =$$

$$= \frac{|(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

88 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por el punto B y el vector $\vec{d}_s$. Sabemos que r y s se cruzan.**

a) Justifica que la distancia entre r y s se puede calcular así:

$$dist(r, s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) Justifica que la perpendicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\begin{cases} det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$$

a) $dist\ (r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\vec{AB},\ \vec{d}_r\ \text{ y }\ \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

β: $det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto: $p: \begin{cases} det(\vec{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det(\vec{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

89 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ un punto del plano π: $ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ un punto tal que $\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0$. Demuestra que, entonces, $B \in \pi$.**

$$\vec{AB} \cdot (a, b, c) = 0 \ \rightarrow\ a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (ax_2 + by_2 + cz_2) - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}_{-d\ (\text{pues } A\ \in\ \pi)} = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \ \rightarrow\ B \in \pi$$

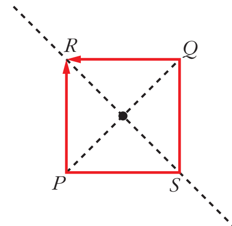
PARA PROFUNDIZAR

s90 **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.



La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, (1, 1, 0).

Pasa por el punto medio del segmento PQ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

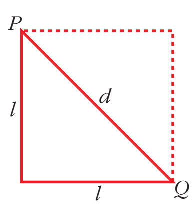
Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1 + \lambda, -1 + \lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Los vértices son: $R\left(\dfrac{4 + \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 + \sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\dfrac{4 - \sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4 - \sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$

91 **Considera los puntos siguientes:**

$$\boldsymbol{A(a, 0, 0),\ B(0, b, 0),\ C(0, 0, c)}$$

Prueba que la distancia, *d*, del origen de coordenadas al plano *ABC* verifica:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

El plano que pasa por A, B y C es:

$\pi: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ (véase ejercicio 66 a) de la unidad 6),

es decir: $\pi: \dfrac{1}{a}x + \dfrac{1}{b}y + \dfrac{1}{c}z - 1 = 0$

Así, si $O(0, 0, 0)$, entonces:

$$dist\,(O, \pi) = \frac{\left|\frac{1}{a}\cdot 0 + \frac{1}{b}\cdot 0 + \frac{1}{c}\cdot 0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{d} \;\rightarrow\; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

92 Considera las rectas r, s y t:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto P que está en la recta t y que determina con la recta s un plano que contiene a r.

El enunciado es enrevesado, pero el problema, una vez estudiado, es sencillo:

Las rectas r y s deben ser coplanarias. El plano que determinan, π, ha de tener un punto, P, situado en la recta t.

En la resolución, empezaremos viendo si r y s son coplanarias. Si lo son, hallaremos el plano π que determinan. La intersección de t y π es el punto P buscado.

Escribimos las ecuaciones de r, s y t en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = -1 - k \\ z = k \end{cases}$$

- ¿Son r y s coplanarias?

  Evidentemente, no son paralelas, pues $(0, 1, 1)$ no es paralelo a $(1, -1, -2)$.

  Veamos si se cortan. Para ello, igualamos, una a una, sus coordenadas:

  $$\left.\begin{array}{l} -2 = \mu \\ \lambda = -\mu \end{array}\right\}\ \mu = -2,\ \lambda = 2$$

  $\lambda = -2 - 2\mu \;\rightarrow\;$ ¿$2 = -2 - 2 \cdot (-2)$? Sí, es cierto. Por tanto, se cortan.

  El punto de corte de r y s se obtiene haciendo $\lambda = 2$ en las ecuaciones de r, o bien $\mu = -2$ en las ecuaciones de s. Se obtiene el punto $(-2, 2, 2)$.

