Programación Lineal

1. **Objetivo de la Programación Lineal**
   - Se trata de **optimizar** (maximizar beneficios, minimizar costes) una función (llamada función objetivo $G(x, y)$) sujeta a un conjunto de restricciones o desigualdades (inecuaciones).
2. **Planteamiento para los ejercicios contextualizados**
   - A veces se pueden expresar en forma de tabla de doble entrada, los datos y las incógnitas del problema, parecido a una tabla de contingencia.
   - Se expresan las relaciones (inecuaciones), entre los datos y las incógnitas.
   - Se expresa la función objetivo en función de las incógnitas.
3. **Método gráfico. Resolución.**
   - Se dibuja el recinto limitado por las restricciones. Cada restricción da lugar a un semiplano, es decir, cada ecuación asociada a una inecuación, gráficamente representa una recta que divide al plano en 2 semiplanos, uno de ellos es la solución, la comprobación se hace tomando un punto de uno de los semiplanos para ver si satisface o no la inecuación, en caso afirmativo ese semiplano es la solución.
   - La solución óptima se encuentra en el contorno del recinto o región de validez (intersección de semiplanos), que es una región **convexa**. Cualquier punto de este contorno es una **solución factible**.
   - Una región convexa geométricamente, es aquella que contiene todos los segmentos de línea que unen dos puntos cualesquiera de la región.
   - Si hay una solución, estará en un vértice, si hay más de una, se encontrarán en un lado del recinto poligonal y si el recinto está abierto es posible que no haya solución óptima.
   - La función objetivo se puede representar mediante una recta móvil que pasa por el origen y que se mueve paralela a si misma, alcanzando el óptimo en el punto que toque al recinto por 1ª vez.
   - La solución factible en esos puntos hará óptima la **función objetivo.**
4. **Tipos de ejercicios.**
   - Hay que realizar el planteamiento del problema y posteriormente resolverlo.
   - Sin planteamieto y solo hay que resolverlo.
5. **Cálculos a realizar en todos los ejercicios.**
   - Planteamiento o no.
   - Representación gráfica del recinto.
   - Representación de la función objetivo.
   - Cálculo de los vértices del recinto.
   - Cálculo del valor de la función objetivo en los vértices.
   - Obtener el valor óptimo.
6. **Errores más comunes en la resolución de ejercicios de programación lineal.**
   - *Error al representar gráficamente una inecuación.* Una inecuación lineal con dos incógnitas siempre representa un semiplano, es decir una de las partes en que una recta divide al plano, y para representarlo basta con dibujar la recta asociada a la inecuación, que se obtiene considerando la ecuación asociada, y tomando dos puntos por donde pasa la recta representada por dicha ecuación. La recta divide al plano en dos partes o semiplanos, para saber cuál de las partes cumple la inecuación, se toma un punto cualquiera del plano que no esté en la recta y se sustituye en la inecuación, si la cumple, el semiplano que contiene a dicho punto es la solución, en caso contrario es el otro semiplano.
   - *Error cometido al representar el recinto acotado o región de validez, que es el conjunto de puntos que cumple todas las inecuaciones.* Este recinto se suele sombrear para distinguirlo mejor. La forma de construirlo es una vez representada una inecuación, rayar la zona cercana a la recta dentro del semiplamo solución, así se hace con todas las inecuaciones, y el conjunto de puntos que caiga dentro de todas las zonas rayadas, es el recinto solución.
   - *Error en los ejercicios contextualizados al no considerar soluciones positivas.* En el caso de un ejercicio de programación lineal en el que tengamos que plantear el sistema de inecuaciones, muchas veces se olvida que las soluciones correspondientes, tienen que ser números positivos, lo que significa que en estos casos hay que introducir dos inecuaciones correspondientes a $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

