Capítulo 1. Programación Lineal

1.1 Resumen Teórico de Programación Lineal

1.1.1 Introducción histórica

En el vasto campo científico de las Matemáticas existen diversas áreas de conocimiento, Geometría, Álgebra, Estadística, etc. Una de estas áreas, quizás la más moderna es la Investigación Operativa o Investigación de Operaciones (nombre debido a que los primeros problemas que se plantearon estaban relacionados con operaciones militares en la 2ª guerra mundial).

Dentro de la Investigación Operativa una parcela importante, imprescindible en su evolución, la ocupa la denominada Programación Matemática.

La Programación Lineal constituye, a su vez, un capítulo notable dentro de la Programación Matemática. La denominación "Lineal" es debida a que todas las funciones que intervienen en el "programa" tienen carácter lineal.

El problema de resolución de sistemas lineales de inecuaciones ya fue abordado por Fourier en 1826 y posteriormente desarrollado por Dines en 1918 y Motzkin en 1936. Sin embargo, es en la mitad del siglo XX cuando se puede considerar la fecha que marca la elaboración de los pilares de la Programación Lineal, debida, entre otros, a los matemáticos George Dantzig (1914-2005), estadounidense, quien publicó en 1947 el algoritmo del simplex, John von Neumann (1903-1957), húngaro-estadounidense, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año y el ruso Leonid Kantoróvich (1912-1986) que utiliza técnicas similares en la Economía y que obtuvo el premio Nobel de Economía en 1975.

1.1.2 Conceptos básicos en Programación Lineal

El tipo de programas que se estudian a continuación está restringido a funciones de dos variables.

Formalmente, un problema de programación lineal (o **programa lineal**) de dos variables consiste en optimizar una función lineal de dos variables, definida en un subconjunto del plano, dado mediante la intersección de semiplanos cerrados.

$$Opt\ F(x,y) = c_1x + c_2y$$

sujeto a
$$\begin{aligned} a_1x + a'_1 y &\leq (\geq) b_1 \\ a_2x + a'_2 y &\leq (\geq) b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_mx + a'_m y &\leq (\geq) b_m \\ x \geq 0;\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

La función de dos variables, $F : S \subseteq RxR \to R$, se llama función objetivo.

El subconjunto de las soluciones posibles del programa lineal está dado por

$$S = \{(x,y) \in R \times R \,/\, a_i x + a_i' y \leq (\geq) b_i, i = 1,2,\dots,m \wedge x \geq 0, y \geq 0\} \subseteq R \times R.$$

S es una región del plano, denominada "región factible" del programa lineal.

1.1.3 Vocabulario básico

Segmento (en el plano) de extremos $a(a_1,a_2)$, $b(b_1,b_2)$: es el conjunto de puntos

$$[ab] = \{x \equiv (x_1,x_2) \in R \times R \,/\, x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in R, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

A la expresión $\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in R, 0 \leq \lambda \leq 1$ se le llama "**combinación convexa de los puntos *a* y *b***".

Conjunto convexo: Es un conjunto tal que el segmento determinado por dos puntos cualesquiera del conjunto está contenido en el conjunto.

La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Cualquier semiplano cerrado, $ax \pm by \leq (\geq) c$, es un conjunto convexo.

La región factible, S, es un conjunto convexo por ser la intersección de conjuntos convexos.

Punto extremo o vértice, v, de un conjunto convexo es aquél que se caracteriza por la no existencia de dos puntos, de ese conjunto, que permitan expresarle como combinación convexa de ellos en la forma dada en la expresión anterior, es decir solo admite la expresión $v = 1v$.

Punto de acumulación de un conjunto: es un punto, no necesariamente del conjunto, caracterizado porque en cualquier entorno suyo hay puntos del conjunto.

Conjunto cerrado: es un conjunto que contiene a todos sus puntos de acumulación.

Cualquier semiplano cerrado, $ax \pm by \leq (\geq) c$, es un conjunto cerrado.

La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

La región factible, *S*, es un conjunto cerrado por ser la intersección de conjuntos cerrados.

Conjunto acotado A en un espacio métrico M:

Un conjunto A, en un espacio métrico, está acotado si existe un número real *c*, tal que para cualquier par de puntos *x*, *y*, de A, se verifica $d(x,y) \leq c$, donde *d* expresa la distancia entre los puntos. A *c* se le llama cota superior y a la menor de las cotas superiores diámetro. Si un conjunto no está acotado se dice que es de diámetro infinito.