- Hallamos la ecuación del plano π determinado por r y s:

  Un vector normal al plano es:

  $$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0, 1, 1) \times (1, -1, -2) = (-1, 1, -1) \;\rightarrow\; \vec{n}(1, -1, 1)$$

  Luego el plano es: $\pi: 1(x + 2) - 1(y - 2) + 1(z - 2) = 0$

  $\pi: x - y + z + 2 = 0$

- P es el punto de corte de π con la recta t:

  $k - (-1 - k) + k + 2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; k + 1 + k + k + 2 = 0 \;\;\rightarrow\;\; 3k + 3 = 0 \;\;\rightarrow\;\; k = -1$

  El punto es $P(-1, 0, -1)$.

93 **Halla las intersecciones de la superficie $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ con los tres planos coordenados. ¿Qué figuras obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?**

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 4 y 3.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 4.

Es un *elipsoide*.

94 **Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:**

$$\mathbf{2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0}$$

$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$

$2\,(x^2 - 4x + 4) + 3\,(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 3 + 8 + 3 + 4$

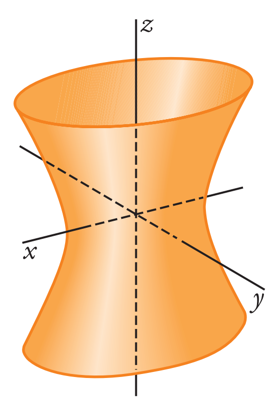
$2\,(x - 2)^2 + 3\,(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$

$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{6} - \dfrac{(z-2)^2}{18} = 1$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

95 **Halla las intersecciones de la superficie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1$ con los planos coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superfice dada?**



$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1$

Con $x = 0$: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 2.

Con $y = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 3.

Con $z = 0$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 3 y 2.

Es un *hiperboloide*.

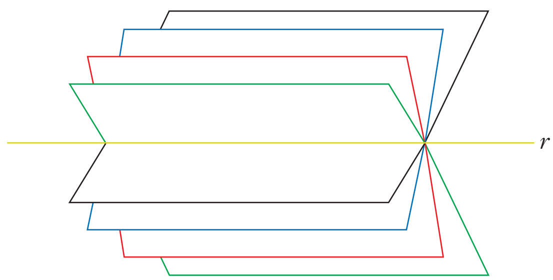
Página 211

96 **Haz de planos**

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ **es la intersección de los planos** π **y** σ**.**

El conjunto de todos los planos que contienen a r **se llama** ***HAZ DE PLANOS*** **de arista** r**, y su expresión analítica es:**

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a **y** b **(salvo para** $a = 0$ **y** $b = 0$**), se obtiene la ecuación de un plano del haz.**

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k **uno de los planos del haz es perpendicular a la recta** $t: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$**?**

¿Cuál es ese plano del haz?

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta s**:**

$$s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \ \rightarrow \ b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es: $\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = \ \ 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \ \ \to \ \ a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$$-11(2k+3) + (k-3) = 0 \ \ \to \ \ -22k - 33 + k - 3 = 0$$

$$-21k - 36 = 0 \ \ \to \ \ k = \frac{-36}{21} = \frac{-12}{7} \ \ \to \ \ k = \frac{-12}{7}$$

El plano del haz es:

$$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$$

$$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$$

$$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \ \ \to \ \ (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \ \ \to \ \ k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \ \ \to \ \ -2x + 10 = 3y + 3 \ \ \to \ \ -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \ \ \to \ \ x - 5 = 3z - 9 \ \ \to \ \ x - 3z + 4 = 0$$

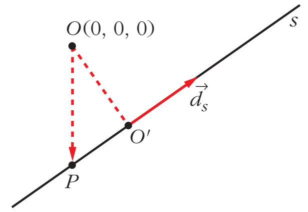
$$s: \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{array}\right.$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$

Un vector dirección de s es $\vec{d}_s(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d}_s$:

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d}_s = 0 \rightarrow 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$

$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \rightarrow 14\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$

Luego:

$O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien (5, 13, 11).