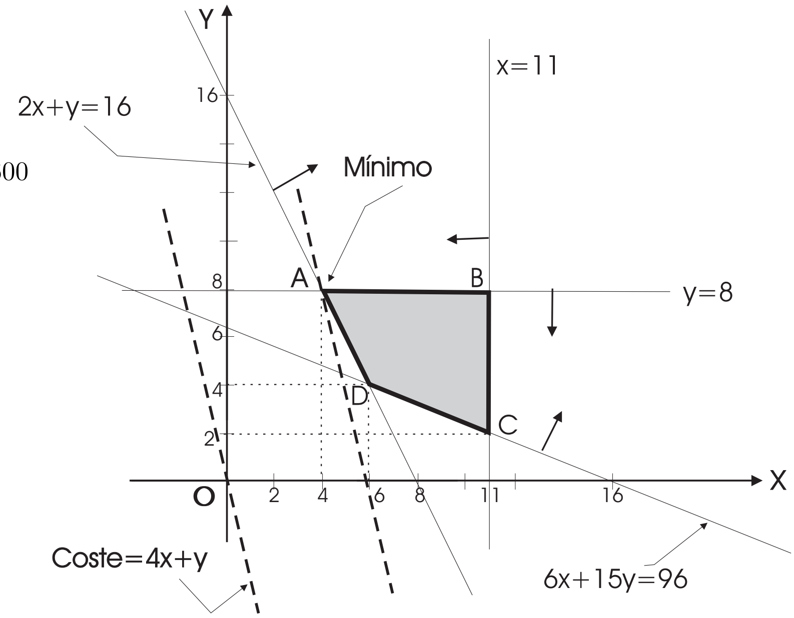
Ejemplo 1.
Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

Solución

	A	B	Total
Personas	200	100	1600
Equipaje	6	15	96
Total	11	8	

F. obj: $Coste = 4x + y$ Restric.: $\begin{cases} 200x + 100y \geq 1600 \\ 6x + 15y \geq 96 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Vért.: $\begin{cases} \mathbf{A(4,8)} \text{ Mínimo} \\ B(11,8) \\ C(11,2) \\ D(6,4) \end{cases}$ F. obj.: $\begin{cases} \mathbf{C(A) = 24} \\ C(B) = 52 \\ C(C) = 46 \\ C(D) = 28 \end{cases}$



Ejemplo 2.
Sea el conjunto de restricciones siguiente:

$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

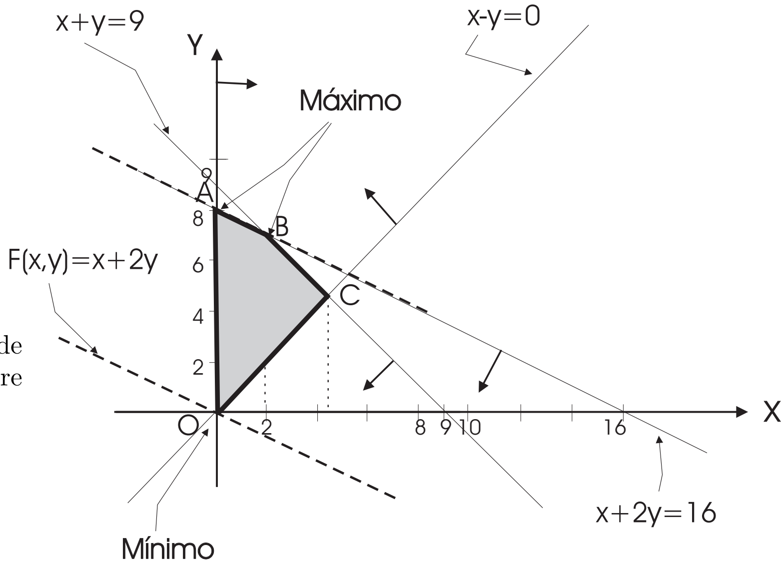
- Dibuje la región factible determinada por dichas restricciones.
- Calcule los vértices de dicha región.
- Obtenga los puntos en los que la función objetivo $F(x, y) = x + 2y$ presenta el máximo y el mínimo.

Solución

F. obj: $F(x, y) = x + 2y$ Restric.: $\begin{cases} x + y \leq 9 \\ x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 16 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Vért.: $\begin{cases} \mathbf{O(0,0)} \text{ Mínimo} \\ \mathbf{A(0,8)} \text{ Máximo} \\ \mathbf{B(2,7)} \text{ Máximo} \\ C(4.5, 4.5) \end{cases}$ F. obj.: $\begin{cases} \mathbf{F(O) = 0} \\ \mathbf{F(A) = 16} \\ \mathbf{F(B) = 16} \\ F(C) = 13.5 \end{cases}$

En este caso el máxino no es único sino que es cualquiera de los ∞ puntos de la recta $x + 2y = 16$ comprendidos entre $A(0, 8)$ y $B(2, 7)$.



Ejercicios propuestos.

Estudiar los ejercicios y problemas resueltos (1 al 9) del libro, páginas 109 a 113. Realizar los ejercicios propuestos: 1, 4, 14, 19 y 22, todos ellos con soluciones en el CD del libro.