Toda bola abierta es un conjunto acotado de diámetro el doble del radio de la bola.

Todo conjunto acotado está contenido en una bola abierta.

Función convexa: es una función, *f*, definida en un conjunto convexo *C*, que verifica la condición

$$\forall (a,b) \in C,\ \forall \lambda \in R, 0 \leq \lambda \leq 1 : f\left(\lambda a + (1-\lambda) b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Es inmediato comprobar que cualquier función lineal es convexa.

Función cóncava: es una función, *f*, definida en un conjunto convexo *C*, que verifica la condición

$$\forall (a,b) \in C,\ \forall \lambda \in R, 0 \leq \lambda \leq 1 : f\left(\lambda a + (1-\lambda) b\right) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

Toda función lineal es cóncava.

Función económica o función objetivo: Función *F* que forma parte del programa y que se desea optimizar (minimizar y/o maximizar).

Restricciones: Desigualdades/igualdades que deben cumplir las variables del programa.

Optimizar: Determinar los valores extremos de F así como los puntos de S donde se alcanzan.

Extremos, óptimos: son los máximos y mínimos de la función F en la región factible S.

Región factible o conjunto de oportunidades: el conjunto S.

Observemos que las restricciones que definen S, clasifican al plano en dos regiones disjuntas: la propia S, formada por todos los puntos cuyas coordenadas verifican todas las restricciones, y la región complementaria de S que constituirían los puntos que no verifican alguna de las restricciones.

Solución factible: Es cualquier punto de S.

Solución factible óptima: es un punto de S en el que la función objetivo alcanza un valor extremo, puede ser único o no.

1.1.4 Fundamentos básicos de la Programación Lineal

Programa convexo de minimización: Es un programa en el que la función objetivo es una función convexa y la región factible es un conjunto convexo.

Programa convexo de maximización: Es un programa en el que la función objetivo es una función cóncava y la región factible es un conjunto convexo.

Teorema local-global:

i) En un programa convexo de minimización, los mínimos locales son globales.

ii) En un programa convexo de maximización, los máximos locales son globales.

Corolario:

Dado que cualquier programa lineal, tanto de maximización como de minimización, es un programa convexo, se concluye, en virtud del teorema anterior, que los óptimos locales (máximos o mínimos) son globales; es decir en cualquier programa lineal los máximos o mínimos relativos lo son absolutos.

Teorema de Weierstrass:

Toda función continua definida en un conjunto compacto (conjunto cerrado y acotado), no vacío, alcanza en dicho conjunto sus extremos absolutos, es decir tiene en su dominio, al menos, un máximo y un mínimo absolutos o globales.

Corolario:

Puesto que en un programa lineal la función objetivo es una función lineal, y por tanto continua, y la región factible es un conjunto cerrado se puede concluir que, si S está acotado siempre se alcanzará un máximo y un mínimo absolutos.

Observaciones:

Este teorema es una condición suficiente pero no necesaria, es decir, puede haber recintos no acotados donde se alcancen extremos absolutos.

Los óptimos, si existen (en el caso de regiones acotadas siempre existen), pueden ser únicos o no; en este último caso se alcanzarían en infinitos puntos, en particular en cualquiera de los del segmento que une dos vértices de valor óptimo.

Teorema Fundamental de la Programación Lineal

En cualquier programa lineal en forma estándar (restricciones dadas en forma de igualdad):

i) Si S no es vacío posee, al menos, un punto extremo.

ii) Si existe solución óptima, existe en S un punto extremo donde el valor de la función objetivo es óptimo.

Corolario:

En un programa lineal con solución óptima, ésta se alcanza en uno de los vértices de S.

1.1.5 Conclusión final

En un programa lineal bidimensional, como los que nos ocupan en este texto, en el que S está acotado y por tanto siempre tiene solución óptima, un procedimiento a seguir para resolver el programa sería:

i) Representar la región factible S.

ii) Determinar los vértices, o puntos extremos de S.

iii) Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices.

iv) A la vista de los valores obtenidos en el apartado anterior se concluye en qué vértices se alcanzan los valores óptimos; éstos pueden alcanzarse en un único vértice o en más de uno, en cuyo caso tendríamos lo que se denomina solución de arista.