El plano será: $5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0$

$$5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

Página 211

AUTOEVALUACIÓN

1. $r_1: \begin{cases} x = 11 + 4\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 11 - 9\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = 7 - 7\lambda \end{cases}$

a) Halla las distancias entre los puntos de corte de r_1 y r_2 con:

$$\pi: 2x - 5y + 3z - 4 = 0$$

b) Halla el ángulo de r_1 con r_2.

c) Halla el ángulo de r_1 con π.

a) Veamos primeramente que r_1 y r_2 se cortan con π, es decir, que no son perpendiculares al vector normal a π.

$(4, 2, 3) \cdot (2, -5, 3) = 7 \neq 0 \Rightarrow r_1$ corta a π

$(-9, -5, -7) \cdot (2, -5, 3) = -14 \neq 0 \Rightarrow r_2$ corta a π

Hallamos ahora los puntos de corte de r_1 y r_2 con π. Para ello, en cada caso sustituimos las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano:

- r_1 con π:

  $$2(11 + 4\lambda) - 5(5 + 2\lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 4 = 0$$

  Operando se obtiene $\lambda = -2$. Por tanto, el punto de corte es $P(3, 1, 1)$.

- r_2 con π:

  $$2(11 - 9\lambda) - 5(5 - 5\lambda) + 3(7 - 7\lambda) - 4 = 0$$

  Operando se obtiene $\lambda = 1$. Por tanto, el punto de corte es $Q(2, 0, 0)$.

  La distancia entre los dos puntos es:

  $$dist\ (P, Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

b) Las rectas r_1 y r_2 se cortan, evidentemente, en el punto (11, 5, 7). Veamos su ángulo:

$$cos\ (\widehat{r_1, r_2}) = \frac{|4 \cdot (-9) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-7)|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{67}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{155}} = 0{,}99933237$$

$$\widehat{r_1, r_2} = 2° \ 5' \ 38''$$

c) $$cos\left(90° - (\widehat{\pi, r_1})\right) = \frac{|4 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3|}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{38}} = 0{,}2108663$$

$$90° - (\widehat{\pi, r_1}) = 77° \ 49' \ 37''$$

$$(\widehat{\pi, r_1}) = 12° \ 10' \ 23''$$

2. **α: $2x + 5y - 7z + 4 = 0$**

β: $5x - y + z - 4 = 0$

γ: $2x + 5y - 7z + 49 = 0$

Calcula la distancia entre α y β y entre α y γ.

Los planos α y β se cortan, ya que sus coeficientes no son proporcionales. Por lo tanto, la distancia entre α y β es 0.

Los planos α y γ son paralelos, puesto que sus coeficientes son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(-2, 0, 0)$ es un punto de α. Por tanto:

$$dist\ (\alpha, \gamma) = dist\ (P, \gamma) = \frac{|2 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 49|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{45}{\sqrt{78}} = \frac{15\sqrt{78}}{26}$$

3. **Calcula m para que $dist\,(P, Q) = 5$, siendo $P(3, -1, 11)$ y $Q(7, -1, m)$.**

$dist\,(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (-1+1)^2 + (m-11)^2} = 5 \rightarrow 4^2 + (m-11)^2 = 25$

Hay dos soluciones: $m = 14$ y $m = 8$

4. **Halla la distancia de $P(1, -4, 3)$ a la recta: $r: \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{4-2y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$**

(Ojo con el numerador de la segunda fracción).

La recta r se puede expresar como:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

En la segunda fracción hemos dividido numerador y denominador entre 2 para que el coeficiente de y sea 1.

El vector director de r es $\vec{d} = (5, -1, 3)$.

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo $Q(2, 2, -1)$ un punto de la recta r. $\overrightarrow{PQ} = (1, 6, -4)$

$$dist\,(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{|1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) - 4 \cdot 3|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35}$$

5. **Calcula la distancia entre las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P, y un vector director, $\vec{d}_s$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(0, 4, 0) \in s \qquad \vec{d}_s(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d}_r$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r:

$Q(3, 5, 4) \in r$; $\quad \vec{d}_r(2, -1, 1)$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 4)$.

$$dist\,(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \qquad [\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$dist\,(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14}$$

6. **Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a *r* y *s*.**

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Las rectas r y s se cruzan.

Por ser la recta buscada, t, perpendicular a r y a s, su vector director es:

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$$

Vamos a definir la recta t como intersección de dos planos:

Plano α: contiene a r y a t.

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_r = (5, -1, 4) \times (1, 5, 0) = (-20, 4, 26) \parallel (-10, 2, 13)$$

Como contiene a r, pasa por el punto $(-3, -2, 0)$. Por tanto:

$$\alpha: -10(x + 3) + 2(y + 2) + 13z = 0$$

$$\alpha: -10x + 2y + 13z - 26 = 0$$

Plano β: contiene a s y a t.

El vector normal al plano será:

$$\vec{d}_t \times \vec{d}_s = (5, -1, 4) \times (0, 4, 1) = (-17, -5, 20)$$

Como contiene a s, pasa por el punto $(3, -6, 2)$. Por tanto:

$$\beta: -17(x - 3) - 5(y + 6) + 20(z - 2) = 0$$

$$\beta: -17x - 5y + 20z - 19 = 0$$

Por tanto, la recta t es:

$$\begin{cases} -10x + 2y + 13z - 26 = 0 \\ -17x - 5y + 20z - 19 = 0 \end{cases}$$

En paramétricas:

$$t: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

7. a) Halla el área del triángulo determinado por los puntos de corte del plano $3x + y + 2z - 6 = 0$ con los tres ejes coordenados.

b) Halla el volumen de la pirámide determinada por esos tres puntos y el origen de coordenadas.

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

- Eje X: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2;\ P(2, 0, 0)$

- Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

  $y - 6 = 0 \rightarrow y = 6;\ Q(0, 6, 0)$

- Eje Z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

  $2z - 6 = 0 \rightarrow z = 3;\ R(0, 0, 3)$

El área del triángulo de vértices P, Q y R es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(-2, 6, 0) \times (-2, 0, 3)|}{2} =$$

$$= \frac{|(18, 6, -12)|}{2} = \frac{\sqrt{18^2 + 6^2 + 12^2}}{2} = 3\sqrt{14}\ \text{u}^2$$

b) $V_{\text{TETRAEDRO}} = \dfrac{\text{Área triángulo} \cdot \text{altura}}{3}$

La altura es la distancia del origen de coordenadas al plano.

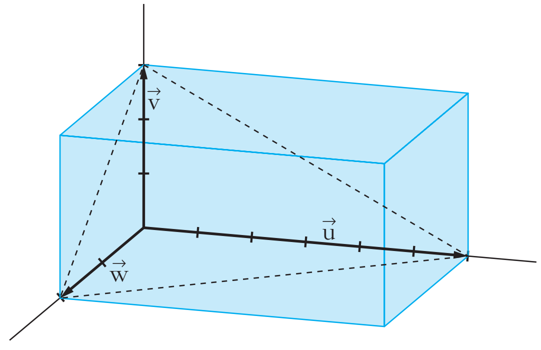
$$\text{altura} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}\ \text{u}$$

$$V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{14}} \cdot \dfrac{6}{\cancel{\sqrt{14}}}}{\cancel{3}} = 6\text{u}^3$$

Otra forma:

La pirámide es la sexta parte del ortoedro de aristas 2, 3 y 6.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6\ \text{u}^3$$



8. a) Halla el centro y el radio de esta esfera:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S.

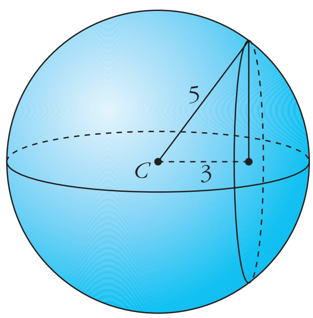
a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

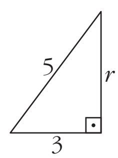
$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano $\pi: 3x - 4z + 5 = 0$:

$$dist\,(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$





Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$